Options, futures et autres actifs dérivés

John Hull

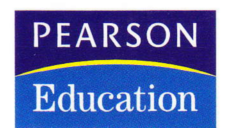
6e édition

Édition française dirigée par Patrick Roger

avec Christophe Hénot

Laurent Deville





Options, futures et autres actifs dérivés

6e édition

John Hull

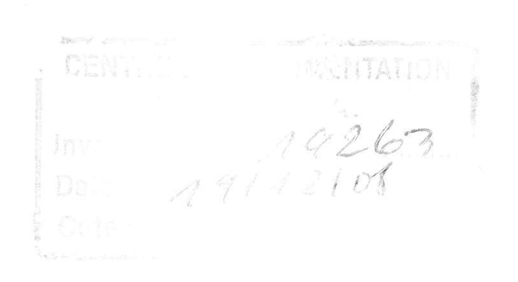
Édition française dirigée par Patrick Roger

Traduction : Patrick Roger
université Louis Pasteur Strasbourg I

Christophe Hénot
université Paris I Panthéon Sorbonne

Laurent Deville
chargé de recherches CNRS au DRM-CEREG,
université Paris Dauphine

Le présent ouvrage est la traduction de OPTIONS, FUTURES AND OTHER DERIVATIVES, 6e éd., de JOHN C. HULL, publié par Prentice Hall, Pearson Education Inc., Upper Saddle River, New Jersey, États-Unis.



ISBN : 978-2-7440-7179-9

Table des matières

Liste des notes techniques

Ces compléments sont disponibles à l'adresse www.pearsoneducation.fr.

Liste des encadrés

Préface à l'édition anglaise

La première édition de ce livre comportait seulement 13 chapitres et 330 pages. C'est toujours pour moi un souvenir surprenant. Les marchés d'actifs dérivés se sont considérablement développés depuis vingt-cinq ans et ce livre cherche à tenir compte des derniers développements à chaque nouvelle édition.

Comme les précédentes, cette édition vise des publics variés. Elle est adaptée aux étudiants de master et de doctorat en économie, en sciences de gestion et plus particulièrement en finance. Elle peut être utilisée en troisième année de licence pour des étudiants ayant des bases solides en techniques quantitatives. De même, les praticiens qui souhaitent approfondir leur compréhension des mécanismes gouvernant les marchés d'actifs dérivés y trouveront un intérêt.

L'auteur d'un ouvrage sur ce domaine doit prendre une décision capitale quant à l'usage des mathématiques. Si le degré de sophistication retenu est trop élevé, le risque est grand de perdre en chemin une proportion non négligeable d'étudiants et de praticiens. S'il est trop faible, des thèmes essentiels seront traités de manière superficielle. J'ai essayé d'être très prudent quant à l'usage des mathématiques et au choix des notations. Ce qui est secondaire a été soit supprimé, soit reporté dans des annexes en fin de chapitre ou dans des notes techniques sur le site de l'auteur. Les notions, éventuellement nouvelles pour bon nombre de lecteurs, sont expliquées en détail, et de nombreux exemples numériques les illustrent.

Ce livre couvre à la fois les actifs dérivés et la gestion du risque qu'ils impliquent. Il suppose que le lecteur ait suivi un cours introductif en finance ainsi qu'en probabilité et statistique. Il n'y a pas, en revanche, de prérequis concernant les options, les contrats à terme ou encore les swaps. Il n'est pas non plus indispensable que les étudiants aient suivi un cours sur les choix d'investissement avant d'aborder l'étude de ce livre.

Cet ouvrage peut être utilisé de diverses manières dans le cadre de l'enseignement. Un cours d'introduction aux actifs dérivés se concentrera sur la première moitié alors qu'un cours plus avancé s'appuiera sur tout ou partie de la seconde moitié. Le chapitre 32 permet aussi bien de conclure un cours introductif qu'un cours avancé.

Quoi de neuf ?

Les différents chapitres ont été améliorés et mis à jour. Les changements de cette édition peuvent être résumés comme suit :

- Certains chapitres ont été complètement réécrits afin de refléter les développements récents de certains marchés ; c'est le cas des chapitres sur le risque de crédit et les dérivés de crédit (20 et 21). Ceux-ci sont plus faciles à enseigner que les chapitres correspondants de l'édition précédente.
- Les six premiers chapitres ont été remplacés par sept chapitres qui couvrent, dans un style plus abordable, les forward, les futures et les swaps. Le chapitre sur la couverture est devenu le chapitre 3 et le 4 est maintenant consacré au calcul des taux d'intérêt. Le chapitre 5 couvre la détermination des prix forward et des prix futures, alors que le 6 décrit les contrats futures de taux d'intérêt. Le chapitre 7 traite des swaps.
- Plus de cinquante encadrés ont été ajoutés. Ils décrivent des situations réelles en illustrant des points spécifiques du texte.
- Des éléments supplémentaires ont été introduits afin de montrer comment les modèles peuvent être mis en œuvre à l'aide d'un tableur comme Excel (voir, par exemple, la simulation de Monte Carlo au chapitre 17, les modèles GARCH au chapitre 19, ou le modèle variance-gamma au chapitre 24). Les feuilles Excel correspondantes sont disponibles sur le site de l'auteur.
- Une série de notes techniques sont accessibles sur le site de l'éditeur. Cela signifie que le livre contient moins de passages purement techniques ou mathématiques. La présentation est donc plus agréable pour l'étudiant.
- La version 1.51 de DerivaGem est fournie avec le livre. Une différence avec la version précédente est que les feuilles de calcul ne sont pas verrouillées.
- Le chapitre 11, consacré au modèle binomial, et le chapitre 7, consacré aux swaps, ont été étendus pour couvrir plus complètement ces deux thèmes.
- Un chapitre sur les ajustements de convexité, les ajustements temporels et les quantos a été ajouté. Son contenu était précédemment réparti dans les chapitres « Martingales, changements de mesure et numéraire » et « Les dérivés de taux : les modèles de marché standard ».
- La suite des chapitres de la seconde partie a été aménagée différemment de façon à rendre la lecture plus naturelle pour les étudiants et les enseignants.
- De nombreux nouveaux thèmes ont été introduits. Par exemple, la taille des marchés dérivés est abordée au chapitre 1, Bâle II au chapitre 20 et le modèle variance-gamma au chapitre 24. D'autres thèmes sont approfondis par rapport à la cinquième édition. Ainsi, des éléments complémentaires ont été ajoutés sur les ajustements de convexité des contrats futures eurodollars (chapitre 5), les modèles de copula (chapitres 20 et 21) et les stock-options (chapitres 8 et 13).
- Un changement a été introduit au niveau des notations. Nous sommes revenus aux delta majuscules. Le changement inverse avait été fait dans l'édition précédente, mais il ne s'est pas révélé très populaire parmi les lecteurs.

- De nouveaux exercices de fin de chapitre ont été ajoutés.

  Les références dans l'ensemble du livre ont été modifiées et mises à jour. De nombreuses modifications ont été faites pour améliorer la présentation.

Logiciel

Une nouvelle version de DerivaGem (version 1.51) est livrée avec l'ouvrage. Elle consiste en deux applications Excel : le calculateur d'options et le développeur d'applications. Le calculateur d'options correspond à celui de la précédente édition (avec quelques changements mineurs). Le développeur d'applications propose des fonctions Excel à partir desquelles les utilisateurs peuvent développer leurs propres applications. Il comprend un certain nombre d'exemples et conduit les étudiants à explorer plus aisément les propriétés des options et les méthodes numériques d'évaluation. Il permet aussi de construire des problèmes plus évolués. Le logiciel est décrit plus en détail à la fin de l'ouvrage. Les mises à jour peuvent être téléchargées à l'adresse suivante :

www.rotman.utoronto.ca/~hull

Transparents

Plusieurs centaines de transparents peuvent être téléchargés dans leur version originale sur le site ci-dessus. Les enseignants qui utilisent le livre pour leurs cours peuvent adapter ces transparents selon leurs besoins.

Corrigés des exercices et réponses aux questions

Comme dans la cinquième édition, les problèmes de fin de chapitre sont divisés en deux groupes : « Problèmes et exercices » et « Questions complémentaires ».

Les solutions des problèmes et exercices sont données dans *Options, futures et autres actifs dérivés, 6ᵉ édition, Corrigés* (Pearson Education France, juillet 2007, référence 7231-4).

Les réponses aux questions complémentaires sont disponibles sur le site compagnon de l'ouvrage, dédié aux enseignants prescripteurs (écrire à superieur@pearsoned.fr).

Notes techniques

Une nouvelle caractéristique de cette édition est la présence de notes techniques, disponibles en français sur le site de l'éditeur. Elles constituent un complément aux éléments techniques traités dans le texte (voir la liste des notes donnée après la table des matières). Elles peuvent être téléchargées à l'adresse www.pearsoneducation.fr.

En association avec Learning Dividends, Inc., j'ai développé des outils d'e-learning, appelés *Hull on Derivatives*, qui accompagnent la première partie de l'ouvrage. Ils consistent en 14 modules avec des instructions détaillées. Pour plus d'informations, voir : www.hullonderivatives.com

Remerciements

De nombreuses personnes ont participé à l'élaboration de ce livre. Des enseignants, des étudiants et des professionnels m'ont fait des suggestions pertinentes et utiles. Je citerai Farhang Aslani, Jas Badyal, Emilio Barone, Giovanni Barone-Adesi, Alex Bergier, George Blazenko, Laurence Booth, Phelim Boyle, Peter Carr, Don Chance, J.P. Chateau, Ren-Raw Chen, George Constantinides, Michel Crouhy, Emanuel Derman, Brian Donaldson, Dieter Dorp, Scott Drabin, Jerome Duncan, Steinar Ekern, David Fowler, Louis Gagnon, Dajiang Guo, Jrgen Hallbeck, Ian Hawkins, Michael Hemler, Steve Heston, Bernie Hildebrandt, Michelle Hull, Kiyoshi Kato, Kevin Kneafsy, Tibor Kucs, Iain MacDonald, Bill Margrabe, Izzy Nelkin, Neil Pearson, Paul Potvin, Shailendra Pandit, Eric Reiner, Richard Rendleman, Gordon Roberts, Chris Robinson, Cheryl Rosen, John Rumsey, Ani Sanyal, Klaus Schurger, Eduardo Schwartz, Michael Selby, Piet Sercu, Duane Stock, Edward Thorpe, Yisong Tian, P.V. Viswanath, George Wang, Jason Wei, Bob Whaley, Alan White, Hailiang Yang, Victor Zak, et Jozef Zemek. Huafen (Florence) Wu et Matthew Merkley ont fourni une assistance technique très appréciée.

Je suis particulièrement reconnaissant à Eduardo Schwartz qui a lu la version originale du manuscrit de la première édition et dont les nombreux commentaires ont permis des améliorations importantes, ainsi qu'à Richard Rendleman et Georges Constantinides, dont les commentaires ponctuels ont amélioré les éditions plus récentes.

Les cinq premières éditions ont rencontré beaucoup de succès auprès des professionnels et leurs commentaires ont aussi permis des améliorations significatives. Les étudiants qui suivaient mes cours sur les marchés d'actifs dérivés à l'université de Toronto ont de même influencé l'évolution de cet ouvrage. Yves Noth, de l'université de St-Gallen, a fourni une assistance de recherche précieuse pour cette édition.

Alan White, mon collègue de l'université de Toronto, mérite des remerciements particuliers. Pendant les vingt-deux années qui viennent de s'écouler, Alan et moi avons mené des recherches en commun sur les actifs dérivés. Pendant ces années, nous avons passé un nombre incalculable d'heures à discuter de ce sujet. Une grande part des idées nouvelles développées dans ce livre et des méthodes récentes de présentation des idées anciennes sont à mettre autant au crédit d'Alan qu'au mien. Il a lu très méticuleusement la version originale du livre et a proposé de nombreuses améliorations. Il a aussi réalisé la plupart des développements du logiciel DerivaGem.

J'ai une pensée particulière pour les nombreuses personnes travaillant chez l'éditeur Prentice Hall, pour leur enthousiasme, leurs conseils et leurs encouragements. Je souhaite remercier tout spécialement David Alexander (mon éditeur) et Francesca Calogero (assistante financière de l'éditeur). Je suis aussi reconnaissant envers Scott Barr,

Leah Lewell, Paul Donnelly, et Maureen Riopelle qui, à des moments différents, ont joué un rôle important dans l'élaboration de ce livre.

Les commentaires sur cette version sont les bienvenus. Mon adresse email est la suivante : hull@rotman.utoronto.ca

John C. Hull

Université de Toronto

Préface à l'édition francophone

Traduire *Options, Futures and Other Derivatives* de John Hull est un défi à la fois intimidant et excitant. La raison en est simple : il s'agit sans aucun doute de l'ouvrage le plus complet traitant des actifs dérivés actuellement sur le marché.

Deux questions essentielles se posent au début de ce genre d'aventure. La première concerne les termes techniques. Faut-il opter pour une traduction intégrale des mots comme *call*, *put*, *swap*, *spread*, etc. ou est-il préférable de garder les expressions anglo-saxonnes ? Nous avons, sans hésiter, opté pour la seconde solution car, à la fois les professionnels, dans leur pratique quotidienne, et les universitaires, dans leurs enseignements, utilisent les termes anglo-saxons. Cela est probablement dû au pragmatisme des professionnels (*put* est bien plus rapide à prononcer qu'« option de vente »), et au fait que l'anglais est la langue des marchés financiers. On peut éventuellement le regretter, mais il faut en tenir compte.

La question suivante concerne les exemples. Faut-il systématiquement les adapter au contexte européen ou n'opérer qu'une adaptation partielle ? Ici encore, notre choix s'est porté sur la seconde solution. Force est de reconnaître le caractère international de l'univers des actifs dérivés et le leadership de certains marchés nord-américains comme, par exemple, le Chicago Board Options Exchange sur les options. Par conséquent, un certain nombre d'exemples sont ceux de l'édition originale, d'autres ont été remplacés par des exemples de contrats cotés sur des marchés européens comme l'EUREX, le LIFFE ou le MONEP.

Les erreurs de frappe qui s'étaient glissées dans l'édition originale, mentionnées dans un document d'errata sur le site de l'auteur, ont été corrigées. Nous espérons ne pas en avoir introduit d'autres, même si, sur un ouvrage de ce volume, c'est un objectif pratiquement impossible à atteindre.

Au terme de ce long travail, parfois difficile, je suis reconnaissant à Christophe Hénot, Laurent Deville pour leur traduction des chapitres 8 à 15, 17, 19 et 22, ainsi que pour la relecture de certains autres chapitres.

Je tiens à remercier mes collègues du Laboratoire de Recherche en Gestion et Économie, et plus particulièrement Maxime Merli et André Schmitt, pour leur relecture attentive de nombreux chapitres. J'exprime ma reconnaissance à Danielle Genevé pour sa gentillesse et sa compétence dans la dactylographie de certaines parties.

J'ai apprécié les relations, professionnelles mais néanmoins cordiales, avec Pascale Pernet, Antoine Chéret et Julie Besné, de Pearson Education, pendant l'élaboration de cette traduction. Béatrice Hoareau a assuré la relecture intégrale du manuscrit. J'ai été impressionné par son professionnalisme et sa rigueur et je lui adresse mes plus vifs remerciements.

Comme il est d'usage de le rappeler, les erreurs qui pourraient cependant subsister relèvent de mon entière responsabilité.

Patrick Roger

Professeur de finance,
université Louis-Pasteur, Strasbourg

Chapitre 1

Introduction

L'importance des produits dérivés sur les marchés financiers s'est constamment accrue lors des vingt-cinq dernières années. Les contrats futures et les options font maintenant l'objet de transactions considérables sur de nombreux marchés organisés. Les contrats forward, les swaps et différents types d'options sont régulièrement échangés sur les marchés de gré à gré par les institutions financières, les gérants de fonds et les trésoriers d'entreprise.

Des actifs dérivés sont parfois intégrés à des titres plus classiques comme les actions ou les obligations. Un produit dérivé (ou plus simplement un « dérivé ») est un actif dont la valeur dépend d'autres variables plus fondamentales comme les prix d'autres actifs négociés sur les marchés, les taux d'intérêt, les taux de change ou encore les températures, etc.

Depuis la première édition de ce livre en 1988, les marchés de dérivés ont connu un développement très rapide. Aujourd'hui sont régulièrement échangés des dérivés de crédit, d'électricité, des dérivés climatiques ou d'assurance. De nouveaux produits dérivés sur taux, actions ou changes ont aussi été créés.

De même, la mesure et la gestion du risque ont subi des transformations importantes. Les analystes tiennent aujourd'hui compte de ce que l'on appelle les options réelles (il s'agit des options incluses dans les investissements en actifs réels comme les immeubles, les capacités de production, etc.).

Cette édition reflète tous ces nouveaux développements. Dans ce chapitre introductif, nous jetons un premier regard sur les contrats forward et futures, les marchés d'options, et nous montrons comment ces actifs financiers peuvent être utilisés pour la couverture, la spéculation ou l'arbitrage. Les chapitres suivants approfondissent et développent les points effleurés ici.

1.1 Les marchés organisés

Un marché organisé d'actifs dérivés est un marché sur lequel sont échangés des contrats standardisés, élaborés par les autorités de marché. Le Chicago Board of Trade (www.cbot.com) a été créé en 1848 pour confronter les offres et demandes de grains des fermiers et des négociants. Au départ, l'objectif essentiel était de standardiser quantités et qualités de grains échangés. Quelques années plus tard, le premier contrat futures a été mis en place. Rapidement, les spéculateurs ont trouvé plus attractif de spéculer sur le contrat que sur le grain lui-même. Le principal concurrent nord-américain, le Chicago Mercantile Exchange (CME, www.cme.com), a ouvert ses portes en 1919. Aujourd'hui, des marchés organisés de contrats futures existent dans le monde entier.

Sur les marchés européens, Eurex, résultat de l'association de la Deutsche Terminbörse (DTB) et de la Soffex SA suisse (www.eurexchange.com), est l'un des acteurs essentiels dans la négociation de produits dérivés. Le LIFFE (*London International Financial Futures Exchange*), qui fait partie du groupe Euronext depuis 2001, est l'autre marché de référence (www.liffe.com).

Le Chicago Board Options Exchange (CBOE, www.cboe.com) a proposé des contrats d'options d'achat sur actions (calls) à partir de 1973. Les options existaient bien avant cela, mais le CBOE a rencontré un grand succès en proposant des contrats clairement définis aux caractéristiques standardisées. La négociation d'options de vente (puts) a débuté en 1977. Ce sont aujourd'hui plus de 1000 actions qui sont supports de contrats d'options, ainsi que de nombreux indices.

Le marché d'options français est le MONEP (Marché d'options négociables de Paris, www.monep.fr), ouvert en 1987, sur lequel sont négociées des options sur plus d'une centaine d'actions et sur plusieurs indices boursiers, français et européens.

Comme les contrats futures, les options se sont développées à un rythme soutenu à travers le monde et les supports se sont diversifiés ; en plus des actions et des indices, on trouve maintenant des options sur de nombreuses devises et des options sur contrats futures.

Les marchés électroniques

Alors que, traditionnellement, les traders (ou membres de marchés) négociaient en un lieu unique, à la criée, à l'aide d'un jeu de signes complexe, l'évolution technologique a conduit à l'émergence de la négociation (ou *trading*) électronique qui est la norme aujourd'hui. Les ordres sont donc passés directement par ordinateur et transférés sur un système central qui apparie acheteurs et vendeurs. Quoique les marchés à la criée aient leurs défenseurs, ils sont progressivement remplacés par le trading électronique.

1.2 Les marchés de gré à gré

Tous les échanges ne sont pas réalisés sur des marchés organisés. Le marché de gré à gré (noté OTC dans la suite pour *over the counter*) constitue une alternative importante en termes de volumes de transactions. Les échanges sont conclus par téléphone ou par l'intermédiaire de réseaux informatiques entre deux institutions financières ou entre une institution et l'un de ses clients. Ces institutions jouent souvent le rôle de teneurs de marché, ou *market-makers*, pour les produits les plus courants, c'est-à-dire qu'elles cotent des prix auxquels elles sont prêtes à acheter (prix demandé ou *bid*) et des prix auxquels elles acceptent de vendre (prix offert ou *ask*).

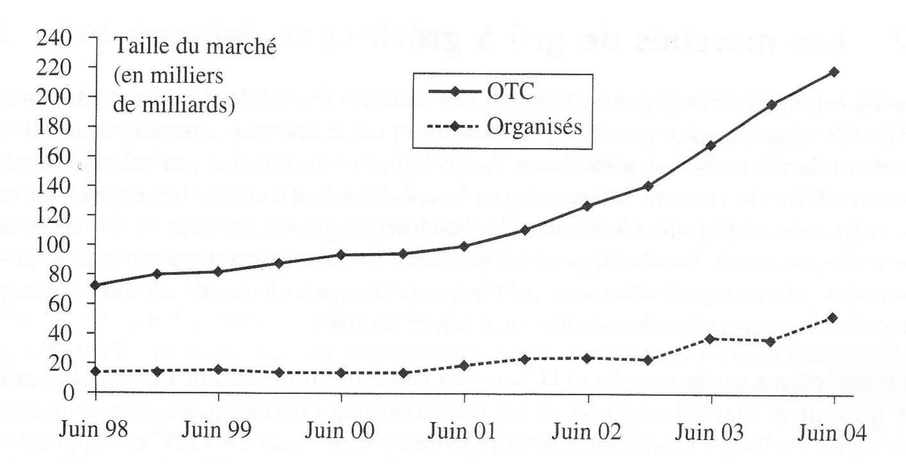
Les transactions sur le marché OTC sont en général d'un montant moyen plus important que sur le marché organisé et les conversations téléphoniques sont enregistrées pour régler les litiges éventuels. L'avantage essentiel du marché OTC est la possibilité de traiter des produits sur mesure, la contrepartie étant qu'une des deux parties puisse faire défaut. Les marchés organisés ont, par contre, défini des règles de fonctionnement qui rendent ce risque pratiquement nul.

La taille du marché

Les montants échangés sur les actifs dérivés sont énormes, que ce soit sur les marchés organisés ou sur les marchés de gré à gré. Bien que les statistiques provenant des deux types de marchés ne soient pas exactement comparables, il est clair que le marché de gré à gré dans sa globalité est beaucoup plus important que le marché organisé. La Banque des Règlements Internationaux (www.bis.org) a commencé à collecter des statistiques en 1998. Le graphique 1.1 compare (a) le montant estimé de sous-jacent correspondant aux contrats sur le gré à gré entre juin 1998 et juin 2004 et (b) les montants correspondants sur les marchés organisés pendant la même période. On voit qu'en juin 2004 le gré à gré atteint un montant de 220 100 milliards de dollars (approximativement cinq fois le PIB mondial), alors que, sur les marchés organisés, le montant atteint « seulement » 49 000 milliards de dollars.

Pour interpréter ces chiffres, il faut garder à l'esprit que le montant de sous-jacent associé à un contrat ne représente pas la valeur du contrat. Considérons par exemple un contrat engageant une entreprise britannique à acheter cent millions de dollars dans un an à un taux de change fixé. Le montant de sous-jacent de la transaction est de cent millions de dollars, alors que la valeur du contrat peut n'être que de un million de dollars à un instant donné. La BRI estime que la valeur totale des contrats sur le marché de gré à gré est de l'ordre de 6 400 milliards de dollars[1].

1. Un contrat qui vaut 1 million pour une des parties et –1 million pour l'autre est compté pour un million.



Graphique 1.1 : Tailles respectives des marchés organisés et de gré à gré.

1.3 Les contrats forward

Un contrat forward est un actif dérivé très simple. C'est un engagement ferme à acheter ou à vendre un actif (appelé sous-jacent) à une date future donnée pour un prix convenu. Il se distingue d'un contrat au comptant (spot) dans lequel la transaction est réalisée immédiatement. Un contrat forward est échangé sur un marché OTC, le plus souvent entre deux établissements financiers ou entre un établissement financier et un client. La partie qui s'engage à acheter l'actif prend une position dite *longue*, alors que celle qui s'engage à le vendre prend une position dite *courte*. Les contrats forward sont très prisés sur le marché des changes. Les plus grandes banques ont souvent une équipe spécialisée sur ces contrats au sein de leur département de change.

Le tableau 1.1 donne un exemple de cotation de ces contrats sur le taux de change dollar américain (USD) – euro (EUR). La cotation donne le nombre d'USD par EUR. La première colonne indique l'horizon du contrat, c'est-à-dire le délai entre la prise de position et la réalisation de l'achat ou la vente de devises. La deuxième donne les taux de change auxquels la banque est prête à acheter les euros, et la troisième les taux de change auxquels elle est prête à vendre.

Tableau 1.1 : Taux de change spot et forward EUR – USD

	Bid	**Ask**
Spot	1,1531	1,1535
Forward 1 mois	1,1520	1,1525
Forward 3 mois	1,1498	1,1503
Forward 6 mois	1,1465	1,1471
Forward 1 an	1,1399	1,1405

Par exemple, pour une transaction spot (mise à disposition immédiate de l'actif), l'institution est prête à acheter 1 EUR en payant 1,1531 USD, ou prête à vendre immédiatement 1 EUR contre paiement de 1,1535 USD. Pour une transaction forward à 6 mois, la banque serait prête à acheter l'euro 1,1465 USD, etc. Ces cotations sont valides pour des transactions de montants très élevés. Tout particulier ayant voyagé sait qu'au guichet des banques l'écart entre le prix d'achat et le prix de vente est beaucoup plus important.

Les contrats forward peuvent être utilisés pour couvrir le risque de change. Supposons que le trésorier d'une entreprise américaine sache que, dans six mois, il devra décaisser un million d'euros et qu'il souhaite se protéger contre les variations du taux de change. À l'aide des cotations du tableau 1.1, il peut s'engager à acheter de l'euro dans six mois au taux de 1,1471 USD/EUR. L'entreprise a alors une position longue sur un forward à 6 mois au taux de 1,1471. Elle s'est donc engagée auprès de la banque qui cote ces taux de change à payer 1,1471 million d'USD pour recevoir un million d'EUR. Symétriquement, la banque a une position courte sur un forward 6 mois l'engageant à livrer un million d'EUR et elle recevra en contrepartie 1,1471 million d'USD.

Les flux des contrats forward

Considérons la position prise par l'entreprise dans la transaction précédente. Le contrat oblige l'entreprise à acheter un million d'euros dans six mois pour 1,1471 million d'USD. Si le taux de change monte, par exemple à 1,16 à la fin des six mois, la valeur du contrat forward sera 12 900 USD = 1 160 000 USD - 1 147 100 USD. De la même façon, si le taux de change passe à 1,14, le contrat forward a une valeur négative pour l'entreprise égale à –7 100 USD, puisqu'en achetant un million d'euros, elle paiera 1 147 100 USD alors que, sur le marché au comptant, elle aurait payé 1 140 000 USD.

De manière générale, le flux (on dit aussi payoff) engendré par une position longue sur un forward s'écrit

$$S_T - K$$

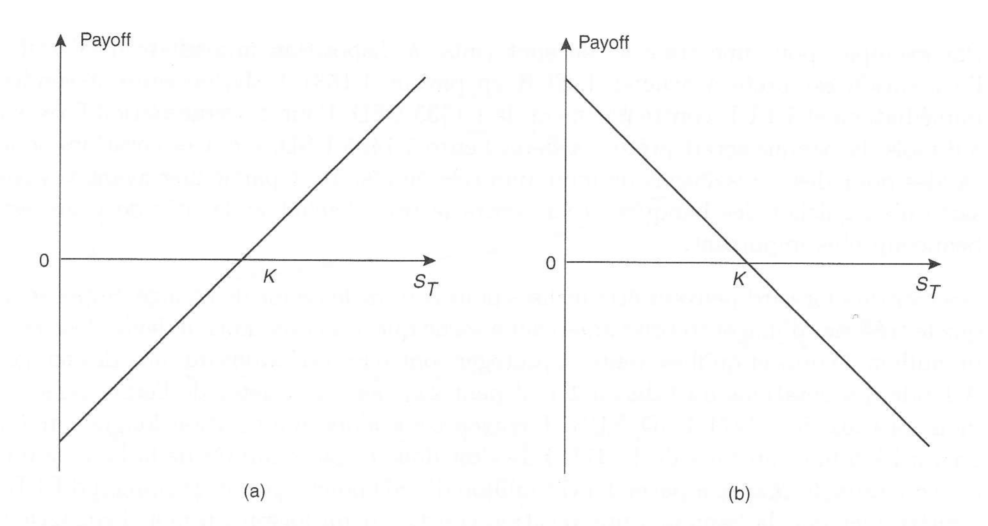
où Kest le prix de livraison de l'actif sous-jacent et S_T le prix spot de cet actif à la date T, échéance du contrat. De la même façon, le payoff d'une position courte sur un forward s'écrit

$$K - S_T$$

Dans les deux situations, les payoffs peuvent être positifs ou négatifs. Ils sont illustrés dans le graphique 1.2. Comme un contrat forward n'engendre pas de flux initial, le payoff terminal représente aussi le gain ou la perte du trader sur le contrat.

Prix forward et prix spot

La relation entre prix spot et prix forward sera examinée plus en détail au chapitre 5. Dans cette section, nous montrons simplement pourquoi ces deux prix sont liés, en considérant l'exemple d'une action qui ne paye pas de dividende et cote 60 €. Vous pouvez emprunter à 5 % pour un an. Quel doit être le prix forward de cette action ?



Graphique 1.2 : Payoffs d'un contrat forward : (a) position longue, (b) position courte. Prix de livraison K, prix de l'actif à l'échéance du contrat S_T.

La réponse est simple : 60 € capitalisés sur un an au taux de 5 %, c'est-à-dire 63 €. Si le prix forward était plus élevé, par exemple 67 €, il vous suffirait d'emprunter 60 €, d'acheter une action et de la revendre par l'intermédiaire d'un contrat forward au prix de 67 € dans un an. Après le remboursement de l'emprunt, le profit serait de 4 €, sans aucun risque ! Symétriquement, si le prix forward était de 58 €, il suffirait de vendre l'action à découvert, de placer pendant un an les 60 € ainsi obtenus, de racheter l'action à 58 € par l'intermédiaire du contrat forward et de récupérer le fruit du placement, soit 63 €. Le profit serait cette fois de 5 €.

1.4 Les contrats futures

Un contrat futures est, comme un contrat forward, un accord entre deux parties pour acheter ou vendre un actif donné à une date future pour un prix convenu. Contrairement aux contrats forward, les contrats futures sont négociés sur des marchés organisés. Les autorités de marché définissent des contrats standardisés pour assurer la liquidité. Comme, dans ce cas, les deux parties prenantes d'un contrat ne se connaissent pas, il existe un mécanisme qui permet d'assurer à l'acheteur et au vendeur la bonne fin des opérations.

Les marchés de contrats futures les plus importants sont, aux États-Unis, le Chicago Board of Trade (CBOT) et le Chicago Mercantile Exchange (CME), et en Europe le LIFFE et l'Eurex. Sur ces marchés et sur bien d'autres à travers le monde, une très large palette de contrats est proposée, contrats portant sur des matières premières ou des actifs financiers. Les matières premières vont de l'or aux carcasses de porc en passant par le sucre, le cuivre ou la laine. Les actifs financiers peuvent être des indices d'actions, des devises, des obligations du Trésor, etc.

Une première différence entre un forward et un futures est que ce dernier ne spécifie pas toujours une date de livraison précise, mais une période de livraison. Une des spécifications d'un contrat futures est le mois de livraison, et les autorités de marché (en France, l'entreprise de marché) définissent la période de livraison autorisée dans ce mois. Pour les matières premières, la livraison est souvent autorisée pendant le mois entier. C'est le détenteur de la position courte (le vendeur) qui choisit la date à laquelle il va livrer.

Les autorités de marché spécifient aussi la quantité de sous-jacent par contrat et la façon dont le prix futures sera coté. Il peut aussi être nécessaire, pour les matières premières en particulier, de préciser la qualité et le lieu de livraison.

Des détails sur le système d'appels de marge, les procédures de compensation quotidienne et le rôle de la chambre de compensation sont donnés au chapitre 2.

1.5 Les options

Les options sont échangées sur le marché OTC et sur des marchés organisés. Il en existe de deux types. Une option d'achat (appelée *call* par la suite) donne le droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée et à un prix convenu . Une option de vente (*put*) donne le droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future et à un prix convenu. Ce prix est appelé prix d'exercice (*strike price*) ; la date maximale à laquelle le droit peut être exercé est la date d'échéance. Si l'exercice peut survenir à tout moment jusqu'à la date d'échéance, l'option est dite américaine. Par contre, si l'option ne peut être exercée qu'à la date d'échéance, elle est dite européenne[2]. La plupart des options négociées sur les marchés organisés sont de type américain. Le plus souvent, si le sous-jacent est une action, un contrat d'option donne le droit d'acheter ou de vendre 100 actions sur les marchés américains et 10 actions sur le MONEP. Toutefois, cette quotité peut varier selon le prix du sous-jacent. Les options européennes sont plus faciles à analyser et, dans un certain nombre de cas, les propriétés des options américaines sont déduites de celles des options européennes.

Un point essentiel est que l'achat d'une option donne le droit (mais pas l'obligation) de faire quelque chose. C'est la différence fondamentale avec les contrats forward ou futures pour lesquels les contreparties sont obligées d'acheter ou de vendre. Cette particularité implique qu'acheter un contrat d'option a un coût initial, ce qui n'est pas le cas pour un forward ou un futures.

Aux États-Unis, les marchés organisés les plus importants sont le Chicago Board Options Exchange (www.cboe.com), le Philadelphia Stock Exchange (www.phlx.com), l'American Stock Exchange (www.amex.com) et le Pacific Exchange (www.pacifex.com). Plus de 1 000 actions sont supports de contrats d'options sur ces marchés. Un contrat

2. Il n'y a aucun lien entre ces appellations et les lieux de cotation. Des options européennes sont cotées sur les marchés américains et des options américaines sur les marchés européens.

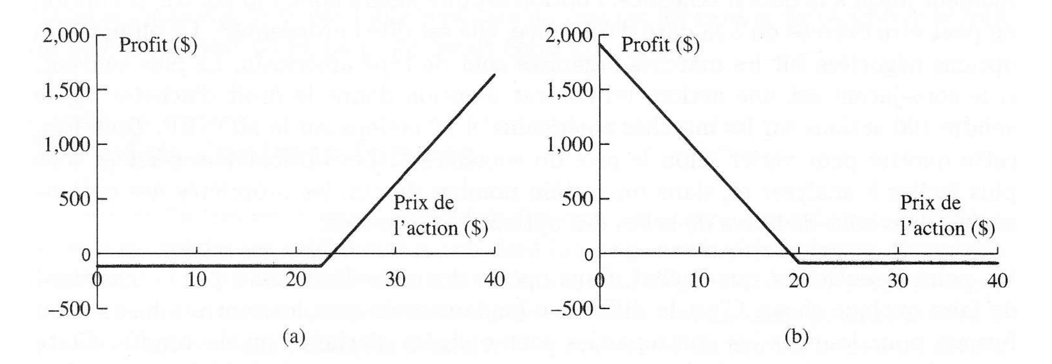
donne le droit d'acheter ou de vendre 100 actions au prix d'exercice spécifié. Cette quotité semble raisonnable car les actions s'échangent le plus souvent par multiples de 100. En France, les options sur actions sont cotées sur le MONEP, Marché des Options Négociables de Paris (www.monep.fr). La quantité de titres sous-jacents par contrat dépend du prix de ce sous-jacent. En effet, si l'action support cote 0,5 €, les contrats d'options porteront sur un nombre plus élevé de titres supports que si l'action cotait 150 €.

Le tableau 1.2 donne un exemple de prix de clôture d'options sur une action XYZ le 29 mai 2007.

Tableau 1.2 : Prix de clôture des options sur XYZ le 29 mai 2007

Prix d'exercice ($)	Calls			Puts		
	Juin	Juillet	Octobre	Juin	Juillet	Octobre
20,00	1,25	1,60	2,40	0,45	0,85	1,50
22,50	0,20	0,45	1,15	1,85	2,20	2,85

Comme il existe deux types d'options (calls et puts) et que chaque transaction fait intervenir un acheteur et un vendeur, il y a quatre positions possibles. Le graphique 1.3 représente les gains (pertes) des acheteurs de calls (a) et de puts (b) en fonction du prix du support. Le prix d'exercice du call est égal à 22,5 $ et celui du put à 20 $.



Graphique 1.3 : Profit net pour (a) l'achat d'un call sur 100 actions XYZ avec un prix d'exercice de 22,5 $ et une échéance octobre et (b) l'achat d'un put sur 100 actions XYZ avec un prix d'exercice de 20,00 et une échéance juillet.

Les quatre positions possibles sont les suivantes :

1. L'achat de call.
2. L'achat de put.
3. La vente de call.
4. La vente de put.

On emploie, comme pour les contrats forward et futures, les expressions *position longue* pour les acheteurs et *position courte* pour les vendeurs.

1.6 Les intervenants

Le succès considérable des marchés d'options trouve son origine dans la capacité de ces derniers à attirer diverses catégories d'investisseurs. La liquidité, conséquence de ce succès, permet à tout investisseur souhaitant prendre une position en options de trouver une contrepartie.

Nous distinguerons trois catégories d'intervenants : les opérateurs en couverture, encore appelés *hedgers*, les spéculateurs et les arbitragistes. Les hedgers utilisent les contrats forward, les futures ou les options pour réduire leur exposition au risque de variation de la valeur des actifs sous-jacents à ces contrats. Les spéculateurs, quant à eux, prennent des positions qui sont des paris sur l'évolution future de ces sous-jacents. Les arbitragistes cherchent à profiter, en prenant position sur plusieurs contrats ou actifs, des incohérences momentanées dans les cotations. Les prochaines sections examinent les activités de ces trois catégories d'intervenants. L'encadré 1.1 illustre le fait que les hedge funds sont devenus des acteurs essentiels des marchés d'actifs dérivés.

Encadré 1.1 Les hedge funds

Les hedge funds figurent aujourd'hui parmi les plus gros consommateurs d'actifs dérivés. Ils les utilisent aussi bien pour la couverture que pour la spéculation ou l'arbitrage. Contrairement aux fonds mutuels, ils sont peu réglementés et disposent d'importantes marges de manœuvre dans l'utilisation de ces produits. Les commissions exigées par les managers de ces fonds dépendent de la performance du fonds mais peuvent atteindre 1 % à 2 % du montant investi, auxquels s'ajoutent 20 % des profits réalisés. En 2004 il y avait environ 1 000 milliards de dollars investis dans les hedge funds. Des « fonds de fonds » ont même été créés pour construire des portefeuilles constitués de parts de différents hedge funds.

Les stratégies suivies par les hedge funds requièrent le plus souvent l'utilisation d'actifs dérivés pour construire une position de spéculation ou d'arbitrage. Une fois le type de stratégie défini, le gérant du fonds doit :

1. Évaluer les risques auxquels expose la stratégie envisagée.

2. Définir les risques qui sont acceptables et ceux qui doivent être couverts.

3. Construire les stratégies de couverture des risques inacceptables.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de stratégies, avec leur dénomination anglaise (employée sur tous les marchés).

Convertible arbitrage : achat d'obligations convertibles et vente à découvert de l'action sous-jacente. La position sur l'action est gérée de manière dynamique en fonction de l'évolution du cours.

Distressed securities : achat de titres d'entreprises sous le coup d'une procédure de faillite ou proches de cette situation.

Emerging markets : investissement dans la dette et les actions d'entreprises de pays émergents et/ou investissement dans la dette souveraine de ces pays.

Growth fund : investissement dans les titres de croissance et couverture par la vente d'options.

Macro ou *global* : utilisation d'actifs dérivés pour spéculer sur l'évolution des taux d'intérêt et des taux de change.

Market neutral : acheter des actions jugées sous-évaluées et vendre des actions jugées surévaluées de façon à neutraliser l'exposition au risque de marché.

1.7 Les opérateurs en couverture

Illustrons tout d'abord la façon dont un hedger peut réduire son risque en prenant une position sur un forward ou une option.

Un exemple de couverture avec des contrats forward

L'entreprise Importco, basée aux États-Unis, prévoit un décaissement de 10 millions d'EUR dans trois mois pour des marchandises achetées en France. Les taux de change spot et forward cotés par une grande banque sont ceux du tableau 1.1. L'entreprise peut prendre une position longue sur un forward 3 mois au taux de 1,1503. Ce choix fixerait le prix à payer pour les marchandises à 11,503 millions d'USD. Notez que choisir de ne pas se couvrir peut donner un meilleur résultat ; si à la fin des trois mois, le taux de change spot est de 1,14, l'absence de couverture entraîne un décaissement de 11,4 millions, inférieur à 11,503 millions. À l'inverse, si le taux de change spot est passé à 1,17, les 10 millions d'EUR coûtent 11,7 millions d'USD et l'entreprise regrettera l'absence de couverture.

Considérons maintenant l'entreprise Exportco, qui exporte ses produits vers la France et doit recevoir 10 millions d'EUR dans trois mois. Elle peut couvrir son risque de change par une position courte sur le forward 3 mois avec un taux de change de 1,1498, fixant ainsi sa recette en USD à 11,498 millions. La situation d'Exportco est symétrique de celle d'Importco ; si l'euro s'apprécie contre le dollar américain, Exportco regrettera peut-être de s'être couverte, alors que si l'euro se déprécie, la

recette de la position couverte sera supérieure à celle qui est obtenue en l'absence de couverture.

Cet exemple illustre un point essentiel de la couverture. La recette et la dépense sont connues d'avance, mais *a posteriori* rien ne dit que la solution retenue se révélera la meilleure.

Un exemple de couverture avec des options

Les options peuvent aussi être utilisées pour se couvrir. Considérons un investisseur qui détient 1 000 titres Lafarge alors que l'action cote 73 €. L'investisseur craint qu'un ralentissement économique pénalise le cours. Il peut acheter 100 contrats de puts avec un prix d'exercice de 65 € sur le MONEP. Cela lui donne le droit de vendre 1 000 titres à 65 € par titre. Si l'option cote 2,5 €, chaque contrat coûte 25 €, soit un décaissement total de 2 500 €.

La stratégie coûte 2 500 € mais garantit que les titres pourront être revendus à un prix supérieur à 65 € pendant la durée de vie de l'option. Si le cours de Lafarge chute sous ce seuil, les options seront exercées de façon que la vente rapporte 65 000 €. Si l'on tient compte du coût de l'option, l'encaissement net est de 62 500 €. Si, par contre, le cours est supérieur à 65 €, l'option n'est pas exercée et expire sans valeur. Dans ce cas, la valeur des titres est supérieure à 65 000 € (ou 62 500 € si l'on tient compte du coût initial des options).

Une comparaison

Il y a donc une différence fondamentale entre une couverture par des contrats forward et une couverture par des options. Les forward sont conçus pour neutraliser le risque, en définissant un prix auquel le hedger achètera ou vendra. Les options, par contre, procurent une assurance. Elles offrent aux investisseurs un moyen de se protéger contre des mouvements défavorables des cours, tout en leur laissant la possibilité de profiter des mouvements favorables. La contrepartie de cet avantage est le coût d'achat de l'option.

1.8 Les spéculateurs

Considérons maintenant l'usage des futures et des options par les spéculateurs. Alors que les hedgers cherchent à éliminer le risque lié aux variations de prix du sous-jacent, les spéculateurs vont, au contraire, prendre position pour parier sur le sens d'évolution du marché.

Un exemple de spéculation avec des futures

Supposons qu'un spéculateur américain pense, en février, que la livre sterling (GBP) va se renforcer par rapport au dollar (USD) dans les deux mois à venir, alors que le taux de change actuel est de 1,6470 USD/GBP. Il est prêt à miser l'équivalent de 250 000 GBP sur cette anticipation. La stratégie la plus simple serait d'acheter 250 000 GBP au cours de change d'aujourd'hui et d'attendre l'appréciation de la devise britannique. La livre, une fois achetée, pourrait être placée au taux sans risque britannique. La seconde solution consiste à prendre une position longue sur quatre contrats cotés au CME, permettant d'acheter fin avril 250 000 GBP (chaque contrat porte sur 62 500 GBP). Le prix futures est 1,6410. Si, fin avril, le taux de change est passé à 1,7000, le contrat à terme engendre un profit égal à (1,7000 – 1,6410) × 250 000 = 14 750 USD. La solution consistant à acheter la devise immédiatement aurait conduit à un profit égal à (1,7000 – 1,6470) × 250 000 = 13 250 USD. Si, par contre, le spéculateur s'est trompé et que le taux de change chute à 1,6000, la perte est (1,6000 – 1,6410) × 250 000 = –10 250 USD, alors qu'elle aurait été (1,6000 – 1,6470) × 250 000 = – 11 750 USD sur l'opération au comptant. Il apparaît que les deux opérations engendrent des profits et pertes différents, à l'avantage de l'opération sur les contrats futures. Nous verrons au chapitre 5 que, si l'on tient compte de l'intérêt payé en USD et reçu en GBP dans l'opération au comptant, les profits et pertes sont identiques dans les deux situations.

Quelle est alors la différence entre les deux opérations ? La première nécessite une mise initiale de 411 750 USD (250 000 GBP au taux de change initial) alors que, comme nous le verrons au chapitre 2, la seconde opération n'implique qu'une faible mise initiale, de l'ordre de 25 000 USD, qui doit être déposée par le spéculateur sur un compte de deposit (ou compte de marge). Le marché des futures autorise donc à bénéficier d'un effet de levier. Avec une mise modique, l'investisseur peut prendre une position spéculative importante.

Un exemple de spéculation avec des options

Considérons maintenant le cas d'une spéculation sur les options. En octobre, un spéculateur pense que le cours de France Télécom est susceptible d'augmenter dans les deux mois. Le prix actuel est de 20 € et un call de prix d'exercice 25 € est actuellement coté 1 € pour l'échéance décembre. Le tableau 1.3 illustre deux possibilités de spéculation, en supposant que l'investisseur est prêt à engager 4 000 €. La première consiste à acheter 200 actions, la seconde à acheter 4 000 options.

Si l'anticipation est correcte et si le cours de France Télécom passe à 35 €, la première opération engendre un profit de (35 – 20) × 200 = 3 000 €. La seconde est beaucoup plus profitable puisque l'option, à l'échéance du contrat, vaut (35 – 25) = 10 €. L'investisseur reçoit donc 40 000 €, desquels il faut déduire l'investissement initial, soit 4 000 € ; le profit net est donc 36 000 €, soit douze fois plus qu'avec la première stratégie.

Les options entraînent aussi une perte plus élevée si l'anticipation ne se vérifie pas. En effet, si France Télécom vaut 15 € fin décembre, les options ont une valeur nulle et la

Tableau 1.3 : Comparaison des profits des deux stratégies, en investissant 4 000 € en octobre

	Prix de l'action fin décembre	
Stratégie	**15 €**	**35 €**
Achat des actions	–1 000 €	3 000 €
Achat des calls	–4 000 €	36 000 €

perte est de 4 000 €, soit la totalité de l'investissement initial. La première stratégie entraîne, quant à elle, une perte de $(15 - 20) \times 200 = -1\,000$ €. Le tableau 1.3 montre en fait que les options, comme les contrats futures, ont un effet de levier important.

Une comparaison

Options et contrats futures se ressemblent car ils engendrent tous deux un effet de levier important. Il existe cependant une différence essentielle entre les deux. Quand un spéculateur utilise les contrats futures, pertes et gains potentiels sont très importants. Quand il a recours à l'achat d'options, la perte est limitée au montant payé pour acquérir ces options.

1.9 Les arbitragistes

La troisième catégorie d'opérateurs sur ces marchés est celle des arbitragistes. Leur objectif est d'assurer un profit en prenant simultanément position soit sur plusieurs actifs dérivés différents, soit sur un actif dérivé et son sous-jacent. Il s'agit, pour eux, de profiter d'éventuelles incohérences temporaires de prix entre différents titres ou contrats. Dans les chapitres suivants, nous verrons plus en détail comment fonctionnent ces stratégies, mais pour le moment, nous allons illustrer cette démarche par un exemple simple.

Une action est simultanément cotée sur Euronext-Paris (www.euronext.fr) et sur le New York Stock Exchange (www.nyse.com). Le titre vaut 155 € à Paris et 150 $ à New York, alors que le taux de change est de 1,0000 USD/EUR. Un arbitragiste peut simultanément acheter 100 unités du titre à New York et vendre la même quantité à Paris. Il obtient ainsi un profit immédiat égal à :

$$100 \times (155 - 150 \times 1{,}0000 \text{ EUR/USD}) = 500 \text{ €}$$

en dehors des coûts de transaction. Pour un investisseur individuel, les coûts de transaction rendraient ce type d'opération inintéressant, mais pour les grandes institutions financières supportant des coûts très faibles sur les marchés d'actions et de change, ce genre d'opportunités, quand elles se présentent, est évidemment très attractif. Notre

exemple a une simple vertu pédagogique ; les opportunités d'arbitrage sur les marchés réels sont en général moins flagrantes !

Il est clair que ce type d'opportunités ne peut survivre très longtemps, du fait même de l'existence d'arbitragistes. La demande excédentaire du titre à New York va faire monter le prix sur le NYSE, et l'offre excédentaire à Paris va faire chuter le prix sur Euronext. Très rapidement, les prix vont redevenir équivalents, compte tenu du taux de change en vigueur.

De manière générale, même si cela paraît paradoxal, l'existence d'arbitragistes implique que les opportunités d'arbitrage sont rares, mais surtout éphémères. Par conséquent, dans ce livre, la plupart des raisonnements sur les prix futures, forward ou sur les prix d'options font l'hypothèse de l'absence d'opportunités d'arbitrage.

1.10 Les dangers

Les actifs dérivés peuvent conduire à des résultats spectaculaires. Comme nous l'avons mentionné, ils peuvent être utilisés pour la couverture, la spéculation ou l'arbitrage. Certains traders qui sont normalement des arbitragistes peuvent devenir (consciemment ou non) des spéculateurs. Le résultat peut se révéler désastreux. L'exemple de Nick Leeson, employé de la banque Barings, en est une illustration emblématique (voir encadré 1.2)[3].

Encadré 1.2 Le désastre de la banque Barings

Les actifs dérivés sont des titres qui peuvent se révéler dangereux. Un des risques auxquels fait face une entreprise ou une institution financière est lié à la possible utilisation de ces actifs par un employé pour spéculer alors qu'il est censé opérer comme arbitragiste. Nick Leeson, trader employé par la banque Barings à Singapour en 1995, était mandaté pour réaliser des arbitrages entre les bourses de Singapour et d'Osaka sur le contrat futures portant sur l'indice Nikkei 225.

Petit à petit, ce trader se transforma en spéculateur sans que personne à la Barings se rende compte du changement de « philosophie » de ses interventions. Il réussit à cacher ses premières pertes et commença à prendre des positions de plus en plus importantes pour essayer de se refaire, mais cela ne fit qu'aggraver la situation.

Quand le problème fut découvert, les pertes atteignaient un milliard de dollars. La banque, qui pourtant avait 200 ans d'existence, fut mise en faillite. Une des leçons de cette histoire est la nécessité de définir précisément les limites des risques que peuvent prendre les traders et de s'appuyer sur une structure de contrôle qui permette de vérifier que ces limites sont respectées.

3. Le film *Trader* est une version remaniée mais intéressante de la faillite de la Barings.

Résumé

La croissance des marchés de produits dérivés a constitué un des faits marquants du monde financier des trente dernières années. Dans de nombreux cas, hedgers et spéculateurs préfèrent intervenir sur les dérivés plutôt que sur les sous-jacents. Certains actifs dérivés sont échangés sur des marchés organisés alors que d'autres le sont de gré à gré par des institutions financières et leurs clients, ou encore ajoutés à des émissions d'actions ou d'obligations.

Une grande partie de ce livre est consacrée à l'évaluation de ces produits. Il s'agit, en particulier, de présenter une approche unifiée et une méthodologie générale qui permettent d'évaluer tous les actifs dérivés, pas seulement les futures et les options.

Dans ce chapitre, nous avons jeté un premier regard sur les contrats forward, futures et sur les options. Un contrat forward ou futures est un engagement à acheter ou vendre une quantité donnée de sous-jacent à une date future spécifiée pour un prix donné. Une option donne le droit, mais pas l'obligation, d'acheter ou de vendre un sous-jacent. Un call (put) est le droit d'acheter (de vendre) une quantité donnée d'un actif sous-jacent à une date future spécifiée, pour un prix convenu. Les trois catégories, forward, futures et options, portent sur une grande variété de supports.

Trois grands types d'intervenants peuvent être identifiés, les hedgers ou opérateurs en couverture, les spéculateurs, et enfin les arbitragistes. Les hedgers supportent un risque lié à l'actif sous-jacent ; ils utilisent alors les marchés dérivés pour transférer ce risque à d'autres opérateurs. Les spéculateurs souhaitent parier sur l'évolution du sous-jacent et tentent de profiter de l'effet de levier fourni par les actifs dérivés. Les arbitragistes cherchent, quant à eux, à profiter des incohérences des prix relatifs de plusieurs actifs.

Références complémentaires

CHANCELLOR E., *Devil Take the Hindmost – A History of Financial Speculation*, New York, Farra Straus Giroux, 1999.

MERTON R. C., « Finance Theory and Future Trends : The Shift to Integration », *Risk*, 12, 7 (juillet 1999), 48-51.

MILLER M. H., « Financial Innovation : Achievements and Prospects », *Journal of Applied Corporate Finance*, 4 (hiver 1992), 4-11.

RAWNSLEY J. H., *Total Risk : Nick Leeson and the Fall of Barings Bank*, New York, Harper Collins, 1995.

ZHANG P. G., *Barings Bankruptcy and Financial Derivatives*, Singapore, World Scientific, 1995.

Problèmes et exercices

1.1 Quelle est la différence entre une position longue et une position courte sur un forward ?

1.2 Expliquez précisément la différence entre hedgers, spéculateurs et arbitragistes.

1.3 Quelle est la différence entre (a) prendre une position longue sur un forward avec un prix forward de 50 € et (b) acheter un call de prix d'exercice 50 € ?

1.4 Expliquez la différence entre une vente de call et un achat de put.

1.5 Un trader prend une position courte sur un forward de 100 millions de yens. Le taux de change forward est de 0,0080 € par yen. Combien gagne ou perd le trader si le taux de change à la fin du contrat est (a) 0,0074 € ou (b) 0,0091 € par yen ?

1.6 Un trader prend une position courte sur un contrat futures sur le coton avec un prix futures de 50 cts la livre. La quantité sous-jacente au contrat est de 50 000 livres. Combien gagne ou perd le trader si le prix du coton à la fin du contrat est (a) 48,20 cts ou (b) 51,30 cts par livre ?

1.7 Vous vendez un put sur France Télécom au prix d'exercice 25 € avec une durée de vie de trois mois. France Télécom cote aujourd'hui 22 € et le contrat porte sur 10 titres. À quoi vous êtes-vous engagé ? Combien pouvez-vous gagner ou perdre ?

1.8 Vous souhaiteriez spéculer sur la hausse d'une certaine action. Son prix est aujourd'hui de 29 € et un call à trois mois de prix d'exercice 30 € cote aujourd'hui 2,9 €. Vous avez 5 800 € à investir. Définissez deux stratégies conformes à vos anticipations, la première sur l'action, la seconde sur l'option. Quels sont vos gains (pertes) potentiels sur chacune des deux stratégies ?

1.9 Vous avez en portefeuille 5 000 actions cotant 25 € chacune. Comment l'achat de puts peut-il vous procurer une assurance contre la baisse des cours dans les quatre mois qui viennent ?

1.10 Un trader achète un put européen sur action pour 3 €. Le prix de l'action est 42 € et le prix d'exercice 40 €. Dans quelles circonstances le trader fera-t-il un profit, et dans quels cas l'option sera-t-elle exercée ? Construisez le graphe des profits à l'échéance du contrat en fonction du prix du support.

1.11 Un investisseur vend un call européen sur action pour 4 €. Le prix de l'action est 47 € et le prix d'exercice 50 €. Dans quelles circonstances le trader fera-t-il un profit, et dans quels cas l'option sera-t-elle exercée ? Construisez le graphe des profits à l'échéance du contrat en fonction du prix du support.

1.12 Un investisseur achète pour 3 € un call européen de prix d'exercice 45 € et, pour 4 €, un put européen de prix d'exercice 40 €. Les deux options ont la même maturité. Construisez le graphe des profits à l'échéance en fonction du prix du support.

1.13 L'émission d'actions apporte des fonds à l'entreprise émettrice. En est-il de même pour une option sur action ? Justifiez votre réponse.

1.14 Expliquez pourquoi un contrat forward peut être utilisé pour spéculer ou pour se couvrir.

1.15 Un call, échéance mars et prix d'exercice 50 €, cote 2,5 €. Il est détenu jusqu'à l'échéance. Dans quelles circonstances le détenteur fera-t-il un profit et dans quels cas l'option sera-t-elle exercée ? Construisez le graphe des profits à l'échéance du contrat en fonction du prix du support.

1.16 Un put, échéance juin et prix d'exercice 60 €, cote 4 €. Dans quelles circonstances le vendeur de cette option fera-t-il un profit à l'échéance et dans quels cas l'option sera-t-elle exercée ? Construisez le graphe des profits du vendeur du put à l'échéance du contrat en fonction du prix du support.

1.17 Un call, échéance septembre, de prix d'exercice 20 € est vendu par un investisseur. Nous sommes en mai, le prix du support est de 18 € et le call cote 2 €. Décrivez les flux de fonds de l'investisseur s'il conserve le call jusqu'à l'échéance et si le cours de l'action est de 25 € à cette date.

1.18 Un investisseur vend 4 € un put, échéance décembre, de prix d'exercice 30 €. Dans quelles circonstances réalise-t-il un gain ?

1.19 Une entreprise sait qu'elle recevra un certain montant de devise étrangère dans quatre mois. Quel type d'option est approprié pour couvrir le risque de change ?

1.20 Une entreprise française s'attend à recevoir un million de dollars dans six mois. Expliquez comment elle peut couvrir le risque de change avec (a) un contrat forward et (b) une option.

1.21 « Options et contrats futures sont des jeux à somme nulle. » Qu'entend-on par cette affirmation ?

1.22 Décrivez le profit engendré par le portefeuille suivant : une position longue sur un contrat forward et sur un put européen, les deux portant sur le même sous-jacent et ayant même maturité. Le prix d'exercice du put est égal au prix forward du contrat au moment où le portefeuille est constitué.

1.23 Dans les années 1980, la Bankers Trust a développé un produit appelé ICON (*Index Currency Option Note*). Il s'agit d'obligations pour lesquelles le souscripteur reçoit à l'échéance un montant dépendant d'un taux de change. Considérons par exemple le cas d'un contrat passé avec la Long Term Credit Bank of Japan. Le contrat stipulait que si le taux de change USD/JPY était supérieur à 169 JPY par USD, le souscripteur recevait 1 000 USD. Si le taux de change était inférieur à ce seuil, le paiement final était défini (en USD) par :

$$1000 - \max\left[0; 1000\left(\frac{169}{S_T} - 1\right)\right]$$

où S_T désigne le taux de change à la date de maturité T. Lorsque ce taux descend en deçà de 84,5 JPY par USD, le souscripteur ne reçoit rien. Montrez que cette obligation est la combinaison d'une obligation classique et de deux options.

1.24 Le 1er juillet 2004, une entreprise prend une position longue sur un forward pour acheter 10 millions de JPY le 1er janvier 2005. Le 1er septembre 2004,

elle prend une position courte sur le même type de contrat, c'est-à-dire pour vendre 10 millions de JPY au 1[er] janvier 2005. Décrivez les payoffs de cette stratégie.

1.25 Supposez que les taux de change spot et forward (en USD/EUR) soient les suivants :

Spot	: 1,0000
Forward 90 jours	: 0,9982
Forward 180 jours	: 0,9960

Quelles sont les opportunités d'arbitrage dans les cas suivants :

a. Un call d'échéance 6 mois permettant d'acheter un EUR pour 0,97 USD cote 2 centimes.

b. Un put à 90 jours permettant de vendre un EUR à 1,04 USD cote 2 centimes.

Questions complémentaires

1.26 L'or cote 500 USD l'once et le prix forward pour livraison dans un an est de 700 USD l'once. Un arbitragiste peut emprunter à 10 % par an. Que doit-il faire ? Vous supposerez que le coût de stockage de l'or est nul et que l'or ne rapporte pas de revenus intermédiaires.

1.27 Une action cote aujourd'hui 94 € et les calls à 3 mois avec un prix d'exercice de 95 € valent 4,7 €. Un investisseur pense que le cours va monter dans les trois mois. Il décide d'acheter soit 100 actions, soit 2 000 options. Les deux imposent d'engager 9 400 €. Quels conseils lui donneriez-vous ? À partir de quel prix d'action la stratégie d'option devient-elle profitable ?

1.28 Une obligation émise par Standard Oil fonctionne de la manière suivante. Le souscripteur ne reçoit pas d'intérêt. Cependant, à la date d'échéance, l'émetteur lui promet de recevoir 1 000 $ auxquels s'ajoute un montant qui dépend du prix du pétrole à cette date. Ce montant est défini comme 170 fois la différence (si elle est positive) entre le prix du baril et 25 $. Le paiement maximum est limité à 2 250 $ (ce qui correspond à un prix du baril à $40). Montrez que cette obligation est la combinaison d'une obligation classique et de deux options ; une position longue sur un call (sur le baril de pétrole) de prix d'exercice 25 $ et une position courte sur un call de même support, de prix d'exercice $40.

1.29 Un investisseur achète un call européen et vend un put européen, les deux options ayant les mêmes caractéristiques (sous-jacent, durée de vie, prix d'exercice). Décrivez sa position. Dans quels cas le prix du call est-il égal au prix du put ?

Chapitre 2

Le fonctionnement des marchés de futures

Au chapitre 1, nous avons vu que les forward et les futures sont des engagements à acheter ou vendre un actif à une date future donnée, pour un prix convenu. Les contrats futures sont négociés sur des marchés organisés et leurs caractéristiques sont standardisées. À l'inverse, les contrats forward sont des accords bilatéraux entre deux institutions financières ou entre une institution et une entreprise.

Ce chapitre décrit plus en détail le fonctionnement des marchés de futures. Nous précisons la définition des contrats, le fonctionnement des appels de marge, l'organisation des transactions, les cotations, et nous énonçons quelques principes concernant le traitement comptable et fiscal des opérations sur ces marchés. Nous comparons aussi les séquences de flux engendrées par les contrats forward et futures.

2.1 Rappels

Les contrats futures sont aujourd'hui échangés sur de nombreux marchés à travers le monde. Les deux marchés les plus importants aux États-Unis sont le Chicago Board of Trade (CBOT, www.cbot.com) et le Chicago Mercantile Exchange (CME, www.cme.com). En Europe, les deux plus grands marchés sont le London International Financial Futures and Options Exchange (www.liffe.com) racheté en 2001 par Euronext et Eurex (www.eurexchange.com), résultat de l'association des Bourses allemande et suisse. Les autres marchés importants sont le Bolsa de Mercadorias y Futuros de São Paulo (www.bmf.com.br), le Tokyo International Financial Futures Exchange (www.tiffe.or.jp), le Singapore International Monetary Exchange (www.simex.com.sg) et le Sydney Futures Exchange (www.sfe.com.au). Pour une liste plus complète, reportez-vous au tableau à la fin de cet ouvrage.

Nous allons concentrer notre attention sur un exemple, afin de décrire précisément comment opèrent ces marchés. Supposons que le 5 mars un investisseur localisé dans la ville V appelle son prestataire de services d'investissement, ou *broker*, pour lui demander d'acheter 5 000 boisseaux de maïs, livraison en juillet de la même année. Le broker transmet immédiatement cet ordre à un membre de marché ou trader sur le parquet du marché adéquat (le CBOT par exemple). Il s'agit donc de prendre une position longue sur un contrat de maïs portant sur 5 000 boisseaux. Au même moment, un autre investisseur, situé dans la ville W, passe l'ordre de vente d'un contrat du même type sur le même marché. Les deux ordres de sens opposé sont confrontés sur le marché et un prix d'équilibre, pour la livraison du maïs en juillet, résulte de la confrontation de l'offre et de la demande. L'investisseur de V a donc pris une position longue sur le contrat futures, et l'investisseur de W une position courte.

Le prix (coté le 5 mars) auquel les deux investisseurs conviennent d'échanger à l'échéance est appelé « prix futures ». Supposons que ce soit 170 cents le boisseau. Ce prix, comme n'importe quel autre, est déterminé par la confrontation de l'offre et de la demande. Si, à une date quelconque, il existe un plus grand nombre d'investisseurs souhaitant vendre en juillet plutôt qu'acheter à cette date, le prix futures baissera. Cela poussera de nouveaux acheteurs à acheter sur le marché, de sorte qu'un équilibre sera finalement trouvé entre acheteurs et vendeurs. Un raisonnement symétrique s'applique si le nombre d'acheteurs est plus important que le nombre de vendeurs à un moment donné.

Le dénouement d'une position

La grande majorité des contrats futures est dénouée avant la livraison du produit sous-jacent, car les traders préfèrent souvent fermer leur position sur le marché avant la date de livraison. Pour fermer une position, il suffit de prendre la position inverse sur le marché. Par exemple, l'investisseur V qui avait acheté un contrat le 5 mars peut vendre ce même contrat le 20 avril. L'investisseur W qui avait vendu un contrat peut en acheter un pour fermer sa position. Dans les deux cas, le gain ou la perte sont déterminés par la différence entre les prix futures aux deux dates (5 mars et 20 avril).

La livraison physique est très rare, si bien que certains traders en oublient les modalités (voir encadré 2.1). Néanmoins, nous détaillerons les modalités de livraison car c'est la possibilité de ce dénouement du contrat qui induit un lien entre le prix futures et le prix au comptant, ou prix spot[1].

1. Comme nous l'avons mentionné au chapitre 1, le prix spot correspond au prix associé à une livraison (presque) immédiate.

Encadré 2.1 La livraison non anticipée d'un contrat futures

Cette histoire a été racontée à l'auteur de ce livre par un manager d'institution financière. Elle concerne un jeune trader inexpérimenté. Un des clients de l'institution financière avait pris une position longue sur un contrat dont le sous-jacent était du bétail vivant. Lorsqu'il décida de déboucler la position, le jeune trader fut chargé de l'opération.

Il commit l'erreur de prendre une position longue au lieu d'une position courte pour dénouer l'opération initiale. Le résultat fut que l'institution se retrouva en position longue sur deux contrats à l'échéance. Le trader dut alors s'informer sur les conditions de livraison du bétail, ce qu'il n'avait jamais fait, ni même envisagé, auparavant. Le bétail pouvait être livré en différents endroits des États-Unis. Il ne pouvait qu'attendre la notice d'intention de livraison de l'investisseur contrepartie de la transaction. Il la reçut finalement et apprit que le bétail serait livré à plus de 3 000 kilomètres de là le mardi suivant. Il se rendit sur place et apprit qu'il y avait une vente aux enchères de bétail chaque mardi. La contrepartie acheta le bétail sur place pour le livrer immédiatement mais il fallait attendre le mardi suivant pour revendre à nouveau les animaux. Le jeune trader dut alors se préoccuper de loger et nourrir le bétail pendant une semaine. C'était ce qu'on appelle un bon début dans la carrière financière.

2.2 Les spécifications d'un contrat

Les autorités de marché doivent, quand elles mettent en œuvre un nouveau contrat, spécifier les obligations des deux parties (acheteur et vendeur). Cela suppose de préciser la taille du contrat (quantité d'actif sous-jacent échangée à l'échéance), le lieu et la période de livraison, etc. Dans certains cas, plusieurs qualités de produit peuvent être livrées, avec des ajustements de prix convenus à l'avance. Le choix du produit livré est alors du ressort de celui qui effectue la livraison, c'est-à-dire le vendeur du contrat. Celui-ci envoie aux autorités de marché une notice d'intention de livraison qui précise les éléments que nous venons d'évoquer (lieu de livraison, date précise, qualité).

L'actif sous-jacent

Quand il s'agit d'une matière première, la qualité peut être variable selon les disponibilités sur le marché physique. Par conséquent, les autorités spécifient dans les contrats les qualités acceptables pour la livraison.

Dans certains cas, un ajustement de prix est réalisé pour tenir compte des différences de qualité. Par exemple, sur le contrat de maïs du CBOT, la qualité standard est du maïs « jaune, n° 2 », mais certaines substitutions sont autorisées avec des variations de prix.

Lorsque le sous-jacent du contrat est un actif financier, ce problème ne se pose pas ou du moins pas de la même façon. En effet, s'il s'agit d'un contrat sur le yen japonais, point n'est besoin de spécifier le type de yen ! Par contre, lorsque le sous-jacent est une obligation, celle-ci est souvent « notionnelle », c'est-à-dire fictive, avec des caractéristiques bien précises (en termes de durée de vie, de taux de coupon, etc.).

Les obligations, bien réelles, livrables dans ce contrat, ne vérifient jamais exactement les conditions. Par conséquent, les autorités de marché donnent une liste d'obligations livrables, ayant par exemple une durée de vie résiduelle entre 8,5 et 10,5 ans au moment de la livraison. Dans ce cas, des correspondances sont établies entre les différents titres livrables pour ajuster les prix selon le titre choisi par le vendeur. Ce point est examiné au chapitre 6.

La taille du contrat

Elle précise la quantité d'actifs sous-jacents livrable pour un contrat. Le choix de la taille de contrat est une décision commerciale importante. Si la quantité à livrer est trop élevée, de nombreux investisseurs, qui supportent une faible exposition au risque, ne pourront se couvrir sur le marché, ou encore les « petits » spéculateurs ne pourront intervenir si la taille du contrat est trop conséquente. À l'inverse, si le contrat porte sur une quantité très faible, le coût d'intervention devient prohibitif dans la mesure où un coût fixe est supporté (indépendant de la taille du contrat).

Certains marchés comme le CME ont néanmoins introduit des « mini » contrats comme le Mini Nasdaq100 dont la taille est cinq fois inférieure à celle d'un contrat normal ; il s'agit ici d'attirer les « petits » investisseurs.

La livraison

Les autorités de marché spécifient le ou les lieux de livraison lorsque c'est nécessaire. Ce point est crucial pour les marchandises ou matières premières dont le coût de transport est élevé. Quand plusieurs lieux de livraison sont possibles, des variations de prix peuvent être imposées. Pour le contrat de maïs du CBOT, la livraison peut se faire à Chicago, Burns Harbor, Toledo ou Saint Louis, mais le prix par boisseau est inférieur de 4 cents quand la livraison a lieu dans les deux dernières villes.

Les mois de livraison

Un contrat futures est aussi identifié par son mois de livraison. La période du mois pendant laquelle la livraison est possible est prévue par le contrat, mais cette période peut être le mois entier. Les mois de livraison varient d'un contrat à l'autre ; ils sont fixés en fonction des besoins des opérateurs du marché. Un contrat sur devises peut proposer des échéances mars, juin, septembre, décembre, alors qu'un contrat

sur matières premières pourra être coté sur des échéances janvier, mars, mai, juillet, septembre et novembre.

Cependant, à toute date se négocient sur le marché l'échéance la plus proche et une ou plusieurs échéances ultérieures. Les règles de fonctionnement précisent aussi la date à laquelle une échéance commence à être cotée et la date à laquelle la cotation cesse. Cette dernière se situe en général quelques jours avant la fin de la période de livraison.

Les cotations

Le prix futures est, si possible, coté d'une manière qui soit facile à comprendre. Par exemple, le contrat futures sur le pétrole du New York Mercantile Exchange est coté en USD par baril, et les contrats sur indices sont cotés en points d'indice avec un équivalent monétaire par point d'indice. Les variations minimales (ticks) dépendent elles aussi de l'unité de cotation. Dans les exemples ci-dessus, la variation minimale est de 0,01 USD pour le pétrole et de 0,01 point pour l'indice, mais pour le contrat sur obligations du Trésor américain, coté en dollars et en 1/32 de dollar, 1/32 USD constitue la variation minimale. En Europe, les contrats futures sur obligations (comme le contrat FGBL sur le Bund, négocié sur l'Eurex) sont cotés, comme les obligations, en pourcentage du nominal avec deux chiffres après la virgule. Le tick correspond à 1 point de base ; le nominal du contrat étant de 100 000 €, la variation minimale est donc 10 €.

Les variations journalières maximales

Pour la plupart des contrats, des variations maximales journalières sont fixées par les autorités de marché. En principe les transactions cessent jusqu'au lendemain quand ces limites sont atteintes (*limit up* ou *limit down*), mais dans certains cas les autorités de marché peuvent décider de modifier la limite et de reprendre les cotations dans la même journée. L'existence de ces limites est justifiée par la volonté de freiner les mouvements de cours dus à une spéculation excessive. Mais ces freins peuvent aussi handicaper le fonctionnement du marché quand le prix du sous-jacent du contrat est très volatil. De ce fait, l'intérêt économique de l'existence de ces limites de variation est toujours une question controversée.

Les limites de positions sont les quantités maximales de contrats que peut détenir un spéculateur. Ici encore, il s'agit de limiter l'influence que peuvent avoir les spéculateurs sur le marché et d'éviter les manipulations. Les opérateurs en couverture (qui détiennent le sous-jacent) ne sont pas concernés par ces limites.

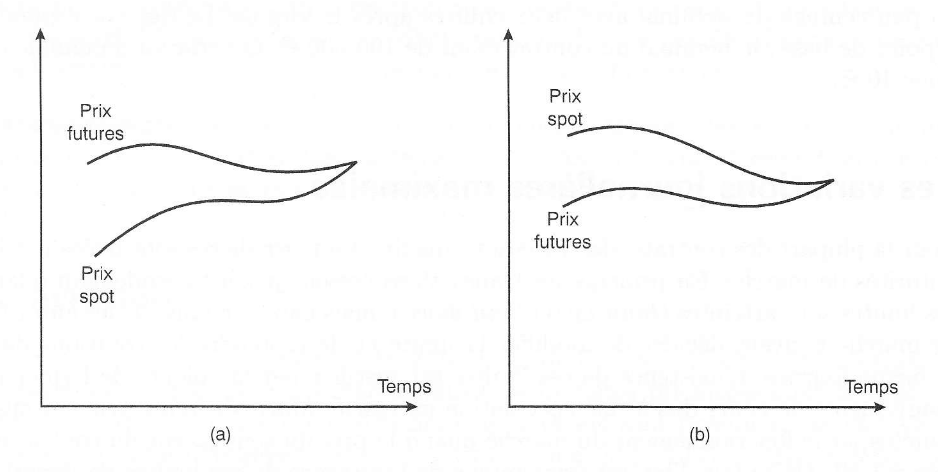
2.3 La convergence des prix futures vers les prix au comptant

À l'approche de l'échéance, le prix futures d'un contrat converge vers le prix de l'actif sous-jacent. Quand la période de livraison est atteinte, les deux prix sont égaux, ou du moins très proches.

Si ce n'était pas le cas, par exemple si le prix futures était supérieur au prix spot, un arbitragiste pourrait :

1. Prendre une position courte sur un contrat.
2. Acheter l'actif.
3. Livrer.

Il pourrait ainsi encaisser la différence entre le prix futures et le prix spot. Si une telle opportunité existait, elle serait exploitée, le prix futures chuterait, le prix spot monterait jusqu'à rétablir l'égalité. Le graphique 2.1 illustre cette convergence selon que le prix futures se situe au-dessus ou en dessous du prix spot. Au chapitre 5, nous verrons dans quelles circonstances chacune des deux situations 2.1a ou 2.1b prévaut.



Graphique 2.1 : Relation entre prix futures et prix spot à l'approche du mois de livraison. (a) Le prix futures est supérieur au prix spot ; (b) le prix futures est inférieur au prix spot.

2.4 La régulation du marché et les appels de marge

Lorsque deux investisseurs se mettent d'accord pour procéder à une transaction future, il existe des risques évidents. L'un des deux peut « regretter » et tenter de faire marche arrière. Plus simplement, il peut arriver qu'un des deux investisseurs n'ait pas les ressources financières nécessaires pour faire face à ses engagements au moment de l'échange. L'une des missions essentielles d'un marché organisé est d'organiser les

transactions de façon à éviter le risque de défaut au moment du dénouement des contrats. C'est à ce stade qu'entrent en jeu les appels de marge.

Le fonctionnement des appels de marge

Considérons un investisseur qui, le 5 juin, veut prendre une position longue sur deux contrats sur l'or, échéance décembre, cotés sur le New York Commodity Exchange (COMEX). Le prix futures est 400 USD l'once. Chaque contrat porte sur 100 onces, ce qui équivaut à un achat à terme de 200 onces d'or. L'investisseur doit déposer en garantie des fonds sur un compte de deposit. Cette garantie constitue la marge initiale qui est, pour l'exemple, de 2 000 USD par contrat. À la fin de chaque journée, le compte de l'investisseur est ajusté pour refléter ses gains ou pertes journaliers.

Supposons que, le 5 juin au soir, le prix futures soit 397 USD ; l'investisseur a perdu $3 \times 200 = 600$ USD. La marge déposée initialement est donc passée à 4 000 – 600 = 3 400 USD. Les 600 USD viennent augmenter le compte d'un investisseur qui avait pris une position courte sur deux contrats. L'acheteur des contrats fait alors l'objet d'un appel de marge ; en d'autres termes, il doit apporter des fonds pour reconstituer la marge initiale.

Dans certains cas, le montant requis sur le compte, après la prise de position, est inférieur à la marge initiale. L'investisseur ne fera l'objet d'un appel de marge que si son crédit descend au-dessous de ce niveau requis (appelé marge de maintenance ou marge à maintenir). Il doit alors reconstituer la marge initiale. Réciproquement, le vendeur, qui a réalisé un gain dans notre exemple, est autorisé à en disposer.

Ce mécanisme d'ajustement quotidien est appelé *marking to market*. Lorsque l'investisseur ne peut répondre à un appel de marge, sa position est soldée. Dans notre exemple, l'intermédiaire du client serait obligé de passer un ordre de vente de deux contrats. La marge initiale assure que cette opération peut être close dans de bonnes conditions.

Notez que ce marking to market n'est pas un arrangement entre un broker et son client. Quand le prix futures baisse, de sorte que le crédit du compte de marge d'un investisseur en position longue devient insuffisant, le broker doit payer au marché (en fait à la chambre de compensation décrite plus loin) le montant manquant. Ce montant est reversé au broker d'un investisseur en position courte qui bénéficie de la baisse du prix futures. Les fonds qui sont ainsi demandés ou restitués aux investisseurs pendant la durée de vie du contrat sont les variations de marge. Si un investisseur est incapable de fournir la variation de marge requise, sa position est soldée.

Le tableau 2.1 donne un exemple d'évolution du compte de deposit de notre exemple. Le crédit nécessaire en cours d'opération est fixé à 1 500 USD par contrat. On constate que le 13 juin, le niveau de la marge chute à 2 660, soit 340 USD de moins que la marge de maintenance (1 500 USD $\times$ 2). L'investisseur fait l'objet d'un appel de marge de 4 000 – 2 660 = 1 340 USD. L'investisseur dépose les fonds, ce qui explique les 4 060 USD du 16 juin, puisque ce jour le prix futures a augmenté de 30 cents ($0{,}3 \times 200 = 60$ USD) et que le crédit du compte avait été ramené à 4 000 USD. Le 19 juin, un

nouvel appel de marge de 1 260 USD est réalisé et la position est finalement close le 26 juin alors que le prix futures est à 392,30 USD. La perte s'élève à :

$$1\,540 \text{ USD} = 200\,(400 - 392{,}30) = -(5\,060 - 4\,000) + 1\,340 + 1\,260$$

Tableau 2.1 : Appels de marge sur une position longue sur deux contrats futures sur l'or. La marge initiale est de 2 000 USD par contrat et 1 500 USD ensuite. La position est prise le 5 juin à 400 USD et close le 26 juin à 392,30 USD. Les nombres de la seconde colonne, sauf le premier et le dernier, sont des prix futures de clôture. Toutes les sommes sont en USD.

Jour (de juin)	Prix futures	Gain du jour	Gain cumulé	Solde du compte de deposit	Appel de marge
	400,00			4 000	
5	397,00	(600)	(600)	3 400	
6	396,10	(180)	(780)	3 220	
9	398,20	420	(360)	3 640	
10	397,10	(220)	(580)	3 420	
11	396,70	(80)	(660)	3 340	
12	395,40	(260)	(920)	3 080	
13	393,30	(420)	(1 340)	2 660	1 340
16	393,60	60	(1 280)	4 060	
17	391,80	(360)	(1 640)	3 700	
18	392,70	180	(1 460)	3 880	
19	387,00	(1 140)	(2 600)	2 740	1 260
20	387,00	0	(2 600)	4 000	
23	388,10	220	(2 380)	4 220	
24	388,70	120	(2 260)	4 340	
25	391,00	460	(1 800)	4 800	
26	392,30	260	(1 540)	5 060	

Détails complémentaires

La plupart des brokers rémunèrent les montants déposés sur les comptes de deposit. Il n'y a donc pas de véritable coût lié à l'immobilisation des fonds, tant que le taux servi est comparable à ce qui pourrait être obtenu sur un placement sans risque. Le deposit (marge initiale) peut dans certains cas être constitué de titres. Les bons du Trésor sont en général acceptés et comptés pour 90 % de leur valeur. Les actions peuvent elles aussi être acceptées mais ne seront comptabilisées qu'à 50 % de leur valeur. Ces pourcentages peuvent toutefois varier d'un marché à l'autre.

Le *marking to market* est en quelque sorte une remise des compteurs à zéro chaque jour. C'est comme si on liquidait les contrats chaque jour pour reprendre position sur un nouveau contrat de valeur nulle.

Les deposits et les règles gouvernant les appels de marge sont fixés par les autorités de marché. Les intermédiaires peuvent majorer les deposits pour leurs clients mais en aucun cas les minorer. Ce deposit dépend de la volatilité des prix de l'actif sous-jacent, qui se répercute sur les prix futures. Lorsque les prix sont très volatils, le deposit est élevé ; en effet, le rôle économique de ce système est d'assurer la bonne fin des contrats. Il faut donc qu'à tout instant les fonds du compte de deposit permettent la liquidation de la position sans qu'il y ait défaut de l'investisseur.

Le niveau de marge requis dépend de ce fait de la nature de l'investisseur. Si une entreprise produit la marchandise sous-jacente à un contrat futures, le deposit requis sur une vente de contrat (opération de couverture) sera plus faible que pour un spéculateur. Le risque de défaut est en effet bien moins important. De même, sur une position de spread (achat d'un contrat de maturité T_1 et vente d'un contrat de maturité T_2), la marge nécessaire est plus faible du fait de la forte corrélation des variations de prix des deux contrats qui portent sur le même sous-jacent.

Il faut noter que positions longues et courtes sont traitées selon les mêmes règles, en termes de deposit et d'appels de marge. Contrairement au marché au comptant, où il est toujours plus difficile de vendre à découvert (ce point sera discuté au chapitre 5), il est aussi facile d'acheter un contrat futures que de le vendre.

La chambre de compensation

C'est l'existence de la chambre de compensation et le rôle qu'elle joue dans l'organisation des transactions qui permettent d'assurer la bonne fin des contrats sur un marché organisé.

La chambre de compensation (CC) comporte un certain nombre de membres (des institutions financières le plus souvent), et les intermédiaires non membres doivent, pour réaliser une transaction, passer par un membre de la CC. La CC enregistre et gère toutes les transactions, tient les comptes des membres et réalise les appels de marge auprès de ceux-ci.

Les membres répercutent ces appels de marge auprès de leurs clients, des brokers par exemple, qui eux-mêmes vont les répercuter sur leurs clients, entreprises ou investisseurs individuels. La CC peut calculer les appels de marge en brut ou en net. En brut, les positions longues et courtes sont ajoutées et le deposit est multiplié par le nombre total de contrats. Comme les variations d'une position longue sont exactement compensées par les variations d'une position courte d'un volume équivalent, la position nette est simplement la valeur absolue de la différence entre positions longues et positions courtes sur un contrat donné. La plupart des CC fonctionnent en net.

Le risque de crédit

Toute cette organisation est destinée à éviter le défaut des contreparties. Jusqu'à présent elle a très bien fonctionné puisqu'il n'y a pratiquement jamais eu de tels défauts. Les marchés de futures ont cependant subi un test important le 19 octobre 1987, quand l'indice américain S&P500 a chuté de 20 %. Les investisseurs en position longue sur les contrats futures ayant cet indice comme sous-jacent se retrouvèrent avec un niveau de marge négatif. Certains durent abandonner leurs positions sans satisfaire à leurs obligations et certains brokers connurent la faillite puisqu'ils n'étaient plus en mesure de répondre aux appels de marge. Cependant, tous ceux qui avaient une position courte ont fini par être payés.

Les systèmes de garantie sur les marchés OTC

Le risque de crédit a toujours été une caractéristique des marchés OTC. La probabilité n'est jamais nulle qu'une contrepartie d'un contrat fasse défaut. Il est intéressant de noter que, pour réduire ce risque, les marchés OTC se sont mis à adopter des règles proches de celles des marchés organisés pour garantir la bonne fin des contrats (procédure appelée *collateralization* en anglais).

Considérons deux contreparties A et B nouant un contrat sur le marché OTC. Elles peuvent conclure un accord concernant la méthode d'évaluation du contrat et procéder ainsi chaque jour à des paiements équivalents aux appels de marge des marchés organisés. Si d'un jour à l'autre la valeur du contrat augmente pour A, B paye à A le montant de la variation. C'est pourquoi il est important que les deux soient au préalable d'accord sur la méthodologie d'évaluation. Cette démarche réduit de façon importante le risque de crédit sur les marchés OTC (ce point sera développé au chapitre 20). Ce genre d'accord a été utilisé dans les années 1990 par un hedge fund, Long Term Capital Management (LTCM). Cela lui permettait de profiter d'un effet de levier important. Même si ces accords procuraient une protection contre le risque de crédit, l'important effet de levier rendait le fonds très vulnérable à d'autres risques (voir encadré 2.2).

Encadré 2.2 Les pertes de Long Term Capital Management

LTCM, un hedge fund créé dans les années 1990, garantissait toujours ses transactions. La stratégie employée par ce fonds s'appelle « arbitrage de convergence ». On peut en donner un exemple très simple. Supposez que vous trouviez sur le marché deux obligations, X et Y, émises par la même société et présentant les mêmes caractéristiques, mais ne présentant pas la même liquidité. Par exemple, X est beaucoup moins liquide que Y. Comme le marché accorde toujours de la valeur à la liquidité, X vaut moins cher que Y. Dans ce cas, achetez X et vendez Y, en attendant qu'il y ait convergence à une date future (au plus tard à l'échéance !).

Quand les taux augmentent, on peut s'attendre à ce que les prix des deux obligations diminuent de la même manière, de sorte que les marges (collateral) payées sur X sont identiques à celles reçues sur Y. Le raisonnement symétrique s'applique en cas de baisse des taux. En conséquence, on ne s'attend pas à ce que des sorties de fonds importantes soient nécessaires du fait du système de garantie.

En août 1998, la Russie a fait défaut sur sa dette souveraine et cela a conduit à une « fuite vers la qualité » sur les marchés. Une conséquence fut d'augmenter l'écart de prix entre les obligations liquides et les obligations non liquides, ce qui a conduit à une dégradation importante de la position de LTCM. Les prix des obligations achetées par le fonds baissaient alors que celui des obligations vendues à découvert augmentaient. Du fait de l'effet de levier important de la position détenue par LTCM, il était impossible de faire face aux paiements nécessités par les accords de garantie. Il fallut donc déboucler la position avec une perte de quatre milliards de dollars. Si l'effet de levier avait été moins important, il est probable que LTCM aurait pu surmonter cette crise en attendant que l'écart de prix entre les deux types d'obligations se réduise.

2.5 Les cotations dans les journaux

De nombreux journaux présentent les cotations des contrats futures. Dans le *Wall Street Journal*, par exemple, on les trouve dans la section « Money and Investing », et les informations fournies sont les suivantes :

- le marché sur lequel la cotation a lieu ;
- le type de contrat (sous-jacent, quantité, mode de cotation) ;
- les mois d'échéance ;
- les prix d'ouverture, plus haut, plus bas, prix de compensation, volume, position ouverte.

Le tableau 2.2 donne les cotations de contrats futures sur matières premières telles qu'elles apparaissaient dans le *Wall Street Journal* du 5 février 2004. En haut de chaque section apparaissent le nom du sous-jacent au contrat, le lieu de cotation, la taille du contrat et le mode de cotation. Les cotations correspondantes des contrats sur indices, devises et taux d'intérêt seront illustrées aux chapitres 3, 5 et 6.

Le premier sous-jacent est le maïs coté au Chicago Board of Trade. Le contrat porte sur 5 000 boisseaux et le prix est coté en cents par boisseau. Les différentes échéances apparaissent dans la première colonne. Pour le maïs, il s'agit de mars 2004, mai 2004, juillet 2004, septembre 2004, décembre 2004, mars 2005 et décembre 2005.

Tableau 2.2 : Exemples de cotations de futures sur matières premières tirés du Wall Street Journal du 5 février 2004 (les colonnes indiquent le mois d'échéance, le prix d'ouverture, les plus haut et plus bas de la journée, le prix de compensation, la variation par rapport à la veille, les plus haut et plus bas sur la durée de vie du contrat et la position ouverte)

Exchange Abbreviations

For commodity futures and futures options

CBT-Chicago Board of Trade;
CME-Chicago Mercantile Exchange;
CSCE-Coffee, Sugar & Cocoa Exchange, New York;
CMX-COMEX (Div. of New York Mercantile Exchange);
EUREX-European Exchange;
FINEX-Financial Exchange (Div. of New York Cotton Exchange);
IPE-International Petroleum Exchange;
KC-Kansas City Board of Trade;
LIFFE-London International Financial Futures Exchange;
MATIF-Marche a Terme International de France;
ME-Montreal Exchange;
MPLS-Minneapolis Grain Exchange;
NQLX-NQLX (unit of Euronext.liffe)
NYCE-New York Cotton Exchange;
NYFE-New York Futures Exchange (Sub. of New York Cotton Exchange);
NYM-New York Mercantile Exchange;
ONE-OneChicago
SFE-Sydney Futures Exchange;
SGX-Singapore Exchange Ltd.;

Futures prices reflect day and overnight trading
Open interest reflects previous day's trading

Wednesday, February 4, 2004

Grain and Oilseed Futures

	OPEN	HIGH	LOW	SETTLE	CHG	LIFETIME HIGH	LIFETIME LOW	OPEN INT
Corn (CBT)-5,000 bu.; cents per bu.								
Mar	273.25	274.75	269.25	270.25	-2.75	281.50	219.00	292,145
May	278.00	279.75	274.00	275.25	-2.75	285.75	224.50	130,369
July	280.50	282.50	277.00	278.25	-2.25	288.50	227.75	79,647
Sept	274.50	276.00	272.50	272.50	-2.75	283.00	229.75	14,330
Dec	270.75	273.00	268.50	270.00	-.75	278.75	232.50	105,132
Mr05	274.25	276.00	272.25	273.50	-1.00	281.50	239.00	7,662
Dec	252.50	252.75	252.50	252.75	-.25	258.00	235.00	1,364
Est vol 54,315; vol Tue 81,306; open int 632,256, +1,555.								
Oats (CBT)-5,000 bu.; cents per bu.								
Mar	156.25	156.25	153.00	153.00	-3.00	164.75	131.00	4,361
May	158.50	158.50	155.75	155.75	-3.25	163.75	135.00	1,403
Est vol 543; vol Tue 1,134; open int 6,487, +277.								
Soybeans (CBT)-5,000 bu.; cents per bu.								
Mar	803.00	813.00	802.00	805.75	3.25	855.00	508.00	110,983
May	805.00	811.50	804.00	805.75	1.25	853.50	515.50	83,539
July	795.50	799.50	791.50	792.00	-3.00	842.00	520.00	37,181
Aug	765.50	770.00	760.00	760.50	-5.25	804.00	521.00	8,682
Sept	714.00	714.00	705.00	706.50	-5.50	748.00	528.00	4,033
Nov	643.50	646.50	635.00	636.50	-8.25	678.00	483.00	22,489
Ja05	643.00	643.00	638.00	638.00	-7.00	678.00	573.00	440
Est vol 51,149; vol Tue 69,055; open int 267,713, -1,819.								
Soybean Meal (CBT)-100 tons; $ per ton.								
Mar	246.80	249.80	246.50	247.00	.20	268.80	152.50	46,742
May	247.00	249.80	246.40	246.50	-.40	268.20	153.00	59,488
July	243.40	245.50	242.30	242.40	-1.00	263.20	152.50	32,077
Aug	234.80	235.50	232.80	233.00	-1.10	251.20	154.00	11,892
Sept	221.00	222.00	218.80	219.30	-.90	234.50	154.00	9,574
Oct	192.50	192.50	189.00	190.00	-1.40	206.00	150.50	7,015
Dec	189.00	189.00	185.50	185.60	-2.60	202.50	150.00	15,868
Ja05	188.00	188.00	185.50	185.80	-2.40	203.00	161.50	882
Est vol 20,000; vol Tue 33,272; open int 184,147, -2,396.								
Soybean Oil (CBT)-60,000 lbs.; cents per lb.								
Mar	29.86	30.13	29.75	29.86	...	30.37	19.00	70,068
May	29.75	30.02	29.66	29.76	.04	30.19	19.01	64,391
July	29.80	29.80	29.40	29.45	-.02	29.87	19.01	41,093
Aug	29.08	29.15	28.85	28.90	-.05	29.20	19.05	5,103
Sept	28.25	28.25	27.95	28.00	-.02	28.35	19.01	6,754
Oct	26.90	27.00	26.80	26.90	-.15	27.10	19.00	5,429
Dec	25.90	25.90	25.75	25.78	-.19	26:30	18.98	10,994
Est vol 17,571; vol Tue 33,871; open int 204,766, +2,177.								
Rough Rice (CBT)-2,000 cwt.; cents per cwt.								
Mar	776.00	784.50	770.00	773.00	-1.00	925.00	680.00	5,418
July	816.00	816.00	809.00	809.00	-1.00	939.00	761.00	541
Est vol 409; vol Tue 973; open int 7,275, -63.								
Wheat (CBT)-5,000 bu.; cents per bu.								
Mar	380.50	382.00	375.25	376.00	-4.50	421.50	301.50	75,392
May	386.75	387.00	381.00	382.50	-4.25	413.00	290.00	28,178
July	381.00	381.50	377.00	377.25	-4.25	404.00	298.00	25,753
Sept	382.00	383.50	381.00	381.50	-3.50	402.00	326.00	1,803
Dec	391.50	392.00	388.50	390.50	-3.50	410.00	330.00	3,219
Est vol 18,516; vol Tue 24,710; open int 134,517, +36.								
Wheat (KC)-5,000 bu.; cents per bu.								
Mar	386.00	387.50	380.00	380.50	-7.00	416.00	314.00	35,068
May	385.75	387.00	379.00	380.50	-6.75	412.00	315.00	14,006
July	383.50	384.00	380.00	380.50	-4.75	408.00	313.00	11,690
Sept	384.50	386.00	383.50	386.00	-2.00	405.00	330.50	1,938
Dec	392.50	393.50	390.00	390.00	-5.50	408.50	341.00	1,273
Est vol 19,427; vol Tue 10,017; open int 63,983, -463.								
Wheat (MPLS)-5,000 bu.; cents per bu.								
Mar	412.00	413.25	409.00	411.00	-2.50	423.75	343.75	13,938
May	407.00	407.25	401.50	402.25	-4.75	420.00	349.50	7,993
July	400.00	400.00	395.00	395.00	-5.50	411.00	352.00	4,185
Sept	396.50	396.50	391.50	391.50	-5.50	403.00	346.00	4,898
Dec	400.00	401.00	395.75	396.00	-5.00	408.00	355.00	1,037
Est vol 7,695; vol Tue 6,203; open int 32,066, -868.								

Livestock Futures

Cattle-Feeder (CME)-50,000 lbs.; cents per lb.								
Mar	83.70	83.80	82.22	82.22	-1.50	97.45	77.50	5,192
Apr	85.30	85.40	83.92	83.92	-1.50	94.90	78.30	2,260
May	85.85	85.85	84.35	84.35	-1.50	93.90	79.10	3,739
Aug	88.10	88.20	86.77	86.77	-1.50	93.25	81.60	2,316
Sept	87.75	87.75	87.00	87.00	-1.50	92.00	81.70	297
Oct	88.25	88.25	87.00	87.00	-1.50	92.00	81.95	317
Est vol 1,472; vol Tue 1,739; open int 14,199, +22.								
Cattle-Live (CME)-40,000 lbs.; cents per lb.								
Feb	76.30	76.45	74.82	74.82	-1.50	94.95	71.00	18,526
Apr	72.87	73.05	71.37	71.37	-1.50	85.55	68.60	42,771
June	69.95	70.15	68.42	68.42	-1.50	78.75	66.50	15,578
Aug	72.45	72.55	70.95	70.95	-1.50	77.20	68.00	8,444
Oct	75.50	75.55	74.02	74.20	-1.32	78.80	69.50	10,518
Dec	77.07	77.15	75.65	76.12	-1.02	78.90	72.00	3,520
Est vol 16,156; vol Tue 10,727; open int 100,345, +316.								
Hogs-Lean (CME)-40,000 lbs.; cents per lb.								
Feb	59.80	59.97	58.97	59.42	.50	63.00	50.75	5,560
Apr	59.67	60.00	58.70	58.87	-.47	62.40	53.55	28,654
May	60.55	60.85	60.30	60.65	-.05	63.90	55.90	1,621
June	65.00	65.10	64.05	64.60	-.15	67.10	58.40	8,907
July	61.70	61.80	61.25	61.47	-.02	63.85	56.90	2,289
Aug	59.70	59.80	59.25	59.65	.10	61.37	55.00	1,521
Oct	52.50	52.85	52.25	52.25	-.35	54.65	49.00	919
Dec	52.40	53.15	52.25	52.37	-.12	53.97	49.00	522
Est vol 10,289; vol Tue 8,924; open int 50,055, -1,609.								
Pork Bellies (CME)-40,000 lbs.; cents per lb.								
Feb	86.30	87.67	86.30	87.30	1.17	93.40	76.40	831
Mar	87.30	88.25	87.30	88.02	1.30	93.15	76.90	879
May	89.05	89.50	88.75	89.50	1.67	94.15	79.40	385
Est vol 669; vol Tue 883; open int 2,270, -26.								

Food and Fiber Futures

Lumber (CME)-110,000 bd. ft., $ per 1,000 bd. ft.								
Mar	334.20	344.50	334.00	344.50	10.00	365.00	256.20	2,408
May	336.60	346.60	336.60	346.60	10.00	357.50	263.10	686
July	337.90	344.00	335.10	343.20	6.80	354.90	282.00	233
Est vol 889; vol Tue 286; open int 3,368, -22.								
Milk (CME)-200,000 lbs., cents per lb.								
Feb	11.74	11.75	11.72	11.75	.05	11.90	10.95	2,554
Mar	12.20	12.26	12.20	12.20	.05	12.35	11.05	2,525
Apr	12.65	12.75	12.60	12.73	.13	12.75	11.00	1,988
May	12.88	13.00	12.87	12.95	.13	13.00	11.00	1,948
June	13.13	13.26	13.12	13.26	.16	13.32	11.41	1,761
July	13.74	13.95	13.72	13.86	.12	13.95	11.60	1,676
Aug	14.18	14.25	14.13	14.20	.02	14.28	11.65	1,723
Sept	14.55	14.75	14.55	14.65	.05	14.75	12.10	1,900
Oct	13.94	14.15	13.89	14.05	.11	14.15	11.89	1,513
Nov	12.95	13.20	12.95	13.20	.25	13.30	11.39	1,169
Dec	12.40	12.45	12.40	12.45	.05	12.50	11.30	809
Est vol 1,437; vol Tue 842; open int 19,736, +289.								

						LIFETIME		OPEN
	OPEN	HIGH	LOW	SETTLE	CHG	HIGH	LOW	INT
Cocoa (CSCE)-10 metric tons; $ per ton.								
Mar	1,606	1,615	1,578	1,581	–19	2,358	1,250	22,360
May	1,596	1,599	1,565	1,569	–21	2,265	1,345	13,766
July	1,595	1,596	1,572	1,564	–23	2,307	1,350	12,922
Sept	1,590	1,590	1,562	1,563	–24	2,402	1,370	8,710
Est vol 9,057; vol Tue 9,675; open int 87,295, –1,218.								
Coffee (CSCE)-37,500 lbs.; cents per lb.								
Mar	73.75	74.00	71.60	72.60	–2.05	83.00	59.65	59,048
May	75.60	75.80	73.70	74.65	–1.95	82.00	61.75	26,054
July	77.00	77.70	75.70	76.45	–1.95	82.50	63.90	8,737
Sept	78.40	79.20	77.40	78.15	–1.90	83.45	65.75	7,837
Dec	80.15	81.25	80.15	80.75	–1.90	85.95	68.50	4,577
Mr05	83.40	83.70	83.40	83.30	–1.85	87.90	71.00	2,948
Est vol 32,220; vol Tue 15,761; open int 109,783, +1,170.								
Sugar-World (CSCE)-112,000 lbs.; cents per lb.								
Mar	5.74	5.77	5.66	5.68	–.07	7.65	5.50	131,494
May	5.94	5.97	5.87	5.88	–.07	7.32	5.54	50,135
July	5.97	6.00	5.92	5.93	–.06	6.95	5.50	37,213
Oct	6.09	6.10	6.02	6.03	–.06	6.88	5.55	25,822
Mr05	6.33	6.33	6.27	6.28	–.04	6.82	6.24	11,411
May	6.32	6.33	6.30	6.30	–.03	6.57	6.20	4,813
July	6.28	6.29	6.28	6.25	–.03	6.42	6.15	2,901
Est vol 23,839; vol Tue 32,525; open int 265,575, –1,048.								
Sugar-Domestic (CSCE)-112,000 lbs.; cents per lb.								
Mar	20.35	20.40	20.35	20.40	.04	22.02	20.20	884
May	20.35	20.35	20.35	20.35	...	22.07	20.15	3,835
July	20.50	20.50	20.50	20.50	...	22.10	20.25	3,280
Sept	20.74	20.74	20.74	20.74	–.01	22.07	20.63	3,087
Nov	21.05	21.05	21.05	21.05	...	21.70	20.94	855
Ja05	20.80	20.80	20.80	20.80	...	21.40	20.80	285
Est vol 43; vol Tue 203; open int 12,510, –112.								
Cotton (NYCE)-50,000 lbs.; cents per lb.								
Mar	69.10	69.90	68.70	69.25	.35	86.00	45.60	43,633
May	71.20	71.95	70.75	71.27	.44	86.00	51.50	27,184
July	72.35	73.00	71.80	72.30	.35	85.50	56.75	8,924
Dec	68.00	68.25	67.50	67.75	.05	71.00	59.00	6,330
Est vol 12,611; vol Tue 21,022; open int 88,074, +239.								
Orange Juice (NYCE)-15,000 lbs.; cents per lb.								
Mar	61.20	62.00	60.80	61.65	.25	103.50	60.60	25,803
May	64.50	64.70	64.00	64.45	.25	105.00	63.50	7,488
July	67.20	67.30	66.50	67.05	.35	106.00	66.40	1,518
Sept	69.40	70.00	69.40	69.40	.20	86.80	69.25	774
Nov	71.30	71.30	71.30	71.90	–.10	91.50	71.30	491
Est vol 1,846; vol Tue 1,259; open int 36,251, –123.								
Metal Futures								
Copper-High (CMX)-25,000 lbs.; cents per lb.								
Feb	116.90	117.30	116.90	117.35	0.60	117.30	67.20	1,033
Mar	116.85	117.55	116.50	117.45	0.60	117.55	69.75	65,863
Apr	116.55	116.90	116.55	117.10	0.60	116.90	71.95	941
May	116.05	116.70	115.95	116.55	0.45	116.70	70.90	8,263
June	116.00	116.15	115.75	115.95	0.40	116.15	73.50	724
July	115.00	115.45	115.00	115.30	0.35	115.45	70.90	6,549
Aug	114.30	114.70	114.30	114.70	0.40	114.70	73.65	486
Sept	113.90	114.00	113.90	114.05	0.40	114.00	70.95	2,211
Oct	113.25	113.25	113.25	113.45	0.40	113.25	74.00	388
Nov	112.55	112.70	112.45	112.85	0.40	112.70	79.00	287
Dec	111.85	112.35	111.60	112.20	0.35	112.35	74.20	4,135
Mr05	110.55	110.55	110.50	110.40	0.25	110.55	74.40	322
Est vol 11,000; vol Tue 8,170; open int 91,868, –170.								
Gold (CMX)-100 troy oz.; $ per troy oz.								
Feb	399.80	401.30	398.50	401.00	1.80	431.50	322.00	5,090
Apr	400.70	401.80	399.40	401.70	1.80	432.30	320.00	143,464
June	401.40	403.00	400.50	402.70	1.80	432.00	287.00	29,868
Aug	403.10	403.10	402.00	403.70	1.80	431.30	324.70	8,621
Dec	404.10	405.50	403.00	405.50	1.70	434.50	290.00	22,312
Est vol 40,000; vol Tue 40,608; open int 236,512, –4,897.								
Platinum (NYM)-50 troy oz.; $ per troy oz.								
Apr	824.00	824.00	812.00	820.60	–5.70	868.00	677.00	6,816
July	...	...	...	810.60	–5.70	852.00	801.00	292
Est vol 602; vol Tue 808; open int 7,126, –95.								
Silver (CMX)-5,000 troy oz.; cnts per troy oz.								
Feb	611.5	611.5	611.5	614.5	2.4	611.5	611.5	240
Mar	613.0	618.5	607.0	614.8	2.5	679.5	437.0	78,208
May	614.5	620.0	608.5	616.2	2.6	681.0	445.0	7,153
July	616.5	621.0	611.0	617.4	2.6	673.0	436.0	5,063
Dec	618.5	623.0	613.0	619.9	2.6	677.0	440.0	12,458
Dc05	627.0	627.0	627.0	624.6	3.9	675.0	436.0	1,564
Est vol 16,000; vol Tue 15,059; open int 107,432, –482.								
Petroleum Futures								
Crude Oil, Light Sweet (NYM)-1,000 bbls.; $ per bbl.								
Mar	34.09	34.45	32.95	33.10	–1.00	35.25	20.35	196,160
Apr	32.82	33.25	31.85	31.99	–0.83	34.50	20.35	91,932
May	32.11	32.20	31.25	31.32	–0.72	33.85	20.35	42,864
June	31.55	31.65	30.80	30.84	–0.63	33.25	20.53	39,700
July	31.00	31.10	30.40	30.37	–0.60	32.60	20.86	29,920
Aug	30.57	30.60	30.10	29.93	–0.58	32.15	20.84	19,040
Sept	30.21	30.21	29.65	29.58	–0.56	31.61	20.82	26,690
Oct	29.93	29.93	29.93	29.33	–0.54	31.20	23.75	17,830
Nov	29.59	29.70	29.59	29.11	–0.53	30.85	24.75	14,370
Dec	29.60	29.60	29.00	28.92	–0.52	30.69	16.35	51,129
Ja05	29.00	29.00	29.00	28.67	–0.50	30.33	23.25	15,606
Feb	28.75	28.75	28.75	28.48	–0.49	30.07	23.85	5,061
June	28.24	28.24	28.24	27.79	–0.45	29.05	22.40	10,556
Dec	27.42	27.52	27.20	27.03	–0.39	28.31	17.00	25,454
Dc06	26.77	26.77	26.60	26.38	–0.39	27.65	19.10	16,726
Dc07	26.45	26.50	26.40	26.18	–0.34	27.35	19.50	9,971
Dc08	26.50	26.50	26.50	26.18	–0.34	27.15	19.75	7,354
Est vol 225,976; vol Tue 219,163; open int 663,890, +1,691.								
Heating Oil No. 2 (NYM)-42,000 gal.; $ per gal.								
Mar	.9142	.9280	.8830	.8897	–.0245	1.0129	.6370	64,063
Apr	.8770	.8840	.8505	.8586	–.0166	.9417	.6275	22,296
May	.8436	.8436	.8200	.8251	–.0151	.8881	.6140	10,010
June	.8174	.8185	.7950	.8016	–.0136	.8581	.6354	11,337
July	.7800	.7910	.7800	.7896	–.0131	.8380	.6415	7,713
Aug	.7925	.7925	.7750	.7876	–.0126	.8373	.6455	5,437
Oct	.8050	.8050	.8050	.7986	–.0121	.8425	.6655	1,466
Nov	.8100	.8100	.8100	.8046	–.0121	.8480	.6820	1,548
Dec	.8175	.8175	.8100	.8106	–.0121	.8540	.6937	10,047
Est vol 66,129; vol Tue 49,216; open int 141,064, +3,503.								
Gasoline-NY Unleaded (NYM)-42,000 gal.; $ per gal.								
Mar	1.0015	1.0150	.9740	.9857	–.0158	1.0410	.7325	67,894
Apr	1.0475	1.0530	1.0190	1.0305	–.0124	1.0800	.7975	27,871
May	1.0310	1.0310	1.0130	1.0150	–.0119	1.0655	.8080	13,375
June	1.0050	1.0100	.9920	.9895	–.0109	1.0410	.8070	6,390
July	.9550	.9650	.9550	.9615	–.0104	1.0100	.9300	3,617
Sept	.9090	.9090	.9050	.8940	–.0089	.9380	.8530	5,260
Est vol 46,056; vol Tue 48,469; open int 131,831, +2,200.								
Natural Gas (NYM)-10,000 MMBtu.; $ per MMBtu								
Mar	5.670	5.790	5.560	5.654	.003	7.500	3.150	51,734
Apr	5.350	5.420	5.280	5.340	.015	6.010	2.970	23,196
May	5.180	5.270	5.180	5.210	.020	5.668	3.030	25,805
June	5.220	5.260	5.190	5.210	.020	5.612	3.010	19,336
July	5.230	5.274	5.200	5.235	.020	5.622	3.040	17,676
Aug	5.260	5.294	5.220	5.250	.020	5.624	3.120	13,402
Sept	5.220	5.265	5.180	5.218	.020	5.640	3.100	13,093
Oct	5.230	5.240	5.200	5.225	.017	5.580	3.100	14,742
Nov	5.430	5.460	5.400	5.423	.017	5.735	3.270	10,289
Dec	5.610	5.660	5.580	5.613	.015	5.912	3.460	12,860
Ja05	5.745	5.800	5.710	5.750	.015	6.027	3.520	9,971
Feb	5.710	5.720	5.680	5.710	.015	5.991	3.400	9,752
Mar	5.570	5.570	5.505	5.540	.020	5.740	3.640	8,955
May	4.880	4.880	4.880	4.900	.020	5.000	3.500	4,187
June	4.920	4.920	4.920	4.925	.020	5.020	3.530	4,518
July	4.950	4.950	4.950	4.961	.020	5.050	3.560	10,788
Aug	4.950	4.950	4.950	4.971	.020	5.065	3.230	5,319
Dec	5.290	5.290	5.290	5.311	.015	5.400	3.960	4,389
Est vol 46,926; vol Tue 45,710; open int 307,861, –1,771.								
Brent Crude (IPE)-1,000 net bbls.; $ per bbl.								
Mar	29.52	29.80	28.85	28.88	–0.62	32.10	23.00	81,701
Apr	29.28	29.53	28.62	28.66	–0.63	31.54	22.95	82,264
May	29.10	29.34	28.45	28.48	–0.66	31.18	21.97	22,069
June	28.88	29.07	28.25	28.29	–0.65	30.83	23.45	27,498
July	28.69	28.83	28.29	28.08	–0.65	30.55	23.65	10,450
Aug	28.10	28.51	28.10	27.87	–0.64	30.20	24.00	9,032
Sept	28.25	28.29	27.88	27.65	–0.64	29.77	24.40	11,307
Oct	27.94	28.08	27.94	27.45	–0.63	39.45	20.90	5,806
Nov	27.73	27.88	27.73	27.27	–0.61	38.85	24.15	5,352
Dec	27.65	27.70	27.17	27.10	–0.59	38.83	25.32	24,112
Ja05	27.44	27.45	27.35	26.88	–0.57	28.70	22.43	3,611
Dec	26.00	26.00	25.90	25.65	–0.34	26.90	21.91	20,253
Dc06	25.30	25.30	25.30	25.05	–0.29	26.05	24.10	3,400
Est vol 113,000; vol Tue 113,278; open int 321,427, –3,267.								

Sources : Dow Jones & Company, Inc. 2004.

Les prix

Les trois premiers nombres d'une ligne sont le prix d'ouverture, le plus haut et le plus bas de la journée. Les prix d'ouverture sont représentatifs des transactions réalisées dès le début de séance. Pour l'échéance mars 2004, le prix d'ouverture était de 273,25 cents par boisseau, et les transactions de la journée ont été réalisées dans la fourchette 269,25-274,75.

Le prix de compensation

Le quatrième nombre est le prix de compensation, qui est utilisé pour calculer les appels de marge. C'est en général le prix auquel se sont échangés les derniers contrats de la journée. Le cinquième nombre donne la variation par rapport au prix de compensation de la veille. Pour l'échéance mars 2004, le prix de compensation était de 270,25 cents, en baisse de 2,75 cents par rapport à la veille.

Un investisseur détenant une position longue sur ce contrat verrait le solde de son compte de marge réduit de 5 000 × 2,75 cents = 137,50 $. Symétriquement, l'investisseur en position courte verrait le solde de son compte de marge augmenter de 137,50 $.

Les plus haut et plus bas

Les sixième et septième colonnes du tableau 2.2 indiquent les valeurs minimale et maximale atteintes par le prix futures sur l'ensemble de la durée de vie du contrat jusqu'à la date présente. Pour le contrat sur maïs déjà évoqué, d'échéance mars 2004, le plus haut est de 281,50 cents et le plus bas de 219 cents.

Position ouverte et volume de transactions

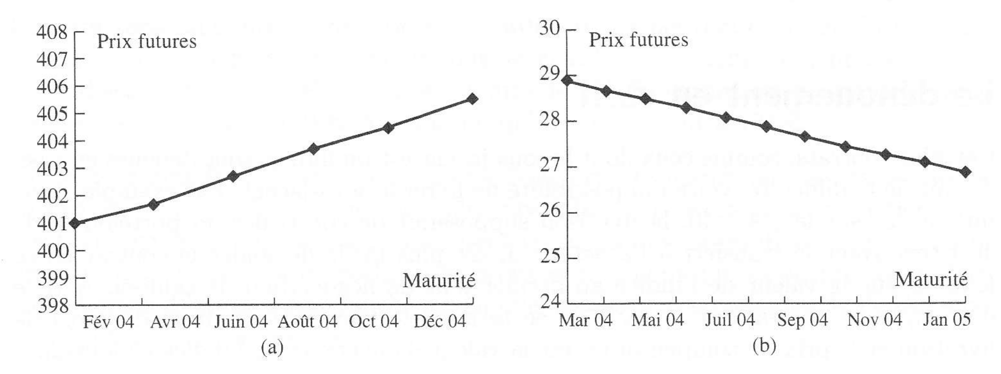
La dernière colonne du tableau 2.2 indique la position ouverte. C'est le nombre de contrats vivants à la clôture du jour précédent. Comme une position peut être soldée en prenant la position inverse, la position ouverte varie de jour en jour. Ceci est lié au fait que les contrats futures, contrairement aux actions ou aux obligations, ont une offre nette nulle. Pour qu'ils existent, il suffit qu'un acheteur et un vendeur décident de les créer.

À la fin de chaque section du tableau 2.2 est reportée une estimation du volume de transactions global sur l'ensemble des contrats de la section concernée le 4 février 2004 et le volume exact de contrats négociés la veille, c'est-à-dire le 3 février 2004. Enfin, sur cette même ligne sont indiquées la position ouverte cumulée sur l'ensemble des contrats de la section ainsi que la variation de cette position ouverte depuis la veille. Il peut arriver que le volume de transactions d'un jour donné soit supérieur à

la position ouverte en fin de journée. C'est souvent le signe d'un nombre important de transactions conclues et débouclées dans la journée.

Les prix futures en fonction de l'échéance

Si on considère les données du tableau 2.2, on peut observer des formes différentes pour la représentation graphique de la fonction liant prix futures et échéance du contrat. Le graphique 2.2 montre deux représentations de ce type, la première concernant le contrat sur l'or et la seconde le contrat sur le pétrole Brent. Le prix futures de l'or croît avec la maturité (on utilise l'expression « déport ») alors que celui du pétrole décroît (on parle de « report » ou « contango »). D'autres matières premières peuvent présenter des formes mixtes, comme le fuel de chauffage qui est d'abord décroissant puis croissant.



Graphique 2.2 : Prix de compensation en fonction de la durée de vie restante le 4 février 2004 pour (a) l'or et (b) le pétrole Brent.

2.6 La livraison

Comme nous l'avons mentionné plus haut, très peu de contrats vont jusqu'à l'échéance. Une grande majorité est dénouée avant. Néanmoins, c'est la possibilité de livraison qui détermine le prix futures. De ce fait, il est nécessaire de bien comprendre les procédures de livraison.

La période pendant laquelle la livraison est possible est définie par les autorités de marché, mais elle est variable d'un contrat à l'autre. Quand un investisseur A décide de livrer, son broker transmet une notice d'intention de livraison à la chambre de compensation. Cette notice stipule le nombre de contrats concernés et dans le cas de matières premières, le lieu de livraison et éventuellement la qualité du produit livré. Les autorités de marché sélectionnent alors l'acheteur qui prendra livraison. Celui-ci n'est pas forcément celui qui avait initialement pris la position longue sur le contrat. La chambre de compensation choisit en général l'acheteur dont la position longue est la plus ancienne.

Dans le cas d'un contrat sur matières premières, prendre livraison signifie aussi accepter un lieu de réception de la marchandise et supporter les coûts de stockage. S'il s'agit d'animaux vivants, l'acheteur supportera les coûts de surveillance et de nourriture. Pour certains contrats financiers, le dénouement s'effectue par simple virement des fonds. Dans tous les cas, le prix payé est le cours de compensation du jour précédant la date de la notice d'intention de livraison. Quand ces modalités sont prévues par le contrat, ce prix peut être ajusté pour la qualité du produit livré et pour le lieu de livraison. L'ensemble de la procédure, de l'émission de la notice à la livraison effective, prend deux ou trois jours.

Trois jours sont cruciaux dans la vie d'un contrat : les premier et dernier jours d'émission de notices d'intention de livraison ainsi que le dernier jour de négociation, qui se situe le plus souvent entre les deux dates précédentes. Pour éviter de devoir prendre livraison du sous-jacent, un acheteur de contrat doit donc solder sa position avant le premier jour de la période de livraison.

Le dénouement en cash

Certains contrats, comme ceux dont le sous-jacent est un indice, sont dénoués en cash du fait de la difficulté, voire l'impossibilité de livrer le sous-jacent. Par exemple, pour un contrat sur le CAC 40, la livraison supposerait de constituer un portefeuille de 40 titres avant le transfert à l'acheteur. Il est plus facile de solder le contrat en se fondant sur la valeur de l'indice au dernier jour de négociation de celui-ci. À titre d'exemple, le contrat sur le S&P500 se termine le troisième vendredi du mois de livraison et le prix de compensation est la valeur d'ouverture de l'indice ce jour-là.

2.7 Les différents types d'intervenants

Il existe essentiellement deux types d'intervenants : les intermédiaires, courtiers ou brokers, qui opèrent sur le marché pour le compte de clients, et les négociateurs individuels de parquet qui opèrent pour leur propre compte (*locals* dans la terminologie anglo-saxonne).

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, il existe trois natures de position quel que soit le type d'intervenant : la couverture, la spéculation ou l'arbitrage. Les spéculateurs sont classés selon leur horizon, qui peut aller de quelques minutes (*scalpers*) à un (*day traders*) ou plusieurs jours, voire plusieurs semaines (*position traders*). Les premiers cherchent à profiter de mouvements de très court terme pour gagner un ou deux ticks, alors que les derniers jouent sur des mouvements de marché plus profonds. Tous espèrent réaliser des profits du fait de variations significatives (et dans le bon sens !) du prix futures.

Les différents types d'ordre

L'ordre le plus simple est un *ordre à tout prix* ou *ordre au prix du marché*. L'intervenant a une exigence d'immédiateté, son ordre sera donc exécuté au meilleur prix disponible au moment où il arrive sur le marché.

Un *ordre limite* spécifie un prix limite. L'ordre n'est exécuté que si le prix de marché satisfait la condition posée (sous forme de prix maximal pour une position longue, et minimal pour une position courte). Il est donc possible qu'un ordre limite ne soit jamais exécuté.

Un *ordre stop* spécifie aussi un prix limite, mais la signification est différente. Par exemple, un ordre stop de vente à 100 € sera exécuté seulement si le prix passe en dessous de 100 €. L'objectif de l'investisseur est alors de limiter ses pertes en cas de mouvement encore plus défavorable du cours.

Les caractéristiques des ordres stop et des ordres limite peuvent être combinées. Dans ce cas, l'ordre spécifie deux cours : le cours stop et le cours limite. Si le prix stop d'un ordre d'achat est de 100 € et son prix limite de 101 €, l'achat est réalisé dès que le cours passe au-delà de 100 €, à condition qu'il soit inférieur à 101 €.

Un *ordre à prix touché* est exécuté au meilleur prix du marché si une transaction a eu lieu au prix spécifié ou à un prix plus favorable. Un investisseur qui détient une position longue sur un contrat futures peut vouloir solder sa position. Avec un ordre de ce type, il s'assurera de réaliser un profit si des mouvements de prix favorables apparaissent. L'ordre à prix touché est en quelque sorte le symétrique de l'ordre stop qui visait à limiter les pertes.

Les ordres peuvent aussi contenir des conditions sur la durée de validité. Un *ordre-jour* est valide une journée, alors qu'un *ordre ouvert* est valide soit jusqu'à son exécution, soit jusqu'à la date de fin des transactions sur le contrat. Enfin, un *ordre tout-ou-rien* doit être exécuté immédiatement pour la quantité totale ou pas du tout.

2.8 Le contrôle des marchés

Aux États-Unis, les marchés de futures sont contrôlés par la Commodity Futures Trading Commission, CFTC (www.cftc.gov), établie en 1974. Cet organisme autorise les Bourses à proposer des contrats, et toute modification de ces contrats doit être approuvée par la CFTC. De manière générale, pour qu'un contrat soit accepté, il faut qu'il réponde aux besoins des opérateurs en couverture et des spéculateurs. La CFTC veille à la transparence en s'assurant que les prix soient publics et que les positions dont le volume dépasse un certain seuil soient connues. Elle impose aussi certaines exigences aux négociateurs individuels, en matière de capitaux propres par exemple. C'est aussi cette commission qui règle les litiges ; elle peut imposer aux Bourses de prendre des sanctions contre les traders qui enfreignent les règles.

Depuis la création de la National Futures Association (www.nfa.futures.org) en 1982, certaines des responsabilités de la CFTC ont été transférées à l'industrie des futures

elle-même. Cette association regroupe les principaux acteurs des marchés de futures. Son objectif est d'empêcher toute fraude et d'assurer que les marchés fonctionnent dans l'intérêt général. Un examen doit être passé pour devenir membre de cette association. Elle a la possibilité de sanctionner les irrégularités et a développé un système efficace d'arbitrage des litiges.

De temps à autre, d'autres organisations comme la Securities and Exchange Commission (www.sec.gov), le Federal Reserve Board (www.federalreserve.gov) ou le Département du Trésor (www.treas.gov) interviennent sur certains aspects des marchés de futures. Ces organisations sont essentiellement concernées par les liens existant entre les marchés de futures et les marchés au comptant. Par exemple, la SEC dispose d'un droit de veto sur tout nouveau contrat portant sur un indice d'actions ou d'obligations.

En France, ce sont l'Autorité des Marchés Financiers (fusion de la Commission des opérations de Bourse et du Conseil des marchés financiers) et le Conseil national du crédit du titre et des assurances qui contrôlent, surveillent et réglementent les marchés. De plus, Euronext, en tant qu'entreprise de marché, définit un certain nombre de règles de fonctionnement que doivent respecter les intervenants. Sur l'Eurex, qui est un marché dépendant des autorités suisses et allemandes, les deux organismes étatiques de contrôle sont la Commission fédérale des banques pour la Suisse (www.cfb.admin.ch) et le Hessische Ministerium für Wirtschaft, Verkehr und Landesentwicklung pour l'Allemagne (www.wirtschaft.hessen.de).

Les irrégularités

La plupart du temps, les marchés de futures fonctionnent de manière efficace. Il arrive cependant qu'un investisseur ou un groupe d'investisseurs tentent de manipuler le marché et de provoquer un étranglement de marché, ou *corner*[2]. La technique consiste à prendre une position longue sur une quantité énorme de contrats futures, tout en cherchant à contrôler l'offre du sous-jacent.

Ces investisseurs ne cherchent pas à dénouer leur position sur le marché des contrats, mais attendent la maturité. Au fur et à mesure que celle-ci approche, les vendeurs rencontrent de grandes difficultés à dénouer leur position et doivent rechercher le sous-jacent pour le livrer. La pénurie (organisée) fait monter les prix en flèche, aussi bien le prix spot que le prix futures. Pour lutter contre ce type de procédé, les autorités de contrôle imposent des limites au volume des positions, augmentent les marges initiales, changent leurs modalités de règlement et interdisent les transactions qui accroissent le volume des positions des spéculateurs.

2. Le cas le plus connu est celui des frères Hunt qui, en 1979-1980, ont manipulé le marché de l'argent pour le faire passer de 9 $ l'once à 50 $ l'once.

2.9 La comptabilité et la fiscalité

La comptabilité et la fiscalité des contrats futures vont au-delà de l'objet de ce livre. Elles varient d'un marché à l'autre et c'est pourquoi nous ne faisons qu'évoquer quelques principes de base. En France, pour toutes les opérations closes dans le cours d'une année donnée par un investisseur individuel occasionnel, les gains réalisés sur les marchés de futures sont considérés comme des plus-values et donc taxés au taux correspondant. Les pertes sont reportables sur cinq ans. Pour un opérateur habituel, les gains sont considérés comme des revenus et sujets à l'impôt sur le revenu dans la catégorie des BNC (bénéfices non commerciaux). Les opérateurs professionnels peuvent par contre opter pour le régime des BIC (bénéfices industriels et commerciaux).

Aux États-Unis, l'article FAS 133 du Financial Accounting Standard Board daté de juin 1998 impose que tous les actifs dérivés apparaissent au bilan à leur valeur de marché[3]. Cela implique en particulier une diffusion d'information renforcée et nécessite de prouver qu'une opération a bien des objectifs de couverture. FAS 133 est appliqué depuis juin 2000. Au niveau international l'IAS 39 a maintenant été publié par l'International Accounting Standards Board pour atteindre les mêmes objectifs de transparence.

2.10 Les contrats forward et les contrats futures

Les différences essentielles entre contrats forward et contrats futures sont listées dans le tableau 2.3. Les deux sont des engagements d'achat ou de vente d'un actif sous-jacent à un prix spécifié et à une date future donnée. Mais un contrat forward est négocié sur le marché OTC et ses caractéristiques ne sont pas standardisées, contrairement aux contrats futures négociés sur des marchés organisés. De plus, les contrats forward spécifient une date de livraison et sont en général détenus jusqu'à cette date, alors que les futures définissent une période de livraison, et les positions sont le plus souvent dénouées avant le début de ladite période. Enfin, les contrats futures font l'objet d'un marking to market quotidien.

Profits liés aux contrats forward et futures

Supposons que le taux de change forward USD/GBP à 90 jours soit de 1,6000 et que ce taux soit aussi le prix futures pour un contrat d'échéance 90 jours. Quelle est la différence entre les gains/pertes des deux contrats ?

Pour le contrat forward, le gain ou la perte sont réalisés à la date d'échéance. En revanche, pour le contrat futures, le gain ou la perte sont réalisés petit à petit du fait du marking to market quotidien. Supposons qu'un investisseur A détienne une

3. Auparavant, l'attrait des produits dérivés venait du fait que, dans certains cas, ils apparaissaient hors bilan.

Tableau 2.3 : Comparaison des contrats forward et futures

Forward	Futures
Négocié sur un marché de gré à gré	Négocié sur un marché organisé
Non standardisé	Contrat standardisé
Une date de livraison	Une période de livraison
Un seul flux à la fin du contrat	Marking to market quotidien
Livraison ou dénouement en cash sont la norme	Positions le plus souvent dénouées avant l'échéance
Existence d'un risque de crédit	Absence (ou presque) de risque de crédit

position longue sur un contrat forward d'un million de livres sterling et que l'investisseur B détienne la même position mais sur un contrat futures (en fait 16 contrats futures puisque chaque contrat porte sur 62 500 £). Si le taux de change spot dans 90 jours est de 1,8000, l'investisseur A réalise un gain de 200 000 $ à l'échéance. Par contre l'investisseur B a réalisé des pertes certains jours et des gains d'autres jours ; c'est seulement le montant cumulé des gains et des pertes sur la période qui totalise 200 000 $.

La cotation des contrats sur devises

Une différence supplémentaire doit être mentionnée pour les contrats sur devises, liée à la façon dont les taux de change sont cotés pour les deux types de contrats. Les forward sont toujours cotés comme les taux de taux de change spot et le mode de cotation de ces taux spot peut varier d'un pays à l'autre.

Par contre, les futures sur devises sont toujours cotés, sur les marchés américains, en nombre d'USD par unité de devise étrangère. Par exemple, un prix futures de 1,1 USD pour un EUR correspond à un prix forward de $1/1{,}1 = 0{,}9090$ EUR par USD.

Résumé

L'échange de contrats futures sur des marchés organisés impose une définition soigneuse et sans ambiguïté des contrats, une organisation des procédures de livraison et, plus généralement, une réglementation claire du marché. Les contrats forward sont par contre négociés bilatéralement, il n'est donc pas nécessaire de définir des règles spécifiques pour ces échanges ni d'imposer une standardisation des sous-jacents.

La grande majorité des futures ne donne pas lieu à livraison car ils sont dénoués avant la période de livraison. C'est pourtant la possibilité de livrer qui gouverne l'évolution des prix futures et les relations qui les lient aux prix au comptant. Pour certains actifs

sous-jacents comme les indices, le dénouement à l'échéance s'effectue en cash plutôt qu'en livrant le portefeuille que représente l'indice.

La définition des contrats reste un enjeu majeur pour les autorités de marché. En effet, les deux parties doivent connaître précisément le sous-jacent qui peut être livré, le lieu et la période de livraison. Par ailleurs, les règles de fonctionnement du marché doivent être dénuées d'ambiguïté en ce qui concerne les heures d'ouverture, la façon dont les cotations sont réalisées, les variations journalières maximales autorisées, etc. C'est pourquoi les nouveaux contrats doivent être approuvés par les autorités de marché avant le début des négociations.

Les appels de marge constituent une caractéristique importante des marchés de futures. Le compte de deposit, qu'un client possède chez son intermédiaire, est remis à jour quotidiennement en fonction des gains ou pertes constatés. En cas d'insuffisance, le client fait l'objet d'un appel de marge pour réalimenter ce compte. Le broker, s'il n'est pas membre de la chambre de compensation, doit aussi avoir un compte de deposit chez un membre de la CC. Ces derniers sont les seuls à avoir directement un compte à la CC ; ils doivent bien sûr maintenir un niveau de marge sur ce compte suffisant pour faire face à des mouvements défavorables de prix.

L'information sur les prix futures est largement diffusée, de manière instantanée par les Bourses elles-mêmes, et de manière différée par les journaux financiers comme le *Wall Street Journal.*

Il existe des différences notables entre contrats forward et futures. Les premiers sont des accords bilatéraux non négociables, alors que les seconds sont échangés sur des marchés organisés. Alors qu'un contrat forward spécifie une date précise de livraison, les futures précisent une période de livraison. Les contrats forward ne sont pas standardisés et sont souvent détenus jusqu'à l'échéance, donnant ainsi lieu à livraison ou à dénouement en cash.

Dans les chapitres suivants, nous étudierons la détermination des prix forward et futures et la façon dont ces contrats sont utilisés pour couvrir une position.

Références complémentaires

DUFFIE D., *Futures Markets*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1989.

GASTINEAU G. L., D. J. SMITH et R. TODD, *Risk Management, Derivatives and Financial Analysis under SFAS n° 133*, The Research Foundation of AIMR and Blackwell Series in Finance, 2001.

JORION P., « Risk Management Lessons from Long-Term Capital Management », *European Financial Management*, 6, 3 (septembre 2000), 277-300.

KAWALLER I. G. et P. D. KOCH, « Meeting the Highly Effective Expectation Criterion for Hedge Accounting », *Journal of Derivatives*, 7, 4 (été 2000), 79-87.

LOWENSTEIN R., *When Genius Failed : The Rise and Fall of Long-Term Capital Management*, New York, Random House, 2000.

WARWICK B., F. J. JONES et R. J. TEWELES, *The Futures Game*, 3rd ed., New York, McGraw Hill, 1998.

Problèmes et exercices

2.1 Quelle est la différence entre position ouverte et volume de transactions ?

2.2 Quelle est la différence entre un broker et un négociateur individuel de parquet ?

2.3 Supposez que vous preniez une position courte sur un contrat vous engageant à vendre de l'argent en juillet à 5,2 USD l'once sur le New York Commodity Exchange. La taille du contrat est 5 000 onces. Le deposit est de 4 000 USD et la marge à maintenir est ensuite de 3 000 USD. Quelle variation minimale de prix conduira à un appel de marge ? Que se passera-t-il si vous n'y répondez pas ?

2.4 En septembre 2007, vous prenez une position longue sur un contrat sur le pétrole d'échéance mai 2008. En mars 2008, vous dénouez votre position. Le prix futures du baril était de 18,3 USD quand vous avez pris position, et de 20,5 USD quand vous avez liquidé celle-ci. Un contrat correspond à 1 000 barils. Quel est votre profit ? Quand est-il constaté ?

2.5 Que signifie « passer un ordre stop à 2 € » ? Dans quel but devrait-il être utilisé ? Répondez aux mêmes questions pour un ordre limite à 2 €.

2.6 Quelles sont les différences entre un compte de deposit administré par la chambre de compensation et un compte de deposit administré par un intermédiaire ?

2.7 Quelles sont les différences dans la cotation des devises, sur les marchés futures, forward et au comptant ?

2.8 Le vendeur d'un contrat futures dispose dans certains cas d'une certaine marge de manœuvre sur le produit livré, sur le lieu et la date de livraison. Cela a-t-il sur le prix futures un effet positif ou négatif ? Expliquez votre raisonnement.

2.9 Quels sont les éléments essentiels dans la définition d'un contrat futures ?

2.10 Expliquez comment le système des appels de marge protège les investisseurs contre le risque de défaut.

2.11 Un investisseur prend une position longue sur deux contrats de jus d'orange congelé. Chaque contrat porte sur 15 000 livres. Le prix futures est de 160 cents par livre et le deposit initial de 6 000 USD par contrat, la marge à maintenir ensuite étant de 4 500 USD par contrat. Quelle variation minimale de prix entraînera un appel de marge ? Dans quelles conditions l'investisseur pourra-t-il retirer 2 000 USD de son compte de deposit ?

2.12 Montrez que si le prix futures d'une matière première est supérieur au prix spot pendant la période de livraison, il y a une opportunité d'arbitrage. En existe-t-il une si l'écart de prix est dans l'autre sens ? Justifiez votre réponse.

2.13 Expliquez la différence entre un ordre à prix touché et un ordre stop.

2.14 Que signifie un ordre stop de vente à 20,3 € avec une limite à 20,1 € ?

2.15 En fin de journée, un membre de la CC a une position longue sur 100 contrats avec un cours de compensation de 50 000 € par contrat. Le deposit initial est de 2 000 € par contrat. Le jour suivant, la position longue a augmenté de 20 contrats négociés à 51 000 € par contrat. Le cours de compensation de ce jour est de 50 200 €. Que se passe-t-il au niveau du compte de marge ?

2.16 Le 1er juillet 2006, une entreprise conclut un contrat forward pour acheter 10 millions de yens le 1er janvier 2007. Le 1er septembre 2006, elle conclut un contrat forward pour vendre 10 millions de yens le 1er janvier 2007. Décrivez les payoffs de cette stratégie.

2.17 Le cours forward du franc suisse en USD pour livraison dans 45 jours est 1,8204. Le prix futures est 0,5479. Expliquez ces deux cotations. Qu'est-il préférable de faire pour un investisseur qui souhaite vendre du franc suisse ?

2.18 Supposons que vous transmettiez à votre broker l'ordre de vendre un contrat sur carcasses de porc, échéance juillet. Décrivez le déroulement des opérations.

2.19 « La spéculation sur les marchés de futures est du jeu pur. Ce n'est pas dans l'intérêt général d'autoriser les spéculateurs à intervenir sur ces marchés. » Discutez ce point de vue.

2.20 « La position ouverte de la clôture d'hier et le volume de transactions d'aujourd'hui permettent de calculer la position ouverte à la clôture d'aujourd'hui. » Vrai ou faux ?

2.21 Que se passerait-il sur un marché organisé si un contrat ne spécifiait pas de manière précise la qualité du sous-jacent livrable ?

2.22 « Quand un contrat est échangé sur un marché futures, la position ouverte augmente d'une unité, reste identique ou baisse d'une unité. » Qu'en pensez-vous ?

2.23 Le 24 octobre 2006, vous prenez une position sur un contrat futures de bétail vivant au prix de 61,2 cents par livre. Vous fermez votre position le 21 janvier 2007 alors que le prix futures est 58,3 cents. Quel est votre profit ?

2.24 Un éleveur s'attend à disposer de 120 000 livres de bétail à vendre dans trois mois. Le contrat futures du CME porte sur 40 000 livres. Comment l'éleveur peut-il utiliser ce contrat pour se couvrir ? Quels sont, de son point de vue, les avantages et inconvénients d'une telle couverture ?

2.25 Une compagnie minière découvre un filon d'or en juillet 2005. La construction de la mine prendra six mois et l'extraction un an. Des contrats futures sur l'or sont négociés sur le New York Commodity Exchange, avec des livraisons tous les deux mois entre août 2005 et décembre 2006. Chaque contrat porte sur 100 onces d'or. Comment la compagnie peut-elle utiliser ce contrat pour se couvrir ?

Questions complémentaires

2.26 Une entreprise prend une position courte sur un contrat futures portant sur 5 000 boisseaux de blé à 250 cents par boisseau. Le deposit initial est de 3 000 USD et la marge à maintenir ensuite est 2 000 USD. Quelle variation minimale de prix entraînera un appel de marge ? Dans quelles conditions l'entreprise peut-elle retirer 1 500 USD de son compte ?

2.27 Supposons qu'il n'y ait pas de coûts de stockage sur le maïs et que le taux d'emprunt ou de prêt soit de 5 % par an. Comment pouviez-vous réaliser un profit le 4 février 2004 en opérant sur les contrats d'échéances mars et mai 2004 ? (Utilisez le tableau 2.2.)

2.28 Quelle position est équivalente à une position longue sur un contrat forward impliquant l'achat d'un actif au prix K combinée à la détention d'un put de prix d'exercice K, les deux contrats ayant la même date d'échéance ?

2.29 Les prix futures de deux contrats sur maïs d'échéances respectives mai 2006 et mai 2007 cotent pour le premier 217,5 et 258 cents pour le second. Le taux sans risque est de 5 % par an et le coût de stockage est de 20 cents par an. Existe-t-il une opportunité d'arbitrage ? Si oui, comment l'exploiter ?

Chapitre 3

Les stratégies de couverture par les contrats futures

De nombreux intervenants sur les marchés de futures sont des opérateurs en couverture (*hedgers*). Leur objectif est d'utiliser les contrats futures pour réduire le risque auquel ils sont confrontés. Ce risque peut être lié au prix du pétrole, au cours d'une devise, à la valeur d'un indice, etc. Une couverture est dite parfaite si elle permet d'éliminer complètement le risque. De fait, il est rarement possible d'obtenir ce type de protection sur les marchés, et l'analyse des méthodes de couverture consiste à définir les principes permettant la construction de stratégies dont les résultats sont aussi proches que possible de ceux d'une couverture parfaite.

Dans ce chapitre, nous étudions les différentes possibilités d'utilisation des contrats futures dans le but de couvrir une position. Quand faut-il retenir une position longue ou courte ? Quelle quantité de contrats permet la meilleure réduction du risque ? À ce stade, nous nous focalisons sur les stratégies statiques, c'est-à-dire que nous n'envisageons pas la possibilité d'ajustement de la position pendant la période de couverture. Au chapitre 15, nous aborderons les stratégies dynamiques dans lesquelles la position est sous constante surveillance et peut subir des ajustements.

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous identifions contrats forward et contrats futures. Cela signifie en particulier que nous ne nous préoccupons pas de l'actualisation car tous les flux surviennent à la date à laquelle la position est dénouée.

3.1 Les principes

Quand un individu ou une entreprise prennent une position de couverture sur un marché de futures, il s'agit en général d'éliminer, ou du moins de réduire considérablement, un risque. Supposons qu'une entreprise sache qu'elle peut perdre 10 000 € pour chaque baisse d'un cent du prix d'une matière première dans les prochains mois. Pour

se couvrir contre cette éventualité, le trésorier peut prendre une position courte sur un futures sur cette matière première. La position doit être construite de façon que le contrat futures gagne 10 000 € quand le prix baisse d'un cent. Bien sûr, si le prix augmente au lieu de baisser, le gain sur la matière première est compensé par une perte sur le contrat futures.

Les positions courtes

Une couverture courte (*short hedge*), telle que celle qui vient d'être décrite, est appropriée quand le hedger détient l'actif sous-jacent au contrat et prévoit de le vendre dans un avenir plus ou moins proche. Par exemple, un agriculteur qui cultive du maïs et qui se prépare à vendre sa récolte dans deux mois peut choisir une couverture de ce type. Mais elle peut aussi être utile lorsqu'on ne détient pas encore l'actif, mais qu'on doit le recevoir dans les mois à venir. Un exportateur français qui doit recevoir des USD dans trois mois peut avoir un manque à gagner si, d'ici là, l'USD se déprécie par rapport à l'euro. Une position courte sur un contrat futures sur USD peut assurer un taux de change pour la conversion future des dollars en euros.

Pour préciser ces mécanismes, considérons un producteur de pétrole qui, le 15 mai, vient de conclure un contrat pour la livraison d'un million de barils le 15 août. Il est alors dans une position analogue à celle que nous venons de décrire, puisque chaque baisse d'un cent du baril lui fait perdre 10 000 USD. Supposons que le prix spot du pétrole soit de 19 USD le baril le 15 mai et que le prix futures à 3 mois coté sur le New York Mercantile Exchange (NYMEX) soit de 18,75 USD le baril. Sachant que chaque contrat porte sur 1 000 barils, le producteur peut couvrir sa position en vendant 1 000 contrats échéance août. Si la position est dénouée le 15 août, l'effet du contrat sera d'assurer un prix de vente du brut proche de 18,75 USD le baril.

Pour illustrer ce qui peut survenir, imaginons que le prix du brut soit à 17,5 USD le 15 août. La firme reçoit 17,5 millions de la vente du pétrole, mais comme le 15 août se situe dans le mois de livraison du contrat, le prix futures sera à ce moment très proche de 17,5 USD. L'entreprise gagne approximativement 18,75 USD – 17,5 USD = 1,25 USD par baril, soit 1,25 million pour les 1 000 contrats. La position totale aura donc engendré un flux d'environ $17{,}5 + 1{,}25 = 18{,}75$ millions de dollars, soit 18,75 USD par baril.

Si le prix du brut se situait à 19,5 USD le 15 août, la firme recevrait 19,5 millions de la vente du produit mais perdrait $19{,}5 - 18{,}75 = 0{,}75$ million sur les contrats futures, ce qui, ici encore, donnerait un flux total de $19{,}5 - 0{,}75 = 18{,}75$ millions de dollars. Dans tous les cas, le flux final est de 18,75 millions du fait de la couverture par les futures.

Les positions longues

Les couvertures qui supposent de prendre une position longue peuvent être illustrées par l'exemple symétrique du précédent. Imaginons, le 15 janvier, une entreprise qui

doit acheter 100 000 livres de cuivre le 15 mai pour son processus de production. Le prix spot du cuivre est de 140 cents la livre, et le prix futures du contrat échéance mai est de 120 cents par livre. Le fabricant peut couvrir sa position par des contrats sur le cuivre cotés sur le COMEX. Chaque contrat porte sur 25 000 livres, il faut donc prendre une position longue sur quatre contrats. Cette stratégie a pour effet de fixer le prix d'achat futur à 120 cents. Si le prix spot le 15 mai est de 125 cents, l'industriel doit payer 125 000 USD pour acheter le cuivre, mais il gagne 5 cents par livre sur le contrat, soit 5 000 USD sur la totalité des quatre contrats puisque :

$$4 \times 25\ 000 \times (1{,}25 - 1{,}2) = 5\ 000 \text{ USD}$$

Si le prix du cuivre est à 105, le coût d'achat est seulement de 105 000 USD, mais 15 cents par livre sont perdus sur la position futures, soit un total de 15 000 USD, ramenant le décaissement total à 120 000 USD. Remarquons qu'ici il vaut mieux acheter le cuivre à terme par l'intermédiaire d'un futures que de l'acheter au comptant en janvier, puisque le prix spot est de 140 cents, auxquels il convient d'ajouter le coût de stockage jusqu'en mai et les intérêts à payer, liés au financement de l'achat. Toutefois, pour une entreprise qui utilise de manière habituelle le cuivre dans son processus de production, le prix spot plus élevé est compensé par l'avantage consistant à détenir le produit physique plutôt que le futures[1]. En effet, elle pourrait très bien en avoir besoin plus tôt et ne craint pas une quelconque pénurie. Bien sûr, si la firme est sûre de ne pas avoir besoin de ce cuivre avant le 15 mai, le rendement d'opportunité n'a pas de valeur et une position sur le contrat futures est alors plus intéressante que l'achat immédiat du cuivre.

Prendre une position longue peut aussi être justifié par la volonté d'annuler une position courte prise précédemment. Lorsqu'un investisseur a vendu à découvert une action (voir la section 5.2 pour une discussion sur la vente à découvert), une partie de son risque est constituée par l'évolution de l'indice de marché du fait du lien entre cet indice et l'action considérée. L'investisseur peut alors avoir intérêt à couvrir cette partie du risque en prenant une position longue sur un futures sur indice. Ce type de stratégie sera analysé plus loin dans ce chapitre.

Ces divers exemples supposent que la position est dénouée pendant le mois de livraison du contrat. La couverture a donc le même effet que si la livraison associée au contrat était réellement réalisée. Mais en général ce n'est pas le cas car la livraison est coûteuse. Le plus souvent, les hedgers en position longue évitent cette livraison en dénouant leur position sur le contrat avant la période de livraison.

Bien que nous ayons identifié prix forward et prix futures, il faut noter que la performance d'une couverture est peu affectée par la distinction. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 2, la position sur les futures engendre des flux quotidiens, alors qu'une position sur un contrat forward donne lieu à un seul flux terminal.

1. Ce rendement d'opportunité (*convenience yield*) sera étudié au chapitre 5.

3.2 Les arguments pour et contre la couverture

Les arguments en faveur de la couverture sont évidents à la lecture des exemples précédents. La plupart des entreprises industrielles n'ont aucune compétence particulière pour prévoir la valeur de telle ou telle variable économique dans trois ou six mois. Par conséquent, la couverture des risques associés à la variation de ces variables paraît judicieuse. Les entreprises couvertes peuvent alors se concentrer sur ce qu'elles savent faire, produire et gérer des risques industriels.

En pratique, il reste cependant de nombreux risques résiduels qui ne sont pas couverts en prenant une position comme celles que nous venons d'exposer. Le reste de cette section en expose les raisons.

La couverture et les actionnaires

Un des arguments souvent évoqué à l'encontre de la couverture stipule que les actionnaires peuvent, s'ils le souhaitent, se couvrir eux-mêmes. Ils n'ont pas besoin que l'entreprise le fasse. Cet argument pose quand même un problème. Il suppose implicitement que les actionnaires ont la même information que les managers sur les risques encourus. Le plus souvent, ce n'est pas le cas. Cet argument ignore aussi les imperfections de marché comme les coûts de transaction. Ceux-ci sont proportionnellement moindres sur les transactions importantes. La couverture est donc susceptible d'être moins coûteuse pour la firme que pour les investisseurs individuels. De plus, la taille des contrats sur les marchés organisés rend le plus souvent impossible la couverture par un actionnaire individuel.

Les actionnaires peuvent, par contre, facilement diversifier leur portefeuille. Un investisseur détenant un portefeuille bien diversifié peut ainsi éviter de nombreux risques auxquels sont soumises les entreprises. Par exemple, un individu peut détenir des actions d'une entreprise utilisatrice de cuivre mais aussi celles d'un producteur de cuivre, de façon que l'exposition au risque de prix du cuivre soit minime. Si les firmes agissent dans l'intérêt d'actionnaires détenant des portefeuilles bien diversifiés, on peut mettre en doute la nécessité, pour les entreprises, de se couvrir. Cependant, savoir si un argument de ce type est de nature à influencer les managers est une question ouverte.

Couverture et concurrence

Si, dans un certain secteur, la couverture n'est pas la norme, il peut ne pas être judicieux pour une entreprise de se distinguer de ses concurrents. La concurrence dans le secteur peut en effet conduire les prix de vente des produits à s'ajuster aux variations des coûts supportés (prix des matières premières, taux d'intérêt, taux de change, etc.) par les sociétés. Par conséquent, une compagnie qui ne se couvre pas peut espérer garder un taux de marge constant. Par contre, une firme qui se couvre aura un taux de marge beaucoup plus volatil.

Considérons par exemple deux entreprises fabriquant des bijoux en or, appelées Orsur et Orisk ; dans ce secteur, les entreprises ne se couvrent généralement pas contre les variations de prix de leur matière première principale et Orisk ne fait pas exception. Par contre, Orsur a décidé d'agir différemment en couvrant ses achats des 18 prochains mois par une position longue sur des contrats futures.

La compagnie Orsur réduit-elle son risque en agissant ainsi ? Si le prix de l'or augmente, le prix des bijoux suivra et le taux de marge d'Orisk ne sera pas modifié, alors que celui d'Orsur augmentera. Si, par contre, le prix de l'or baisse, le prix des bijoux diminuera et le taux de marge d'Orsur fera de même, alors que celui d'Orisk restera constant. On peut même imaginer que le taux de marge d'Orsur devienne négatif comme la conséquence de la décision de couverture. Les différentes situations sont résumées dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 : Les dangers de la couverture quand les concurrents ne se couvrent pas

Variations du prix de l'or	Effet sur le prix des bijoux	Effet sur le profit d'Orisk	Effet sur le profit d'Orsur
Hausse	Hausse	Aucun	Hausse
Baisse	Baisse	Aucun	Baisse

On peut en conclure que tous les effets des variations de prix sur la profitabilité de l'entreprise doivent être pris en compte dans l'élaboration d'une stratégie de couverture.

Considérations diverses

Il est important de garder à l'esprit qu'une stratégie de couverture par des contrats futures peut aussi bien améliorer les profits que les diminuer par rapport à une situation sans couverture. Dans l'exemple du producteur de pétrole considéré précédemment, si le prix du pétrole baisse, la société perd de l'argent sur ses ventes et la position sur les contrats futures permet de compenser cette perte. La situation est donc meilleure avec la couverture et les supérieurs hiérarchiques du trésorier apprécieront. Symétriquement, si le prix du pétrole monte, le résultat des ventes augmente mais cette augmentation est compensée par les pertes sur les contrats futures et le résultat est inférieur à celui qui aurait été obtenu sans couverture.

Quoique la décision de couvrir ait été parfaitement logique, il se peut que le trésorier ait quelques difficultés à la justifier *a posteriori*. Si le prix est de 21,75 USD le baril à la fin de la période de couverture, la perte sur les contrats futures est de 3 millions de dollars. On peut imaginer la conversation entre le PDG et le trésorier.

Le PDG : C'est terrible. Nous avons perdu 3 millions de dollars sur le marché à terme en quelques mois. Comment est-ce possible ? J'exige une explication.

Le trésorier : L'objet des contrats futures n'était pas de faire des profits mais de nous couvrir contre les variations de prix. N'oubliez pas que nous avons augmenté notre résultat de 3 millions sur les ventes de pétrole à cause de l'augmentation du prix.

Le PDG : Quel rapport ! C'est comme si vous disiez qu'il ne faut pas s'inquiéter de la baisse des ventes en Californie sous prétexte que celles de New York sont en hausse !

Le trésorier : Si le prix du baril avait baissé...

Le PDG : Peu m'importe de savoir ce qui se serait passé si le prix avait baissé. Le fait est qu'il a monté ! Je ne vois vraiment pas ce qui vous a pris de jouer sur ces marchés. Nos actionnaires vont attendre d'excellents résultats ce trimestre et je vais devoir leur expliquer que vos initiatives ont réduit nos profits de 3 millions. J'ai peur que vous ne perdiez vos primes pour cette année.

Le trésorier : Ce n'est pas juste. Je...

Le PDG : Pas juste ! Vous avez même de la chance de ne pas être viré. Vous avez perdu 3 millions.

Le trésorier : Tout dépend de la façon dont on voit le problème.

Cette petite conversation permet de comprendre pourquoi tant de trésoriers sont réticents face aux opérations de couverture. Celles-ci réduisent le risque de l'entreprise, mais elles peuvent mettre le trésorier dans une position délicate si les autres décideurs ne comprennent pas parfaitement les tenants et aboutissants de cette démarche. La seule solution est que la politique de couverture soit expliquée à l'ensemble des décideurs de façon que chacun saisisse bien les enjeux et les résultats possibles. L'idéal est que cette politique soit établie par la Direction générale et clairement communiquée à l'ensemble des directions et aux actionnaires (voir l'encadré 3.1 pour une discussion sur la politique de couverture des mines d'or).

Encadré 3.1 La stratégie de couverture des compagnies minières (sur l'or)

Il est assez naturel pour une entreprise qui exploite des mines d'or de chercher à se couvrir contre les variations de prix de l'or. Il se passe en général plusieurs années avant qu'une mine soit épuisée. Par conséquent, quand une entreprise décide d'entreprendre l'exploitation, elle s'expose pour longtemps aux variations de prix de ce métal précieux. De ce fait, un projet qui peut paraître profitable peut devenir largement déficitaire si le prix de l'or chute.

C'est pourquoi les mines d'or prennent en général la précaution de présenter de manière détaillée leurs stratégies de couverture aux actionnaires potentiels. Il reste néanmoins des exploitants qui décident de ne pas se couvrir. Dans ce cas, les investisseurs qui achètent les actions de ces sociétés veulent pleinement profiter de la hausse si elle survient, quitte à prendre le risque d'une perte qui peut être conséquente en cas de chute des cours.

Celles qui, en revanche, décident de se couvrir estiment la production future et prennent des positions courtes sur des contrats futures ou forward, de façon à assurer un prix de revente fixé à leur production.

Imaginez que vous soyez Goldman Sachs et que vous veniez de prendre position (longue) sur un forward avec pour contrepartie une compagnie minière. Comment pouvez-vous couvrir votre propre risque ? La réponse est la suivante : vous allez emprunter de l'or à la banque centrale et le revendre ensuite au prix du marché (les banques centrales disposent en général de grandes quantités d'or). À l'échéance du contrat, vous allez acheter l'or à la compagnie minière, au prix prévu dans le contrat forward, et vous rendrez cet or à la banque centrale qui vous l'a prêté. Vous aurez simplement payé un intérêt à la banque centrale (de l'ordre de 1,5 % annuel) pour le prêt de l'or.

3.3 Le risque de base

Les exemples donnés dans la section précédente sont presque trop beaux pour être vrais. Le hedger était capable d'identifier la date précise à laquelle l'actif sous-jacent devait être acheté ou vendu. Il pouvait utiliser des contrats futures qui permettaient d'éliminer entièrement le risque de variation de prix. En pratique, c'est généralement moins simple, pour les raisons suivantes :

1. L'actif dont les variations de prix doivent être couvertes n'est pas forcément le même que le sous-jacent du contrat futures.
2. Le hedger peut ne pas connaître avec exactitude la date à laquelle il devra acheter ou vendre l'actif.
3. La stratégie de couverture peut éventuellement imposer de dénouer la position sur les contrats futures bien avant leur échéance.

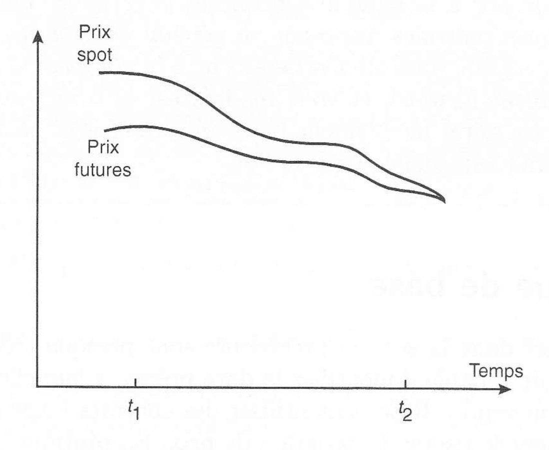
Ces différents éléments donnent naissance au *risque de base.*

La base

La base est définie comme la différence entre le prix au comptant et le prix futures[2]. Si l'actif à couvrir et le sous-jacent du contrat futures coïncident, la base sera nulle à l'échéance du contrat. Mais avant cette date, elle peut être positive ou négative. Le graphique 3.1 montre comment la base peut changer au cours du temps dans le cas d'une base positive avant l'échéance. Pour examiner plus précisément le risque de base, notons :

2. La définition alternative, base = prix futures – prix spot, est parfois utilisée, spécialement quand le sous-jacent du contrat est un actif financier. Les relations montrées dans cette partie sont inversées dans ce cas.

S_1 le prix spot à la date t_1
S_2 le prix spot à la date t_2
F_1 le prix futures à la date t_1
F_2 le prix futures à la date t_2
b_1 la base à la date t_1
b_2 la base à la date t_2



Graphique 3.1 : Variation de la base au cours du temps.

Supposons qu'une couverture soit mise en œuvre à la date t_1 et dénouée à la date t_2 ; par exemple, considérons des prix spot et futures en t_1 égaux à 2,5 € et 2,2 €, ces mêmes prix en date t_2 étant 2 € et 1,9 €. La définition de la base permet d'écrire :

$$b_1 = S_1 - F_1$$

$$b_2 = S_2 - F_2$$

ce qui, dans notre exemple, se traduit par $b_1 = 0{,}3$ € et $b_2 = 0{,}1$ €.

Analysons tout d'abord la situation d'un hedger qui prend une position courte en t_1 car il sait qu'il vendra le sous-jacent en t_2. Le prix spot de l'actif sera S_2 et le gain/perte sur le contrat futures est égal à $F_1 - F_2$. Le prix effectivement obtenu pour une unité d'actif vendue est donc :

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$$

c'est-à-dire 2,3 €. La valeur de F_1 est connue dès la date t_1, alors que celle de b_2 sera observée en t_2, ce qui engendre le risque de base.

Le risque auquel est exposé un hedger provient parfois d'un actif qui n'est pas le sous-jacent du contrat. Le risque de base est susceptible d'augmenter dans ce cas (il s'agit en fait d'un risque de corrélation dans cette situation). Notons S_2^* le prix en date t_2 de l'actif à couvrir ; le hedger s'assure, comme précédemment, un prix d'achat ou de vente pour l'actif égal à :

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$$

que l'on peut réécrire :

$$F_1 + (S_2^* - F_2) + (S_2 - S_2^*)$$

Les termes $(S_2^* - F_2)$ et $(S_2 - S_2^*)$ sont les deux composantes de la base. Le premier est la base qui serait observée si l'actif sous-jacent au contrat était le même que l'actif négocié, alors que le second traduit la différence entre ces deux actifs. Il est bon de noter que le risque de base peut améliorer ou détériorer la position du hedger. Dans le cas d'une couverture courte, la position s'améliore si la base s'élargit, alors qu'elle se détériore si la base devient plus étroite. Pour une couverture longue, la situation inverse est observée.

Le choix du contrat

Lorsqu'une couverture parfaite n'est pas disponible, deux décisions doivent être prises.

1. Choisir l'actif sous-jacent du contrat parmi les contrats disponibles.
2. Choisir le mois de livraison.

Quand l'actif à couvrir est disponible comme support de contrat, la réponse à la première interrogation est immédiate. Quand ce n'est pas le cas, il faut analyser soigneusement l'offre de contrats pour sélectionner celui dont les prix futures sont le plus corrélés avec l'actif à couvrir.

Le choix de l'échéance est influencé par plusieurs facteurs. Dans les exemples précédents, nous avions retenu le mois de livraison contenant la date à laquelle l'actif serait acheté ou vendu. Dans la pratique, c'est souvent un mois de livraison ultérieur qui est retenu. Il s'agit d'une simple précaution car les prix futures ont parfois des comportements erratiques pendant le mois de livraison. De plus, quand la période de livraison est le mois entier, un hedger avec une position longue peut se voir obligé de prendre livraison s'il possède encore le contrat au début de cette période, ce qui n'est pas forcément son objectif.

De manière générale, le risque de base augmente avec la durée de vie résiduelle du contrat à la date de clôture de la position de couverture. Par conséquent, une règle de bon sens consiste à choisir le mois de livraison le plus proche postérieur au mois qui contient la date de clôture souhaitée de la position de couverture. Si, pour un contrat donné, les échéances disponibles sont mars, juin, septembre et décembre, on choisira le contrat mars pour des couvertures dont l'horizon se situe en décembre, janvier février, on choisira juin pour des couvertures dont l'horizon est mars, avril, mai, et ainsi de suite. Bien sûr, cette règle suppose qu'il y a une liquidité suffisante sur le marché des différents contrats. Il est courant que la liquidité soit beaucoup plus forte sur l'échéance la plus courte, ce qui dans certains cas peut amener le hedger à choisir systématiquement l'échéance la plus courte, et éventuellement à renouveler sa position si nécessaire. Cette stratégie est abordée un peu plus loin.

Exemple 3.1

Le 1er mars, une entreprise américaine s'attend à recevoir 50 millions de yens de l'un de ses clients japonais à la fin du mois de juillet. Les mois de livraison des contrats futures sur le yen (JPY) ont pour échéances les fins de trimestres civils, et chaque contrat porte sur 12,5 millions de JPY. L'entreprise prend alors une position courte sur quatre contrats échéance septembre. À la fin du mois de juillet, quand l'encaissement arrive, la position de couverture est dénouée par le rachat de quatre contrats. Le taux de change futures le 1er mars est de 0,7800 cents par yen, et fin juillet, les prix spot et futures correspondants sont respectivement 0,7200 et 0,7250.

Le gain sur les contrats futures est 0,7800 – 0,7250 = 0,0550 cents par yen. La base est, quant à elle, égale à 0,7200 – 0,7250 = –0,0050 cents quand la position est dénouée. Le prix effectivement obtenu en cents pour 100 yens est :

$$0{,}7200 + 0{,}0550 = 0{,}7750$$

qu'on peut encore écrire :

$$0{,}7800 - 0{,}0050 = 0{,}7750$$

Par conséquent, le montant total reçu, en dollars, est égal à 50 × 0,00775 million de dollars, soit 387 500 USD.

Exemple 3.2

Le 8 juin, une entreprise sait qu'elle devra acheter 20 000 barils de pétrole brut en octobre ou novembre. La taille des contrats traités sur le NYMEX est de 1 000 barils par contrat. L'entreprise décide de prendre une position longue sur 20 contrats échéance décembre à un prix futures de 18,00 USD le baril. L'achat du pétrole est finalement réalisé le 10 novembre et la position sur les contrats est dénouée à cette date, alors que les prix spot et futures sont respectivement 20,00 USD et 19,10 USD.

Le gain sur les contrats est 19,10 – 18,00 = 1,10 USD par baril. À la date de clôture de la position, la base est de 20,00 – 19,10 = 0,90 USD. Le prix effectivement payé par baril s'écrit comme la différence entre le prix spot et le gain sur les contrats :

$$20{,}00 - 1{,}10 = 18{,}90 \text{ USD}$$

ou encore comme le prix futures initial plus la base, c'est-à-dire :

$$18{,}00 \text{ USD} + 0{,}90 \text{ USD} = 18{,}90 \text{ USD}$$

Le prix total payé est donc 18,90 × 20 000 = 378 000 USD.

3.4 La couverture croisée

Le ratio de couverture est le rapport du volume de la position à prendre sur le marché futures pour couvrir une position et du volume de la position sur l'actif à couvrir. Pour l'instant, nous avons toujours utilisé un ratio égal à 1. Dans l'exemple 3.2, l'exposition au risque concernait 20 000 barils de pétrole et la position sur les futures correspondait exactement à cette quantité. Cependant, la minimisation du risque par le hedger n'impose pas toujours de choisir cette valeur pour le ratio de couverture.

Le ratio de couverture de variance minimum

Nous utiliserons les notations suivantes :

ΔS : variation du prix spot pendant la période de couverture

ΔF : variation du prix futures pendant la période de couverture

σ_S : écart-type de ΔS

σ_F : écart-type de ΔF

ρ : corrélation entre ΔS et ΔF

h^* : ratio de couverture qui minimise le risque de la position du hedger

Dans l'annexe de ce chapitre, nous montrons que le ratio h^* s'écrit :

$$h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F} \tag{3.1}$$

Le ratio de couverture optimal est donc le produit de la corrélation des variations de prix et du ratio des écarts-types de ΔS et ΔF. Le graphique 3.2 montre comment évolue la variance de valeur de la position couverte en fonction du ratio retenu.

Lorsque la corrélation est parfaite, égale à 1, et que les variances sont égales, le ratio est évidemment égal à 1. De manière générale, le ratio optimal sera la pente de la droite de régression de ΔS sur ΔF, comme le montre le graphique 3.3. Si ΔF est deux fois plus volatil que ΔS et si la corrélation est parfaite, le ratio sera égal à 0,5, ce qui s'explique intuitivement puisque les variations de F sont deux fois plus importantes que celles de S. L'efficacité de la couverture est mesurée par la part de variance éliminée par la couverture, c'est-à-dire :

$$h^{*2} \frac{\sigma_F^2}{\sigma_S^2}$$

Les paramètres ρ, σ_F et σ_S de l'équation (3.1) sont estimés à partir de données historiques sur ΔS et ΔF (l'hypothèse implicite est donc que la relation entre les variations passées restera stable dans le futur). On mesure généralement les variations de prix sur des intervalles de longueur constante. Dans l'absolu, la longueur des intervalles devrait être la même que la durée de la couverture, mais en pratique, cela limite considérablement le nombre de données et des intervalles plus courts sont retenus.

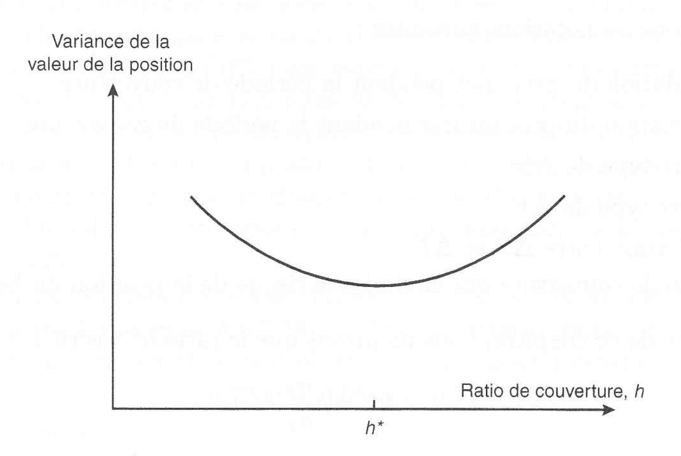
Le nombre optimal de contrats

Notons :

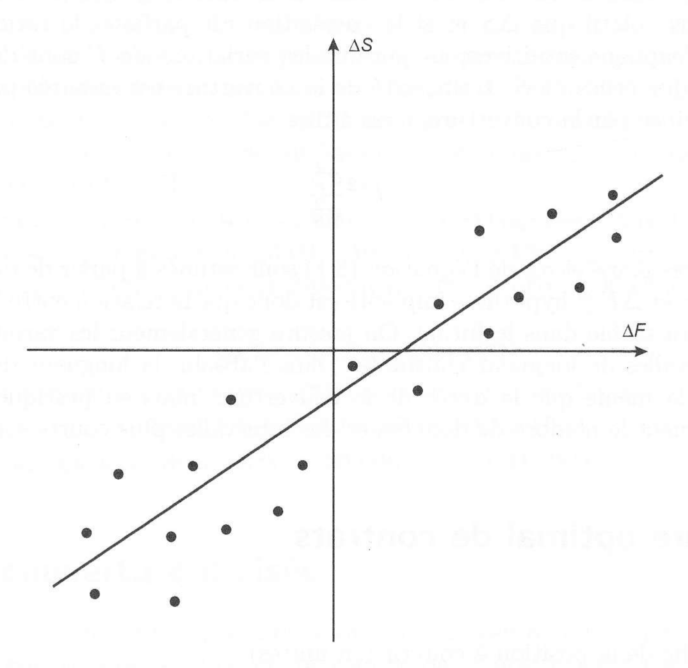
N_A : taille de la position à couvrir (en unités)

Q_F : taille d'un contrat futures (en unités)

N^* : nombre optimal de contrats futures pour la couverture



Graphique 3.2 : Relation entre la variance de valeur de la position et le ratio de couverture.



Graphique 3.3 : Régression de la variation du prix spot sur la variation du prix futures.

Les contrats futures doivent avoir, en fonction des résultats précédents, une valeur nominale h^*N_A. Par conséquent, le nombre optimal de contrats est égal à :

$$N^* = \frac{h^* N_A}{Q_F} \tag{3.2}$$

■ **Exemple 3.3**

Une compagnie aérienne doit acheter deux millions de gallons de kérosène dans un mois et décide de se couvrir par des contrats futures sur le fuel domestique[3]. Le tableau 3.2 donne, pour $n = 15$ mois consécutifs, les variations ΔS (kérosène) et ΔF (fuel domestique) en USD par gallon. On notera x_i et y_i les variations respectives de F et S pour le mois i. Le tableau 3.2 permet de calculer :

$$\sum x_i = -0{,}013 \qquad \sum x_i^2 = 0{,}0138$$

$$\sum y_i = 0{,}003 \qquad \sum y_i^2 = 0{,}0097$$

$$\sum x_i y_i = 0{,}0107$$

On peut alors, à l'aide des formules statistiques usuelles, estimer les écarts-types et le coefficient de corrélation :

$$\hat{\sigma}_F = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n-1} - \frac{(\sum x_i)^2}{n(n-1)}} = 0{,}0313$$

$$\hat{\sigma}_S = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n-1} - \frac{(\sum y_i)^2}{n\,(n-1)}} = 0{,}0263$$

$$\rho = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{\left[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2\right]\left[n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2\right]}} = 0{,}928$$

L'équation (3.1) nous indique que le ratio de variance minimum h^* est donné par :

$$0{,}928 \times \frac{0{,}0263}{0{,}0313} = 0{,}78$$

Chaque contrat sur fuel domestique porte sur 42 000 gallons ; l'équation (3.2) nous donne alors le nombre de contrats :

$$\frac{0{,}78 \times 2\ 000\ 000}{42000} = 37{,}14$$

En arrondissant à l'entier voisin, le nombre de contrats est de 37.

3. Pour des informations supplémentaires sur la façon dont Delta Airlines utilise le contrat sur fuel domestique pour couvrir ses achats de kérosène, voir A. Ness, « Delta Wins on Fuel », *Risk*, juin 2001, p. 8.

Tableau 3.2 : Données pour calculer le ratio de variance minimum quand le contrat sur le fuel domestique est utilisé pour couvrir l'achat de kérosène

Mois i	**Variation du prix futures par gallon** ($= x_i$)	**Variation du prix du kérosène par gallon** ($= y_i$)
1	0,021	0,029
2	0,035	0,020
3	–0,046	–0,044
4	0,001	0,008
5	0,044	0,026
6	–0,029	–0,019
7	–0,026	–0,010
8	–0,029	–0,007
9	0,048	0,043
10	–0,006	0,011
11	–0,036	–0,036
12	–0,011	–0,018
13	0,019	0,009
14	–0,027	–0,032
15	0,029	0,023

3.5 Les futures sur indices

Nous allons maintenant analyser les futures sur indices et la façon dont ils sont utilisés dans le cadre de stratégies de couverture.

Un indice d'actions représente un portefeuille hypothétique d'actions et l'évolution de l'indice dans le temps retrace les variations du portefeuille qu'il représente. Le poids de chaque action dans l'indice est la proportion du portefeuille investie dans cette action. L'accroissement relatif de l'indice dans un intervalle de temps donné correspond à la croissance (en pourcentage) de la valeur du portefeuille qu'il représente au cours de cette période. Les dividendes payés par les titres ne sont pas, en général, intégrés dans le calcul de l'indice. En conséquence, l'évolution de la valeur d'un indice mesure plutôt les gains/pertes en capital sur le portefeuille représentatif de l'indice[4].

Même si la composition d'un indice reste inchangée, les poids des actions qui le composent changent dans le temps en fonction des cotations de ces actions. Quand le prix d'un titre augmente plus que les autres, son poids dans l'indice va augmenter. Certains indices sont construits sur l'hypothèse d'un portefeuille contenant une unité de chaque action. Dans ce cas, le poids est proportionnel au cours coté et un ajustement

4. Les indices de rentabilité totale (*total return index*) sont une exception à cette règle. Ils sont calculés en supposant que les dividendes sont réinvestis dans le portefeuille représentatif de l'indice.

est réalisé lorsqu'une opération sur titres a lieu, comme une distribution d'actions gratuites. D'autres indices accordent aux actions qui les composent un poids proportionnel à leurs capitalisations boursières. Dans ce cas, l'ajustement aux opérations sur titres est automatique.

Les indices d'actions

Le tableau 3.3 montre les prix futures de contrats portant sur un certain nombre d'indices, tels qu'ils apparaissaient dans le *Wall Street Journal* du 5 février 2004. Les prix sont des prix de clôture de la veille, c'est-à-dire du 4 février 2004.

L'indice DAX-30 allemand et l'indice CAC 40 français sont des indices domestiques basés respectivement sur 30 et 40 titres. Le contrat DAX-30 est coté sur l'Eurex, alors que le contrat CAC 40 est coté sur Euronext.LIFFE.

Les principaux indices américains sont :

- Le Dow Jones Industrial Average, basé sur 30 titres. Les poids sont proportionnels aux prix des titres. Deux contrats futures sur cet indice, cotés sur le Chicago Board of Trade (CBOT), portent respectivement sur 10 USD et 5 USD fois la valeur de l'indice.
- Le Standard & Poors 500 (S&P500) est composé de 500 titres ; les poids sont proportionnels aux capitalisations boursières. Cet indice regroupe 80 % de la capitalisation boursière du New York Stock Exchange (NYSE). Deux contrats futures sur cet indice sont négociés sur le Chicago Mercantile Exchange (CME). L'un porte sur 250 USD fois la valeur de l'indice, et l'autre sur 50 USD fois cette valeur.
- Le Nasdaq100 comporte 100 titres cotés par le National Association of Securities Dealers Automatic Quotations Service. Le CME propose deux contrats sur cet indice.

Le principal indice britannique est le FTSE100, qui comporte 100 titres cotés sur le London Stock Exchange (LSE).

Le DJ Euro Stoxx 50 (pour la zone euro) et le DJ Stoxx 50 (pour l'Europe) sont deux indices de 50 actions européennes importantes. Les contrats futures sur cet indice sont cotés sur l'Eurex. Ils portent sur 10 € fois la valeur de l'indice.

Tableau 3.2 : Prix futures des contrats sur indice publiés dans le Wall Street Journal du 5 février 2004 : les colonnes montrent le mois, les prix d'ouverture, les plus haut et plus bas journaliers, le prix de compensation, la variation journalière, les plus haut et plus bas sur la durée de vie du contrat et la position ouverte.

Index Futures

DJ Industrial Average (CBT)-$10 x index

Mar	10446	10507	10418	10440	-38	10687	8580	36,831
June	...	...	...	10419	-38	10475	9000	581

Est vol 11,816; vol Tue 182; open int 37,455, -65.
Idx prl: Hi 10524.22; Lo 10447.18; Close 10470.74, -34.44.

Mini DJ Industrial Average (CBT)-$5 x index

Mar	10446	10506	10417	10440	-38	10687	9069	46,175

Vol Wed 70,499; open int 48,145, -1,739.

DJ-AIG Commodity Index (CBT)-$100 x index

Feb	...	...	...	439.3	-3.5	456.2	452.1	2,351

Est vol 1,150; vol Tue 220; open int 2,571, unch.
Idx prl: Hi 139.159; Lo 137.163; Close 137.350, -1.171.

S&P 500 Index (CME)-$250 x index

Mar	113290	113360	112300	112390	-910	123950	77700	585,763
June	112620	113100	112250	112290	-910	115350	78000	21,212

Est vol 46,110; vol Tue 45,600; open int 610,710, +107.
Idx prl: Hi 1136.03; Lo 1124.74; Close 1126.52, -9.51.

Mini S&P 500 (CME)-$50 x index

Mar	113300	113350	112200	112400	-900	115500	98650	539,366

Vol Wed 595,531; open int 550,820, -18,936.

S&P Midcap 400 (CME)-$500 x index

Mar	584.50	586.00	580.30	580.80	-6.00	603.25	559.75	15,879

Est vol 582; vol Tue 672; open int 15,880, -98.
Idx prl: Hi 587.39; Lo 580.91; Close 581.63, -5.76.

Nasdaq 100 (CME)-$100 x index

Mar	148850	148850	146200	146300	-2400	150900	146200	72,861

Est vol 14,295; vol Tue 9,985; open int 72,918, -246.
Idx prl: Hi 1482.35; Lo 1461.01; Close 1462.61, -29.24.

Mini Nasdaq 100 (CME)-$20 x index

Mar	1488.0	1489.0	1461.5	1463.0	-24.0	1563.0	1307.0	249,320

Vol Wed 257,039; open int 250,794, +4,618.

GSCI (CME)-$250 x nearby index

Feb	264.50	266.10	258.50	258.50	-5.50	274.50	251.50	14,534

Est vol 243; vol Tue 104; open int 14,901, +31.
Idx prl: Hi 265.61; Lo 258.87; Close 259.53, -4.02.

TRAKRS Long-Short Tech (CME)-$1 x index

July	40.30	40.30	39.82	39.82	-1.40	45.25	19.76	410,834

Est vol 87; vol Tue 150; open int 410,834, +150.
Idx prl: Hi 40.03; Lo 38.16; Close 38.56, -1.47.

Russell 2000 (CME)-$500 x index

Mar	576.50	576.50	563.50	563.75	-14.40	585.75	557.50	22,953

Est vol 3,572; vol Tue 969; open int 22,953, -42.
Idx prl: Hi 579.15; Lo 564.03; Close 564.03, -15.12.

Russell 1000 (NYFE)-$500 x index

Mar	...	...	...	601.00	-5.05	618.00	603.00	77,631

Est vol 79; vol Tue 66; open int 77,631, -72.
Idx prl: Hi 607.34; Lo 601.23; close 602.10, -5.24.

NYSE Composite Index (NYFE)-$50 x index

Mar	...	...	...	6509.50	-57.00	6556.00	6115.00	1,260

Est vol 0; vol Tue 0; open int 1,260, unch.
Idx prl: Hi 6574.76; Lo 6520.91; Close 6526.10, -48.72.

U.S. Dollar Index (FINEX)-$1,000 x index

Mar	87.04	87.30	86.92	87.02	.04	103.18	85.10	16,414
June	...	...	...	87.43	.04	88.37	85.71	2,116

Est vol 2,500; vol Tue 2,272; open int 18,543, +610.
Idx prl: Hi 87.10; Lo 86.70; open int 86.84, +.05.

Nikkei 225 Stock Average (CME)-$5 x index

Mar	10400.	10510.	10360.	10380.	-265	11155.	7670.	30,555

Est vol 3,558; vol Tue 2,468; open int 30,730, +33.
Index: Hi 10627.26; Lo 10418.77; Close 10447.25, -194.67.

Share Price Index (SFE)-AUD 25 x index

Mar	3257.0	3267.0	3250.0	3254.0	-2.0	3346.0	2700.0	160,822
June	3264.0	3278.0	3264.0	3266.0	-2.0	3350.0	2700.0	3,931

Est vol 10,928; vol Tue 10,169; open int 167,890, +2,133.
Index: Hi 3273.5; Lo 3263.6; Close 3265.6, +1.3.

CAC-40 Stock Index (MATIF)-€10 x index

Feb	3626.0	3632.5	3603.0	3614.0	-29.5	3729.5	3531.5	346,178
Mar	3630.0	3634.5	3610.5	3620.0	-29.5	3734.5	2885.0	130,956
June	3563.5	3563.5	3562.5	3560.5	-29.0	3651.5	3282.0	8,810

Est vol 77,301; vol Tue 76,586; open int 489,860, +19,063.
Index: Hi 3625.38; Lo 3602.94; Close 3607.57, -30.64.

Xetra DAX (EUREX)-€25 x index

Mar	4050.0	4056.0	4018.0	4029.5	-31.0	4190.0	3237.5	286,286
June	4065.0	4074.5	4042.5	4050.5	-31.0	4210.0	3251.0	10,167
Sept	4086.5	4096.0	4064.0	4072.0	-31.5	4231.0	3961.0	2,874

Vol Wed 113,473; open int 299,327, -1,522.
Index: Hi 4050.08; Lo 4008.80; Close 4028.37, -29.14.

FTSE 100 Index (LIFFE)-£10 x index

Mar	4340.0	4386.5	4339.5	4376.0	10.0	4509.5	3895.5	426,561
June	4352.0	4385.5	4352.0	4384.5	9.5	4514.0	4019.5	17,929
Sept	4372.5	4374.5	4372.5	4394.5	10.0	4526.5	4288.5	10,192

Vol Wed 59,473; open int 462,529, +1,934.
Index: Hi 4409.30; Lo 4369.10; Close 4398.50, +7.90.

DJ Euro STOXX 50 Index (EUREX)-€10 x index

Mar	2834.0	2841.0	2820.0	2821.0	-27.0	2921.0	2376.0	1,226,828
June	2797.0	2800.0	2785.0	2783.0	-27.0	2883.0	2364.0	88,041
Sept	2796.0	2796.0	2787.0	2782.0	-27.0	2881.0	2709.0	14,454

Vol Wed 384,795; open int 1,329,323, -2,788.
Index: Hi 2839.55; Lo 2816.18; Close 2819.92, -21.34.

DJ STOXX 50 Index (EUREX)-€10 x index

Mar	2675.0	2689.0	2671.0	2674.0	-14.0	2757.0	2393.0	39,662
June	...	...	...	2653.0	-14.0	...	...	640

Vol Wed 1,895; open int 40,302, +513.
Index: Hi 2698.24; Lo 2681.59; Close 2689.82, -5.23.

Sources : Dow Jones & Company, Inc. 2004.

La couverture d'un portefeuille d'actions

Les futures sur indices sont en général utilisés pour couvrir un portefeuille d'actions contre les variations de prix. Notons P la valeur du portefeuille aujourd'hui et A la valeur du portefeuille des titres composant l'indice sous-jacent au contrat. Si le portefeuille duplique exactement l'indice, le ratio de couverture est égal à 1, et

l'équation (3.2) montre que le nombre optimal de contrats est simplement :

$$N^* = \frac{P}{A} \tag{3.3}$$

Considérons par exemple un portefeuille qui vaut 3 millions d'euros et qui duplique le CAC 40. Le contrat futures CAC 40 coté sur Euronext.LIFFE porte sur 10 € fois l'indice. Si l'indice est à 3 000, on a $P = 3\ 000\ 000$ et $A = 10 \times 3\ 000$; il faut donc prendre une position courte sur 100 contrats pour couvrir la position.

Quand le portefeuille ne duplique pas exactement l'indice, ce qui est le cas le plus courant, on peut utiliser le β du portefeuille (donné par le modèle d'équilibre des actifs financiers) pour déterminer la couverture optimale. β est la pente de la droite de régression des rentabilités du portefeuille, en excès du taux sans risque, sur les rentabilités du portefeuille de marché (l'indice est alors considéré comme un proxy de ce portefeuille), toujours en excès du taux sans risque. Lorsque β est supérieur à 1, les variations du portefeuille tendent à amplifier les variations de l'indice, alors que si β est plus petit que 1, les variations sont amorties par rapport à celles de l'indice. Dans cette situation, le nombre optimal de contrats est défini, comme dans l'équation (3.2), par :

$$N^* = \beta\frac{P}{A} \tag{3.4}$$

Cette relation suppose que la maturité du contrat est proche de celle de la couverture ; elle ignore aussi le marking to market quotidien sur le contrat[5].

Considérons l'exemple suivant :

- Valeur du CAC 40 = 3000
- Valeur du portefeuille = 1 600 000 €
- Taux sans risque = 5 %
- Rendement en dividende de l'indice = 2 %
- Bêta du portefeuille = 1,5

Supposons que le contrat CAC 40 utilisé pour une couverture d'horizon 3 mois ait une durée de vie de 4 mois. Le prix futures du contrat est supposé égal à 3030,15.

De l'équation (3.4) on déduit le nombre de contrats futures :

$$1{,}5 \times \frac{1\ 600\ 000}{30\ 000} = 80$$

Une position courte sur 80 contrats doit donc être prise.

Supposons que l'indice chute à 2 700 trois mois plus tard et que le prix futures soit de 2 706,75 (nous verrons au chapitre 5 comment sont déterminés ces prix).

5. Cet élément peut être pris en compte par un ajustement du nombre de contrats ; voir D. Duffie, *Futures Markets*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1989, et R. Rendleman, « A Reconciliation of Potentially Conflicting Approaches to Hedging with Futures », *Advances in Futures and Options Research*, 6 (1993), 81-92. Le problème 3.20 traite aussi cette question.

Le gain réalisé sur les futures s'écrit :

$$80 \times (3\ 030{,}15 - 2\ 706{,}75) \times 10\ € = 265\ 181\ €$$

La perte sur l'indice est de 10 % et le rendement en dividende de l'indice de 2 % par an, soit 0,5 % sur trois mois[6]. Par conséquent, la rentabilité est –9,5 %. De plus, le taux sans risque annuel est 5 %, soit 1,25 % sur un trimestre. La relation du CAPM s'écrit :

Rentabilité espérée du portefeuille = Taux sans risque + Bêta × (Rentabilité de l'indice – Taux sans risque)

C'est-à-dire :

$$1{,}25 + [1{,}5 \times (-9{,}5 - 1{,}25)] = -14{,}875\%$$

La valeur espérée du portefeuille est donc : $1{,}6 \times (1 - 0{,}14875) = 1{,}362$ millions d'euros

La valeur finale de la position s'écrit :

$$1362000 + 265181 = 1627181\ €$$

Le tableau 3.4 donne les résultats de cette couverture pour diverses valeurs de l'indice. La valeur de la position est très stable, pratiquement indépendante de la valeur de l'indice. Ce tableau suppose que le taux de dividende dans les trois mois est connu, que le taux sans risque est constant et que la rentabilité du portefeuille est parfaitement corrélée à celle de l'indice. Ces hypothèses ne sont pas vérifiées en pratique et les résultats seront en général moins « parfaits » que ceux illustrés ici.

Tableau 3.4 : Performance de la couverture par des contrats futures sur indices

Valeur de l'indice dans trois mois	2 700	2 850	3 000	3 150	3 300
Prix futures dans trois mois	2 706,75	2 857,13	3 007,51	3 157,88	3 308,26
Gain (perte) sur les contrats	265 181	141 874	18 566	–104 742	–228 050
Valeur du portefeuille (dividendes inclus)	1 362 000	1 482 000	1 602 000	1 722 000	1 842 000
Valeur de la position	1 627 181	1 623 874	1 620 566	1 617 258	1 613 95

6. Nous ignorons ici, pour simplifier la présentation, la composition en continu du taux sans risque et du rendement en dividende de l'indice.

Pourquoi couvrir un portefeuille d'actions

Le tableau 3.4 montre que la valeur finale du portefeuille est proche de 1,62 million d'euros, montant qui serait obtenu en investissant la valeur du portefeuille au taux sans risque sur trois mois. En effet, la couverture a justement pour objectif de faire progresser la valeur du portefeuille au rythme du taux sans risque. Alors pourquoi se couvrir de cette façon ? Il suffirait de liquider le portefeuille et d'investir la somme obtenue au taux sans risque pendant trois mois.

Une des raisons de ce comportement est que le gérant du portefeuille peut être persuadé que ses titres sont bien choisis, mais il n'a pas confiance dans l'évolution du marché dans son ensemble. En se couvrant ainsi (après un ajustement en fonction du bêta), il reste convaincu que son portefeuille fera mieux que l'indice. L'autre argument plus évident est que le gérant peut avoir, pour des raisons diverses, un horizon d'investissement long mais souhaite une protection à court terme. La stratégie alternative consistant à se débarrasser provisoirement du portefeuille est très lourde en termes de coûts de transaction explicites et implicites (liés à la liquidité du marché).

Changer le bêta d'un portefeuille

Dans l'exemple du tableau 3.4, le bêta de la position devient nul après la mise en place de la couverture. Parfois, les contrats futures sont utilisés pour simplement modifier le bêta d'une position sans forcément amener celui-ci à zéro. Dans l'exemple précédent, si l'on souhaitait réduire le bêta de moitié, il faudrait prendre une position courte sur deux fois moins de contrats, c'est-à-dire 40. Pour faire passer le bêta de la position à 3, il faudrait prendre une position longue sur 80 contrats, et ainsi de suite. De manière générale, pour faire passer le bêta d'une valeur β à une valeur β^* où $\beta > \beta^*$, il faut prendre une position courte sur un nombre de contrats égal à :

$$(\beta - \beta^*)\frac{P}{A}$$

Inversement, si $\beta < \beta^*$, il faut une position longue sur un nombre de contrats égal à :

$$(\beta^* - \beta)\frac{P}{A}$$

La couverture d'une action individuelle

La construction d'une couverture contre les variations de prix d'une action individuelle repose sur les mêmes principes. Il n'existe pas toujours de contrats futures sur actions ; Euronext.LIFFE propose cependant depuis 2001 des contrats futures sur actions européennes et américaines. Quand seuls les contrats sur indices sont disponibles, le raisonnement en termes de bêta doit être reconduit. Il est cependant important de garder à l'esprit qu'en dépit d'une méthode identique, le résultat obtenu est nettement moins bon. En effet, la couverture protège contre les mouvements de marché mais pas

contre les variations spécifiques à l'action. Une couverture de ce type peut être envisagée par un investisseur optimiste sur l'action mais pessimiste sur l'évolution du marché dans son ensemble.

Considérons un investisseur qui détient 20 000 titres IBM cotant 100 $. Il anticipe une volatilité importante du marché dans les prochains mois mais pense que l'action IBM devrait surperformer le marché dans son ensemble. Il décide donc d'utiliser le contrat S&P500 pour couvrir sa position pendant un mois. Le bêta de l'action IBM est égal à 1,1 et l'indice est à 900 alors que le prix futures est à 908. Chaque contrat porte sur 250 $ fois la valeur de l'indice. Dans ce cas on a :

$$P = 20000 \times 100 = 2\ 000\ 000$$

$$A = 900 \times 250 = 225\ 000$$

Le nombre de contrats à retenir est alors :

$$1{,}1 \times \frac{2\ 000\ 000}{225\ 000} = 9{,}78$$

En arrondissant à l'entier le plus proche, cela suppose de prendre une position courte sur 10 contrats. Supposons qu'IBM cote 125 $ un mois plus tard alors que le prix futures du contrat est de 1 080. L'investisseur gagne :

$$20\ 000 \times (125 - 100) = 500\ 000\ \$$$

sur les actions et perd :

$$10 \times 250 \times (1080 - 908) = 430\ 000\ \$$$

sur le contrat.

Dans cet exemple, la couverture a éliminé en grande partie le gain sur les actions par une perte sur les contrats. Cela peut paraître contre-productif. Il faut encore insister sur le fait que le but d'une couverture est de réduire le risque d'une position. Une telle position tend à réduire les pertes quand l'évolution est défavorable sur le sous-jacent mais réduit les gains quand l'évolution du sous-jacent est favorable.

3.6 La couverture glissante

Dans certaines situations, la durée de la couverture souhaitée dépasse la maturité des contrats futures disponibles. Dans ce cas, le hedger doit faire « glisser » sa couverture d'une échéance à l'autre. Considérons une entreprise qui doit recevoir, en date T, un certain montant pour une vente d'actifs et qui souhaite se couvrir. Elle peut utiliser n contrats successifs avec des dates d'échéance croissantes (certains de ces contrats n'étant pas encore négociés aujourd'hui) de la manière suivante.

Date t_0 : position courte sur le contrat 1

Date t_1 : dénouer la position sur le contrat 1
Position courte sur le contrat 2

⋮

Date t_n : dénouer la position sur le contrat $n-1$
Position courte sur le contrat n

Date T : dénouer la position sur le contrat n

Dans cette stratégie, il y a n risques de base. À la date T, l'incertitude se traduit par la différence entre le prix futures du contrat n et le prix spot de l'actif à couvrir. De plus, à chaque date intermédiaire, il y a une incertitude sur la différence entre le prix futures du contrat dénoué et celui du contrat sur lequel est prise la nouvelle position ; il s'agit d'une « base glissante » *(rollover basis)*. Bien sûr, le hedger dispose d'une certaine marge de manœuvre concernant les dates auxquelles il passe d'un contrat au contrat suivant et peut chercher à minimiser ce risque de base glissante.

Supposons qu'en avril 2008 une entreprise sache qu'elle va vendre 100 000 barils de pétrole en juin 2009 et décide, pour simplifier, de se couvrir avec un ratio de couverture égal à 1. Le prix spot est de 19 USD le baril. Supposons que la liquidité des contrats futures ne soit pas satisfaisante au-delà d'une maturité de six mois (des contrats sont cependant négociés sur le NYMEX jusqu'à une maturité de six ans). La société prend une position courte sur 100 contrats échéance octobre 2008. En septembre 2008, elle roule sa position en dénouant la précédente et en prenant position sur des contrats mars 2009. Enfin, en février 2009, elle renouvelle l'opération en prenant cette fois position sur des contrats juillet 2009.

Un exemple des résultats possibles est donné dans le tableau 3.5. Le prix spot du baril passe de 19 USD à 16 USD le baril entre avril 2008 et juin 2009, et en octobre 2008 l'entreprise dénoue sa première position à un prix de 17,40 USD pour prendre la deuxième au prix de 18,20 USD, gagnant ainsi 0,8 USD par baril. Le contrat mars 2009 est vendu à 17 USD et dénoué à 16,5 USD, gagnant ainsi 0,5 USD par baril. Enfin, la dernière position est prise à un prix futures de 16,30 USD et dénouée à 15,90 USD pour un profit de 0,4 USD par baril. Dans cette situation, la couverture a rapporté 1,7 USD par baril pour une variation du prix spot de 3 USD. La compensation quotidienne des contrats futures peut conduire à des décalages temporels entre les cash-flows associés à la position « physique » et la position en contrats. En cas de couverture glissante avec un horizon éloigné, ces décalages peuvent entraîner de sérieux problèmes, comme le montre l'encadré 3.2.

Tableau 3.5 : Données de l'exemple sur la couverture glissante sur le pétrole

Date	**Avril 2008**	**Sept. 2009**	**Février 2009**	**Juin 2009**
Contrat oct. 200	18,20	17,40		
Contrat mars 2009		17,00	16,50	
Contrat juillet 2009			16,30	15,90
Prix spot	19,00			16,00

Encadré 3.2 Metallgesellschaft : quand la couverture tourne mal

La stratégie de couverture glissante conduit parfois à des situations de trésorerie délicates. Ce problème fut illustré de manière frappante par l'entreprise allemande Metallgesellschaft (MG) au début des années 1990. MG avait vendu à ses clients une quantité considérable de fuel domestique et de gasoil à prix fixe, par des contrats de 5 à 10 ans, 6 à 8 cents au-dessus du prix de marché. MG avait couvert ce risque en roulant une position longue sur des contrats futures d'échéances proches. Le prix du pétrole chuta et l'entreprise dut faire face à des appels de marge, ce qui aboutit à une situation de trésorerie délicate. Ceux qui avaient décidé cette stratégie arguaient que les cash-flows négatifs dus aux appels de marge seraient en fin de compte compensés sur le long terme par les recettes des ventes. La Direction générale et les banquiers de l'entreprise décidèrent finalement de dénouer la couverture et trouvèrent un accord avec les clients pour abandonner le contrat initial. MG perdit 1,33 milliard de dollars dans cette affaire.

Résumé

Dans ce chapitre, nous avons analysé les différentes façons dont une entreprise peut utiliser les contrats futures pour couvrir un risque. Si la position de l'entreprise entraîne un gain en cas de hausse de l'actif et une perte en cas de baisse, une position courte est appropriée. Si la sensibilité est de sens opposé, une position longue sur les contrats devra être adoptée.

La couverture est une méthode de réduction du risque. Elle devrait donc être considérée positivement par les managers. En réalité, certaines raisons théoriques et pratiques font qu'il n'en est pas toujours ainsi. D'un point de vue théorique, on peut dire que les actionnaires, en détenant des portefeuilles diversifiés, peuvent éliminer une grande partie des risques inhérents aux actions qu'ils possèdent. Il n'est donc pas nécessaire que les entreprises se couvrent. Pour l'entreprise, il n'est pas forcément opportun de couvrir une position si ses concurrents ne le font pas. De plus, un trésorier peut craindre de se voir reprocher une couverture de position si l'entreprise a gagné sur l'actif sous-jacent et si ce gain est compensé par une perte sur les contrats.

En matière de couverture, le risque de base est un concept fondamental. La base est la différence entre le prix spot et le prix futures. Le risque de base a pour origine l'incertitude quant à la valeur de la base à la date de clôture de la couverture.

Le ratio de couverture rapporte le volume de la position sur les contrats à celui de la position sur l'actif à couvrir. Il n'est pas toujours optimal d'utiliser un ratio égal à 1. Si le hedger veut minimiser la variance de la valeur de sa position, un ratio différent de 1 peut être un meilleur choix. Le ratio optimal est dans ce cas la pente de la droite de régression des variations du prix spot sur celles du prix futures.

Les contrats futures sur indices sont utilisés pour couvrir le risque systématique d'un portefeuille d'actions. Le nombre de contrats nécessaires est alors le bêta du porte-

feuille multiplié par le ratio de la valeur de la position sur celle d'un contrat. Les futures sur indices peuvent aussi être utilisés pour modifier le bêta d'un portefeuille sans changer la composition de celui-ci.

Quand il n'existe pas de contrat futures suffisamment liquide, dont la date d'échéance soit postérieure à l'horizon de couverture, une stratégie appelée couverture glissante peut être appropriée. Elle suppose de prendre des positions successives sur des contrats à maturité plus courte. Quand le premier contrat approche de l'échéance, la position est dénouée et une autre du même type est prise sur l'échéance suivante, et ainsi de suite. Cette stratégie donne de bons résultats tant qu'il existe une forte corrélation entre les variations des prix spot et futures.

Références complémentaires

ALLAYANIS G. et J. WESTON, « The Use of Foreign Currency Derivatives and Firm Market Value », *Review of Financial Studies*, 14, 1 (printemps 2001), 243-76.

BODNAR G. M., G. S. HAYT et R. C. MARSTON, « 1998 Wharton Survey of Financial Risk Management by U.S Non Financial Firms », *Financial Management*, 2, 4 (1998), 70-91.

BROWN G. W., « Managing Foreign Exchange Risk with Derivatives », *Journal of Financial Economics*, 60 (2001), 401-48.

CULP C. et M. H. MILLER, « Metallgesellschaft and the Economics of Synthetic Storage », *Journal of Applied Corporate Finance*, 7, 4 (hiver 1995), 62-76.

EDERINGTON L. H., « The Hedging Performance of the New Futures Markets », *Journal of Finance*, 34 (mars 1979), 157-70.

EDWARDS F. R. et M. S. CANTER, « The Collapse of Metallgesellschaft : Unhedgeable Risks, Poor Hedging Strategy, or Just Bad Luck ? », *Journal of Applied Corporate Finance*, 8, 1 (printemps 995), 86-105.

GECZY C., B. A. MINTON et C. SCHRAND, « Why Firms Use Currency Derivatives ? », *Journal of Finance*, 52, 4 (1997), 1323-54.

GRAHAM J. R. et C. W. SMITH Jr, « Tax Incentives to Hedge », *Journal of Finance*, 54, 6 (1999), 2241-62.

HAUSHALTER G. D., « Financing Policy, Basis Risk, and Corporate Hedging : Evidence from Oil and Gas Producers », *Journal of Finance*, 55, 1 (2000), 107-52.

MELLO A. S. et J. E. PARSONS, « Hedging and Liquidity », *Review of Financial Studies*, 13 (printemps 2000), 127-53.

NEUBERGER A. J., « Hedging Long-Term Exposures with Multiple Short-Term Futures Contracts », *Review of Financial Studies*, 12 (1999), 429-59.

PETERSEN M. A. et S. R. THIAGARAJAN, « Risk Management and Hedging : With and Without Derivatives », *Financial Management*, 29, 4 (hiver 2000), 5-30.

STULZ R. M., « Optimal Hedging Policies », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19 (juin 1984), 127-40.

TUFANO P., « The Determinants of Stock Price Exposure : Financial Engineering and the Gold Mining Industry », *Journal of Finance*, 53, 3 (1998), 1015-52.

TUFANO P., « Who Manages Risk ? An Empirical Examination of Risk Management Practices in the Gold Mining Industry », *Journal of Finance*, 51, 4 (1996), 1097-1138.

Problèmes et exercices

3.1 Dans quelles circonstances une position de couverture (a) courte, (b) longue, est-elle appropriée ?

3.2 Expliquez l'expression « risque de base » dans la couverture par des contrats futures.

3.3 Expliquez l'expression « couverture parfaite ». Une couverture parfaite conduit-elle toujours à un résultat meilleur qu'une couverture imparfaite ? Justifiez votre réponse.

3.4 Dans quel cas la recherche d'une variance minimale pour la valeur d'une position conduit-elle à ne pas se couvrir ?

3.5 Donnez trois raisons pour lesquelles un trésorier d'entreprise pourrait préférer ne pas couvrir un risque couru par son entreprise.

3.6 Supposons que l'écart-type des variations de prix trimestrielles d'une marchandise soit 0,65 € et que l'écart-type des variations du prix futures d'un contrat sur cette marchandise soit 0,81 €, alors que la corrélation de ces variations est 0,8. Quel est le ratio de couverture optimal pour un contrat à trois mois ? Quelle est la signification de ce ratio ?

3.7 Une entreprise possède un portefeuille de 20 millions d'euros qui a un bêta de 1,2. Elle souhaite couvrir cette position avec des contrats futures sur le CAC 40. L'indice vaut aujourd'hui 3240 et chaque contrat correspond à 10 € fois la valeur de l'indice. Quel type de couverture minimise le risque ? Que devrait faire cette entreprise si elle souhaite diviser par deux le bêta du portefeuille ?

3.8 Un agriculteur souhaite couvrir le risque de prix pour des ventes de maïs qui seront réalisées en (a) juin, (b) juillet, (c) janvier. Sachant que les contrats correspondants du Chicago Board of Trade ont pour mois d'échéance mars, mai, juillet, septembre, décembre, quel devrait être le choix de l'agriculteur pour chacun des cas (a), (b) et (c) ?

3.9 Une couverture parfaite assure-t-elle de pouvoir échanger à une date future au prix spot d'aujourd'hui ? Justifiez votre réponse.

3.10 Expliquez pourquoi une position de couverture courte s'améliore quand la base $(S - F)$ augmente.

3.11 Supposez que vous soyez le trésorier d'une entreprise française exportatrice de matériel électronique vers les États-Unis. Expliquez votre stratégie

de couverture et les arguments que vous utiliseriez pour convaincre vos supérieurs hiérarchiques.

3.12 Dans l'exemple 3.2 de la section 3.3, en quoi la couverture et les résultats de celle-ci sont-ils modifiés si le ratio de couverture utilisé est de 0,8 ?

3.13 « Si le ratio de couverture de variance minimum est égal à 1, la couverture doit être parfaite. » Cette affirmation est-elle correcte ? Justifiez votre réponse.

3.14 « Si le risque de base est nul alors le ratio de couverture qui minimise la variance est égal à 1. » Cette affirmation est-elle correcte ? Justifiez votre réponse.

3.15 « Quand pour un actif les prix futures sont en général plus bas que les prix spot, les positions de couverture longues sont très attractives. » Expliquez cette affirmation et illustrez par un exemple.

3.16 L'écart-type des variations de prix mensuelles du bétail vivant (en cents par livre) est 1,2. L'écart-type des variations mensuelles du prix futures du contrat à échéance la plus courte (en cents par livre) est 1,3. La corrélation entre les variations de ces deux prix est de 0,7. Nous sommes le 15 octobre et un producteur de viande doit acheter 200 000 livres de bétail vivant le 15 novembre. Il souhaite couvrir sa position avec le contrat futures échéance décembre, chaque contrat portant sur 40 000 livres de bétail. Quelle stratégie doit-il suivre ?

3.17 Un producteur de maïs affirme : « Je n'utilise pas les contrats futures pour me couvrir. Mon vrai risque n'est pas le prix de vente du maïs mais celui de perdre ma récolte du fait d'un aléa climatique. » Que pensez-vous de ce point de vue ? Le fermier devrait-il chercher à estimer son volume de production espéré et chercher une couverture pour fixer le prix de vente de cette production espérée ?

3.18 Le 1er juillet, un investisseur détient 50 000 actions d'une entreprise du CAC 40. L'action cote 30 €. Il décide de couvrir pour un mois les variations de prix dues au mouvement du marché par l'intermédiaire du contrat futures sur le CAC 40 d'échéance septembre. L'indice est à 4 500 et un contrat représente 10 € fois l'indice. Le bêta de l'action est de 1,3. Quelle est la stratégie à suivre ?

3.19 Que se passe-t-il dans le tableau 3.5 si le ratio de couverture retenu est 1,5 ? Comment cette décision affecte-t-elle la couverture et ses résultats ?

3.20 En quoi la compensation quotidienne d'un contrat futures peut-elle entraîner des problèmes de trésorerie si le contrat est utilisé pour une position de couverture ?

3.21 Un manager de compagnie aérienne affirme : « Il n'y a aucun intérêt pour nous à utiliser les futures sur le pétrole. Il y a autant de chances que le prix spot du pétrole soit au-dessus du prix futures que de chances qu'il soit en dessous. » Que pensez-vous de ce point de vue ?

3.22 Supposez que l'emprunt d'or coûte 1,5 % par an et que le taux sans risque à un an soit de 5 %. Ces deux taux sont en composition annuelle. À partir

de la discussion de l'encadré 3.1, calculez le prix forward maximum (à un an) que Goldman Sachs devrait coter pour que le prix spot soit de 400 $.

Questions complémentaires

3.23 Le tableau suivant fournit des données sur les variations de prix mensuelles des prix spot et futures d'une certaine marchandise. Utilisez ces données pour calculer le ratio de couverture de variance minimum.

Variation du prix spot	+0,50	+0,61	−0,22	−0,35	+0,79
Variation du prix futures	+0,56	+0,63	−0,12	−0,44	+0,60
Variation du prix spot	+0,04	+0,15	+0,70	−0,51	−0,41
Variation du prix futures	−0,06	+0,01	+0,80	−0,56	−0.46

3.24 Le 16 juillet, une institution financière détient un portefeuille de 100 millions d'euros dont le bêta est 1,2. L'institution veut couvrir ce portefeuille à l'aide du contrat futures CAC 40, échéance décembre, de façon à ramener le bêta du portefeuille à 0,5. L'indice vaut 4000 et le contrat porte sur 10 € fois l'indice.

a. Quelle position devrait prendre cette institution ?

b. Si la société change d'avis et souhaite porter le bêta de 1,2 à 1,5, quelle position devrait-elle prendre sur les contrats futures ?

3.25 En octobre 2008, une entreprise prévoit de produire un million de livres de cuivre dans chacun des mois de février 2009, août 2009, février 2010 et août 2010. Elle décide de se couvrir sur le COMEX. Un contrat correspond à la livraison de 25 000 livres de cuivre. Le deposit est de 2 000 USD par contrat, et la marge à maintenir ensuite est de 1 500 USD par contrat. La société souhaite couvrir 80 % de son exposition au risque. Les contrats futures suffisamment liquides ont une maturité qui ne va pas au-delà de 13 mois. Construisez une stratégie de couverture pour cette entreprise. Vous supposerez que les prix spot et futures évoluent comme dans le tableau suivant.

Date	Oct. 2008	Fév. 2009	Août 2009	Fév. 2010	Août 2010
Prix spot	72,00	69,00	65,00	77,00	88,00
Prix futures mars 2009	72,30	69,10			
Prix futures septembre 2009	72,80	70,20	64,80		
Prix futures mars 2010		70,70	64,30	76,70	
Prix futures septembre 2010			64,20	76,50	88,20

Quel est l'impact de la stratégie que vous proposez sur le prix effectivement payé par l'entreprise pour le cuivre ? Quel est le deposit en octobre 2008 ? L'entreprise fera-t-elle l'objet d'appels de marge ?

3.26 Un gérant de fonds a un portefeuille de 50 millions d'euros avec un bêta de 0,87. Il est inquiet quant à la performance du marché dans les deux mois à venir et pense utiliser, pour se couvrir, un contrat sur le CAC 40 à 3 mois. L'indice est actuellement à 3750 et un contrat porte sur 10 € fois l'indice ; le taux sans risque est de 6 % par an et le rendement en dividende de l'indice est de 3 %.

a. Quel est le prix futures théorique du contrat de maturité 3 mois ?

b. Quelle position devrait prendre le gérant pour éliminer son exposition au risque ?

c. Calculez l'effet de la stratégie de couverture sur la valeur de la position si l'indice après deux mois vaut 3 000, 3 300, 3 600, 3 900 et 4200.

Annexe

Calcul du ratio de couverture qui minimise la variance

Nous adoptons ici les notations de la section 3.4, c'est-à-dire :

ΔS : variation du prix spot pendant la période de couverture

ΔF : variation du prix futures pendant la période de couverture

σ_S : écart-type de ΔS

σ_F : écart-type de ΔF

ρ : corrélation entre ΔS et ΔF

h^* : ratio de couverture qui minimise le risque de la position du hedger

Quand le hedger a une position longue sur l'actif et courte sur le futures, la variation de valeur de la position pendant la durée de la couverture est donnée par :

$$\Delta S - h\Delta F$$

pour chaque unité d'actif détenue. Pour une couverture longue, la variation est :

$$h\Delta F - \Delta S$$

Dans chaque cas, la variance, v, de la variation de valeur de la position couverte, est égale à :

$$v = \sigma_S^2 + h^2\sigma_F^2 - 2h\rho\sigma_S\sigma_F$$

On a donc :

$$\frac{\partial v}{\partial h} = 2h\sigma_F^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_F$$

Cette dérivée est nulle si :

$$h = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

De plus, cette valeur minimise bien la variance car la dérivée seconde est positive.

Chapitre 4

Les marchés de taux d'intérêt

Les taux d'intérêt sont un élément fondamental pour l'évaluation de pratiquement tous les actifs financiers, et donc aussi pour l'évaluation des actifs dérivés, qui occupe un grand nombre de chapitres de ce livre. Dans le présent chapitre, nous abordons tout d'abord les éléments essentiels concernant la mesure et l'analyse des taux d'intérêt. Nous expliquons le concept de fréquence de composition des intérêts, et plus particulièrement la notion de taux continu, qui sera abondamment utilisée dans les chapitres suivants. Nous présentons les taux actuariels, les taux zéro-coupon ainsi que la notion de structure par termes des taux qui permet de comprendre ce qu'est un taux forward.

Nous expliquons l'évaluation des obligations, celle des accords de taux futurs, connus sous le sigle FRA (*Forward Rate Agreement*), ainsi que les différentes théories de la structure par termes des taux.

Enfin, nous détaillons l'utilisation de la duration et de la convexité qui permettent de mesurer la sensibilité des prix d'obligations aux variations des taux d'intérêt.

Dans ce chapitre, nous négligerons les conventions en matière de décompte des jours afin de clarifier l'exposé. Ces questions seront abordées aux chapitres 6 et 7 dans lesquels nous décrirons de manière détaillée les contrats futures sur obligations d'État et sur taux courts. Nous y montrerons aussi comment la duration et la convexité peuvent être utilisées pour couvrir un portefeuille obligataire des variations de taux d'intérêt.

4.1 Les différents types de taux

Un taux d'intérêt, dans une situation donnée, définit le montant qu'un emprunteur promet à un prêteur. Dans chaque pays et chaque devise, il existe de multiples taux d'intérêt qui dépendent, entre autres, du risque de crédit de l'emprunteur, c'est-à-dire du risque que l'emprunteur ne puisse faire face à ses engagements. Dans cette section,

nous introduisons trois types de taux fondamentaux sur les marchés d'options et de futures.

Les taux d'État

Ce sont les taux applicables aux emprunts que font les gouvernements dans leur propre devise. Les taux d'État US sont les taux auxquels le gouvernement américain emprunte en dollars. Les taux d'État français sont les taux auxquels peut emprunter en euros l'État français.

On suppose généralement que ces taux ne présentent pas de risque de défaut, en faisant l'hypothèse qu'un État peut toujours rembourser un emprunt dans sa propre devise en « faisant tourner la planche à billets ». Ils sont donc souvent appelés taux sans risque[1].

Les taux LIBOR

Les grandes banques internationales négocient en permanence entre elles des prêts et des emprunts dans toutes les grandes devises, pour des durées inférieures à un an. Par exemple, à un instant donné, BNP-Paribas peut coter un taux demandé (*London Interbank Bid Rate*) de 3,250 % pour des dépôts à six mois en USD et un taux offert (LIBOR pour *London Interbank Offer Rate*) de 3,350 % pour des prêts à six mois en USD. Cela signifie qu'elle est prête à rémunérer des USD qui lui seraient prêtés par une autre banque au taux de 3,25 % et qu'elle prêterait des USD pour six mois au taux de 3,35 %.

Quand une banque X prête de l'argent à une banque Y, elle doit s'assurer, pour lui prêter au taux LIBOR, que B vérifie certains critères de solvabilité. En général, ces critères sont considérés comme étant satisfaits si Y a un rating supérieur ou égal à AA[2].

Les institutions financières notées AA considèrent donc le taux LIBOR comme leur coût d'opportunité du capital. Elles peuvent emprunter à ce taux et cotent ces taux quand elles prêtent à d'autres institutions de même qualité. Les taux LIBOR ne correspondent pas à une absence totale de risque de crédit puisque la faillite d'une institution notée AA n'est pas un événement de probabilité nulle. Pourtant, les traders sur les marchés dérivés considèrent le taux LIBOR comme un meilleur indicateur du taux sans risque que les taux d'État. En effet, ces derniers peuvent être artificiel-

1. On peut noter que la notion de taux sans risque pour les pays de la zone euro est plus discutable puisque ces pays n'ont plus la maîtrise de la frappe de leur monnaie.

2. Le rating le plus élevé donné attribué par l'agence Standard and Poor's est AAA, le second est AA. Les ratings correspondants de l'agence concurrente Moody's sont Aaa et Aa.

lement bas dans de nombreux pays (voir encadré 4.1). En conséquence, dans ce livre, l'expression « taux sans risque » fera le plus souvent référence au taux LIBOR[3].

Les taux LIBID et LIBOR sont déterminés, pour chaque devise, par le jeu de l'offre et de la demande sur le marché interbancaire. Ils évoluent donc en fonction des conditions économiques. Les taux LIBOR sont des références largement utilisées sur les marchés. Ces taux sont plus élevés que les taux d'État puisqu'ils ne sont pas exempts de risque de défaut ; il y a en effet toujours une probabilité positive (même faible) qu'une banque fasse défaut sur ses emprunts.

Cependant, les grandes banques et les institutions financières ont tendance à utiliser le taux LIBOR (jouant alors le rôle de taux sans risque) dans l'évaluation des actifs dérivés. C'est lié au fait qu'elles placent leurs excédents de trésorerie sur ce marché ; le LIBOR constitue donc une sorte de coût d'opportunité du capital. Le taux EURIBOR (*Euro Interbank Offered Rate*), qui a remplacé le PIBOR (*Paris Interbank Offered Rate*) en janvier 1999, est en fait équivalent au LIBOR en euros.

Encadré 4.1 Qu'est-ce que le taux sans risque ?

Il est naturel de supposer que les taux d'État sont des taux sans risque et qu'ils constituent donc la référence pour les traders des institutions financières. En fait, les traders sur les marchés dérivés considèrent le taux LIBOR comme un meilleur indicateur du taux sans risque que les taux d'État pour les raisons suivantes :

1. Les taux d'État peuvent être artificiellement bas dans de nombreux pays, du fait de la réglementation et de la fiscalité qui imposent, plus ou moins directement, à certaines institutions ou entreprises (les compagnies d'assurance, par exemple) de détenir des titres d'État.
2. Le montant de capital qu'une banque doit détenir pour couvrir le risque d'un portefeuille d'obligations d'État est inférieur au capital requis pour investir dans d'autres actifs, même peu risqués.
3. Aux États-Unis, les obligations d'État ont un traitement fiscal favorable par rapport aux autres instruments à taux fixe.

Le taux LIBOR est sensiblement égal au taux d'emprunt d'un établissement noté AA. Ce n'est donc pas un substitut parfait au taux sans risque. Cependant les traders considèrent que c'est la bonne mesure. Comme nous le verrons au chapitre 7, le marché des contrats futures Eurodollar et le marché des swaps sont utilisés par les traders pour prolonger la courbe des taux sans risque au-delà de la maturité de 12 mois.

3. Nous verrons au chapitre 7 qu'il est plus judicieux d'interpréter le taux sans risque comme un taux déduit des cotations de swaps ou des cotations de contrats futures Eurodollars.

Le taux de Repo

Il arrive qu'une institution finance certaines activités par le Repo (*Repurchase Agreement*), c'est-à-dire par un contrat spécifiant la vente de certains titres avec une promesse de rachat à une date future à un prix plus élevé. La banque A, vendeuse des titres, les livre à une banque B, qui paye le prix de ces titres, apportant ainsi du cash à la banque A. En quelque sorte, il s'agit d'un prêt de fonds par B à A. La différence entre le prix de rachat des titres et le prix de vente initial rémunère les fonds prêtés. Le taux d'intérêt correspondant est appelé taux de Repo. Si le détenteur initial des titres n'honore pas son engagement de rachat, la banque B garde les titres. Si la banque n'est pas en mesure de « rendre » les titres au terme du contrat, la banque A garde les fonds. Le type de Repo le plus courant est l'*overnight*, pour lequel le taux est renégocié chaque jour.

4.2 La mesure des taux d'intérêt

Avant d'entrer dans les détails de la détermination des prix forward et futures, il est essentiel de préciser comment se calculent les taux d'intérêt. Quand une banque propose un taux de 10 % annuel, cela paraît clair. En fait, la signification de cette proposition dépend de la façon dont sont mesurés les taux.

Si le taux est composé annuellement, un placement de 100 € dans cette banque rapportera :

$$100 \text{ €} \times 1{,}1 = 110 \text{ €}$$

à la fin de l'année.

Si la composition des intérêts est semestrielle, la même proposition signifie que le placement rapporte 5 % pour six mois ; dans ce cas on obtient :

$$100 \text{ €} \times 1{,}05 \times 1{,}05 = 110{,}25 \text{ €}$$

à la fin de l'année.

Le tableau 4.1 montre l'effet de la variation de la périodicité de composition des intérêts sur la valeur finale du placement. La fréquence de composition des intérêts définit l'unité de mesure du taux d'intérêt. Il existe donc, comme on le voit dans le tableau 4.1, des correspondances selon la fréquence de composition. 10 % en composition semestrielle correspond à 10,25 % en composition annuelle.

Pour généraliser ces constatations, considérons un montant A investi pendant n années à un taux annuel R. Si la composition est annuelle, on obtient :

$$A(1 + R)^n$$

Tableau 4.1 : Effet de la fréquence de composition des intérêts sur la valeur de 100 € à la fin d'une année avec un taux de 10 %

Fréquence de composition	**Valeur de 100 € à la fin de l'année**
Annuelle ($m = 1$)	110,00
Semestrielle ($m = 2$)	110,25
Trimestrielle ($m = 4$)	110,38
Mensuelle ($m = 12$)	110,47
Hebdomadaire ($m = 52$)	110,51
Journalière ($m = 365$)	110,52

à la fin des n années. Si la composition des intérêts a lieu m fois par an, le résultat final est :

$$A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn} \tag{4.1}$$

La composition continue des intérêts

La limite du résultat précédent quand m tend vers l'infini s'appelle composition continue des intérêts[4]. Cette limite est égale à :

$$Ae^{Rn} \tag{4.2}$$

où e est la base du logarithme népérien ($e \approx 2{,}71828$). La plupart des calculettes fournissent directement la fonction e^x (exponentielle de x) ; calculer (4.2) ne pose donc pas de difficultés. Avec les données du tableau 4.1, $A = 100$, $n = 1$, $R = 0{,}1$, on aboutit à :

$$100 \times e^{0,1} = 110{,}52 \text{ €}$$

Les deux premières décimales sont identiques à celles qui sont obtenues par composition journalière des intérêts. Pour les problèmes pratiques, une composition continue peut être vue comme une composition journalière.

Composer (on dit aussi capitaliser) en continu une somme quelconque pendant n années au taux R consiste à multiplier cette somme par e^{Rn}. Actualiser sur n années au même taux R en continu revient à multiplier par e^{-Rn}.

Dans ce livre, sauf précision contraire, capitalisation et actualisation s'entendent en continu. Les lecteurs habitués à d'autres fréquences de composition (annuelles, semestrielles...) seront peut-être surpris au premier abord. Cependant, cette pratique étant très largement majoritaire dans l'évaluation des actifs dérivés, nous l'adoptons dès maintenant.

4. Les actuaires utilisent parfois l'expression « force de l'intérêt » pour évoquer un taux continu.

Notons R_c un taux continu et R_m le taux équivalent pour une composition m fois par an. Des équations (4.1) et (4.2), on déduit :

$$Ae^{R_c n} = A\left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^{mn}$$

ou encore :

$$R_c = m \ln\left(1 + \frac{R_m}{m}\right) \tag{4.3}$$

et donc :

$$R_m = m(e^{R_c/m} - 1) \tag{4.4}$$

Ces relations sont utilisées pour convertir un taux composé m fois par an en un taux continu et *vice versa*. La fonction ln(.) est le logarithme népérien, disponible dans la plupart des calculettes. C'est la fonction inverse de l'exponentielle ; si $y = \ln(x)$, alors $x = e^y$.

- **Exemple 4.1**

  Soit un taux de 10 % composé semestriellement ; le taux continu équivalent, déduit de l'équation 4.3, est égal à :

  $$2 \ln\left(1 + \frac{0{,}1}{2}\right) = 9{,}758\ \%$$

  puisque $m = 2$ et $R_m = 10\ \%$.

- **Exemple 4.2**

  Une banque propose de prêter à 8 % en taux continu, avec des intérêts dus trimestriellement. De l'équation (4.4), avec $m = 4$ et $R_m = 0{,}08$, on déduit :

  $$4(e^{0{,}08/4} - 1) = 8{,}08\ \%$$

  Par conséquent, quelqu'un qui emprunte 1 000 € paie 20,20 € d'intérêts chaque trimestre.

4.3 Les taux zéro-coupon

Le taux zéro-coupon (ou taux ZC ou encore taux spot) à n années est le taux d'intérêt obtenu sur un investissement engendrant un seul flux au terme des n années, sans flux intermédiaires. Par exemple, si le taux d'État zéro-coupon à 5 ans, en composition continue, est de 5 %, cela signifie qu'un investissement de 100 € dans ce taux sans risque rapporte, au terme des 5 ans :

$$100 \times e^{0{,}05 \times 5} = 128{,}40\ €$$

La plupart des taux observables sur le marché ne sont pas des taux zéro-coupon. Par exemple, le prix d'une obligation à 5 ans qui paye un taux de coupon de 6 % ne

définit pas le taux ZC à 5 ans parce qu'une partie de la rentabilité de cette obligation vient des coupons payés chaque année ou chaque semestre. Un peu plus loin dans ce chapitre, nous verrons comment déterminer les taux ZC à partir des prix d'obligations à coupon.

4.4 L'évaluation des obligations

La plupart des obligations paient périodiquement des coupons, chaque année en France, chaque semestre au Royaume-Uni, par exemple. Le détenteur d'une obligation se voit aussi rembourser le principal à l'échéance de l'obligation. Le prix théorique d'une obligation peut alors être calculé en actualisant les flux qu'elle engendre aux taux ZC correspondants.

Supposons que les taux zéro-coupon soient ceux du tableau 4.2. Une obligation d'échéance 4 ans paie un coupon annuel de 3 % sur un principal de 100 €. Pour calculer la valeur actuelle du premier coupon, on actualise celui-ci avec le taux ZC à 1 an, soit 2,5 % ; on actualise de même le second au taux ZC à 2 ans, et ainsi de suite.

Tableau 4.2 : Taux d'État zéro-coupon

Maturité (années)	Taux zéro-coupon (en %)
1	2,5
2	2,9
3	3,2
4	3,4

Le prix théorique de l'obligation est alors :

$$3e^{-0{,}025\times 1} + 3e^{-0{,}029\times 2} + 3e^{-0{,}032\times 3} + 103e^{-0{,}034\times 4} = 98{,}39 \text{ €}$$

Le taux actuariel d'une obligation

Le taux actuariel d'une obligation est le taux d'actualisation qui, appliqué à tous les flux, donne le prix de marché de l'obligation. Supposons que l'obligation précédente soit effectivement cotée 98,39 €. Si l'on note y le taux actuariel (continu) de cette obligation, y est solution de l'équation :

$$3\times e^{-y\times 1} + 3\times e^{-y\times 2} + 3\times e^{-y\times 3} + 103\times e^{-y\times 4} = 98{,}39$$

Ce genre d'équation est résolu par une méthode itérative et l'on aboutit à $y = 3{,}38$ %[5].

Le taux au pair

Le taux au pair pour une maturité donnée est le taux de coupon qui égalise le prix de l'obligation et son nominal. En reprenant l'exemple précédent, quel doit être le coupon annuel c pour que l'obligation à 4 ans ait un prix égal à 100 ? En utilisant les taux ZC du tableau 4.2, il faut résoudre l'équation :

$$c \times e^{-0{,}025 \times 1} + c \times e^{-0{,}029 \times 2} + c \times e^{-0{,}032 \times 3} + (100 + c) \times e^{-0{,}034 \times 4} = 100$$

On obtient alors $c = 3{,}436$; le taux au pair de l'obligation est donc 3,436 %, en composition annuelle.

De manière plus générale, notons d la valeur actuelle de 1 € reçu à l'échéance de l'obligation, A la valeur actuelle d'une annuité payant 1 € à chaque date de coupon, et m le nombre de coupons payés chaque année, le taux au pair c s'écrit :

$$100 = A\,\frac{c}{m} + 100d$$

d'où l'on déduit :

$$c = \frac{m}{A}\,100\,(1 - d)$$

Dans l'exemple précédent $m = 1$, $d = e^{-0{,}034 \times 4} = 0{,}87284$ et :

$$A = e^{-0{,}025 \times 1} + e^{-0{,}029 \times 2} + e^{-0{,}032 \times 3} + e^{-0{,}034 \times 4} = 3{,}70027$$

En appliquant la formule présentée ci-dessus, on retrouve :

$$c = \frac{1}{3{,}70027}\,100\,(1 - 0{,}87284) = 3{,}436$$

4.5 La détermination des taux zéro-coupon

On détermine les taux zéro-coupon à partir des prix des instruments cotés. Une première approche est la méthode du *bootstrap*. Pour illustrer la nature de cette méthode, considérons les prix d'obligations du tableau 4.3. Les trois premières ne payant pas de coupon, les taux zéro-coupon correspondant à ces maturités sont aisément obtenus. En payant 97,5 pour la première obligation, on obtient 100 trois mois plus tard. En composition trimestrielle, le taux ZC à 3 mois est donc (4 × 2,5) / 97,5 = 10,256 % par an. L'équation (4.3) montre que le taux continu correspondant est égal à :

$$4 \ln\left(1 + \frac{0{,}10256}{4}\right) = 0{,}10127$$

5. La méthode de Newton-Raphson permet de résoudre des équations non linéaires du type $f(y) = 0$. Elle débute en estimant une première possibilité y_0 et en construisant une suite $y_1,\ldots,y_n$ définie par $y_{i+1} = y_i - f(y_i)/f'(y_i)$, où $f'(y_i)$ est la dérivée de f calculée en y_i.

ou 10,127 %. De la même façon, le taux ZC de l'obligation à 6 mois, en composition semestrielle, est (2 × 5,1)/94,9 = 10,748 %, qui devient en continu :

$$2 \ln \left(1 + \frac{0{,}10748}{2} \right) = 0{,}10469$$

c'est-à-dire 10,469 %. Enfin, le taux continu à 1 an, déduit du prix de la troisième obligation, est 10,536 %.

Tableau 4.3 : Données pour le bootstrap

Principal de l'obligation	Maturité	Coupon annuel*	Prix de l'obligation
100	0,25	0	97,5
100	0,50	0	94,9
100	1,00	0	90,0
100	1,50	8	96,0
100	2,00	12	101,6

* La moitié du coupon annuel est payée chaque semestre.

Les deux dernières obligations paient des coupons semestriels. Par conséquent, les flux de l'obligation à 18 mois sont :

6 mois :	4 €
1 an :	4 €
1,5 an :	104 €

Nous avons déjà calculé les taux ZC à 6 mois et 1 an ; les deux premiers flux peuvent donc être actualisés à ces taux et le taux à 1,5 an peut alors être déduit du prix de l'obligation. Si l'on note R le taux cherché, il est solution de l'équation :

$$4 \times e^{-0{,}10469 \times 0{,}5} + 4 \times e^{-0{,}10536 \times 1} + 104 e^{-R \times 1{,}5} = 96{,}0$$

Ce qui équivaut à :

$$e^{-R \times 1{,}5} = 0{,}85196$$

ou encore :

$$R = -\frac{\ln(0{,}85196)}{1{,}5} = 0{,}10681$$

Le taux zéro-coupon à 1,5 an est donc 10,681 %. C'est le seul taux ZC compatible à la fois avec le prix de l'obligation et avec les taux ZC des maturités plus courtes.

En appliquant la même technique à l'obligation à 2 ans et en notant encore R le taux ZC à 2 ans, il faut résoudre :

$$6 \times e^{-0{,}10469 \times 0{,}5} + 6 \times e^{-0{,}10536 \times 1} + 6 e^{-0{,}10681 \times 1{,}5} + 106 \times e^{-R \times 2} = 101{,}6$$

ce qui donne $R = 10{,}808$ %.

Les taux obtenus sont résumés dans le tableau 4.4. On appelle courbe des taux zéro-coupon la fonction qui, à la maturité, associe le taux zéro-coupon correspondant. Quand on utilise une méthode de bootstrap, il est courant de faire une interpolation linéaire pour déterminer les taux zéro-coupon aux maturités ne correspondant pas aux dates de tombées de flux. Par exemple, le taux zéro-coupon à 1,25 an est supposé égal à :

$$0{,}5 \times 10{,}536 + 0{,}5 \times 10{,}681 = 10{,}6085\ \%$$

Tableau 4.4 : Taux zéro-coupon (continus) à partir des données du tableau 4.3

Maturité (années)	Taux zéro-coupon (en %)
0,25	10,127
0,50	10,469
1,00	10,536
1,50	10,681
2,00	10,808

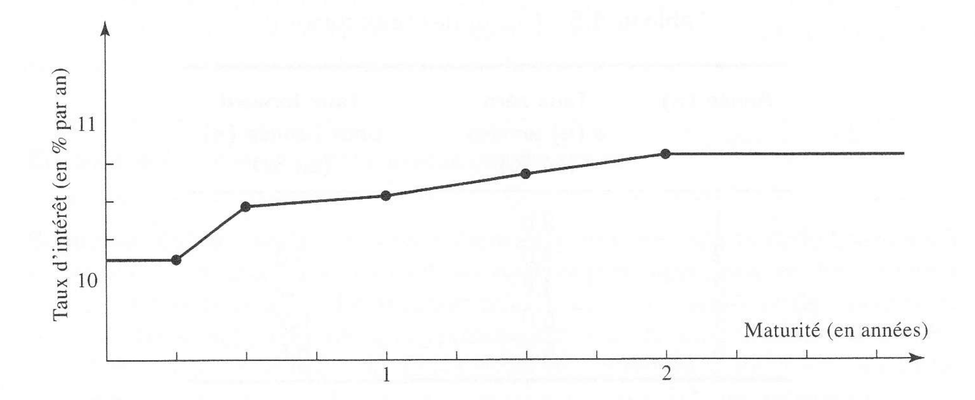
De même, on suppose que la courbe est horizontale en deçà de la première date de tombée de flux (3 mois dans l'exemple) et au-delà de la dernière (2 ans dans l'exemple). En pratique, on utilisera bien sûr des obligations de maturité plus longue que deux ans pour déterminer l'ensemble de la courbe. Le graphique 4.1 représente la courbe obtenue pour les données du tableau 4.4.

En général, les obligations disponibles sur le marché n'ont jamais une maturité exactement égale à 1,5 an, 2 ans, 2,5 ans, etc. Les analystes ont alors recours à une technique d'interpolation sur les prix des obligations, avant de calculer la courbe des taux. Par exemple, si on sait que l'obligation de maturité 2,3 ans et de taux de coupon 6 % cote 98, et que l'obligation de maturité 2,7 ans et de taux de coupon 6,5 % cote 99, on supposera que l'obligation de maturité 2,5 ans et de taux de coupon 6,25 % (qui n'existe pas sur le marché dans cette hypothèse) cote 98,5.

4.6 Les taux forward

Les taux forward sont les taux d'emprunt ou de placement, pour des périodes futures, implicites dans les taux zéro-coupon aujourd'hui. Pour illustrer leur calcul, supposons que les taux zéro-coupon (continus) soient ceux de la deuxième colonne du tableau 4.5. Le taux à 1 an est de 3 % et un investissement de 100 € rapporte 103,05 € dans un an. De même, un investissement de 100 € pour 2 ans rapporte $100 \times e^{0{,}04 \times 2} = 108{,}33$ €.

Le taux forward pour l'année 2 dans le tableau 4.5 est de 5 % par an. C'est le taux d'intérêt déduit de la courbe des taux ZC pour la période d'un an entre la fin de la première année et la fin de la seconde année. Ce taux est calculé à partir du taux ZC



Graphique 4.1 : Les taux zéro-coupon obtenus par la méthode du bootstrap.

1 an de 3 % et du taux ZC 2 ans de 4 %. Ce taux forward de 5 % est en effet le taux à appliquer en année 2 pour que, combiné au taux de 3 % en année 1, il donne un taux ZC de 4 % sur deux ans.

En effet, considérons un placement de 100 € rapportant 3 % la première année et 5 % la seconde année. Sa valeur finale s'écrit :

$$100 \times e^{0,03} \times e^{0,05} = 100 \times e^{0,04 \times 2} = 108{,}33$$

Ce calcul illustre la règle générale suivante : quand les taux sont composés en continu sur des sous-périodes successives, le taux équivalent sur l'ensemble de la période est une moyenne des taux sur les sous-périodes. Dans notre exemple, un taux de 3 % en année 1 suivi d'un taux de 5 % en année 2 conduit à un taux sur l'ensemble des deux années de 4 % par an. Ce résultat n'est vérifié que de manière approchée quand la composition des intérêts n'est pas faite en continu.

Le taux forward à 1 an dans un an est défini comme le taux du placement qui vient d'être construit. S'il est noté R_F, il doit vérifier :

$$e^{0,03} \times e^{R_F} = e^{0,04 \times 2}$$

c'est-à-dire :

$$R_F = 5\ \%$$

En d'autres termes, le taux forward pour la seconde année est le taux qui devrait être observé dans un an pour qu'un placement à 2 ans donne le même résultat que deux placements successifs à un an. Cette remarque se généralise ; le taux forward pour la n-ième année, vu de la date 0, est le taux à 1 an qui devrait être observé au début de la n-ième année pour qu'un placement à n années soit équivalent à la succession de deux placements, le premier sur $n-1$ années et le second sur un an.

Par exemple, le taux forward pour la troisième année vérifie :

$$e^{0,04 \times 2} \times e^{R_F} = e^{0,046 \times 3}$$

Tableau 4.5 : Calcul des taux forward

Année (n)	**Taux zéro à (n) années (en %)**	**Taux forward pour l'année (n) (en %)**
1	3,0	
2	4,0	5,0
3	4,6	5,8
4	5,0	6,2
5	5,3	6,5

Il est donc égal à 5,8 %.

Plus généralement, si deux taux zéro-coupon, notés R_1 et R_2, correspondent à des maturités T_1 et T_2, le taux forward pour la période séparant T_1 et T_2 est défini par :

$$R_F = \frac{R_2T_2 - R_1T_1}{T_2 - T_1} \tag{4.5}$$

L'équation (4.5) se réécrit :

$$R_F = R_2 + (R_2 - R_1)\frac{T_1}{T_2 - T_1} \tag{4.6}$$

Cette relation montre que si la courbe des taux zéro-coupon est croissante entre T_1 et T_2, le taux forward est supérieur à R_2. Si T_2 tend vers T_1 dans l'équation (4.6) et si on note T cette maturité, on peut écrire :

$$R_F = R + T\frac{\partial R}{\partial T}$$

où R est le taux zéro-coupon de maturité T. La valeur de R_F ainsi obtenue est appelée taux forward instantané à la maturité T. C'est le taux forward applicable pour un investissement de durée infinitésimale à la date T, vu de la date 0.

Supposons que les taux ZC d'emprunt et de placement soient identiques (ce qui est proche de la réalité pour les grands établissements financiers). Un investisseur peut fixer au niveau du taux forward un taux de placement ou d'emprunt pour une période future. Considérons les taux ZC du tableau 4.5. Si un investisseur emprunte 100 € à 3 % pour un an et les place à 4 % pour deux ans, il décaisse au bout d'un an $100e^{0,03} = 103,05$ et encaisse après deux ans $100e^{0,04\times 2} = 108,33$. Comme on a l'égalité :

$$108,33 = 103,05e^{0,05}$$

une rentabilité de 5 % est dégagée sur la seconde année. Ce raisonnement peut être étendu à n'importe quelle période future pour laquelle on dispose de taux ZC.

Pour un investisseur amené à penser que les taux vont évoluer défavorablement (en fonction de ses objectifs) dans le futur, il existe de nombreuses stratégies fondées

sur les taux forward qui lui permettent de se couvrir contre ces mouvements (voir encadré 4.2). L'une d'elles consiste à prendre position sur un FRA (*forward rate agreement*). Ces contrats sont décrits dans la section suivante.

Encadré 4.2 Orange County joue la courbe des taux

Supposons qu'un investisseur puisse emprunter ou placer aux taux du tableau 4.5 et pense que les taux à 1 an ne vont pas beaucoup changer dans les cinq années à venir. Il est alors possible d'emprunter pour 1 an chaque année et de placer pour 5 ans. Cette stratégie donne, si l'hypothèse est vérifiée, une rentabilité de l'ordre de 5,3 % par an et coûte 3 %. Cette stratégie consistant à jouer sur la courbe des taux repose sur l'hypothèse que la courbe des taux ZC aux dates futures sera bien différente de celle qui est induite par les taux forward aujourd'hui. Dans notre exemple, les taux forward à horizon d'un an sont égaux à 5 %, 5,8 %, 6,2 % et 6,5 %.

Robert Citron, le trésorier d'Orange County, utilisa en 1992-1993, avec beaucoup de succès, une stratégie similaire à celle que nous venons de décrire. Les profits qu'il réalisa devinrent un élément non négligeable du budget d'Orange County et il fut réélu à son poste. Personne n'écouta son adversaire aux élections qui évoquait le risque de cette stratégie.

En 1994, Robert Citron augmenta encore la taille des positions prises sur la courbe des taux. Il investit massivement dans des produits appelés *inverse floaters* qui produisent un taux d'intérêt égal à la différence entre un taux fixe et un taux variable. Il augmenta le levier de sa position en empruntant sur le marché du Repo. Il aurait continué à gagner si les taux étaient restés stables ou avaient baissé. Mais, comme on pouvait s'y attendre, les taux augmentèrent fortement en 1994. Le 1er décembre, Orange County annonça une perte de 1,5 milliard de dollars et se plaça quelques jours plus tard sous la protection de la loi sur les faillites.

4.7 Les accords de taux futurs

Un accord de taux futur, plus connu sous le sigle FRA (*Forward Rate Agreement*), est un accord négocié sur le marché OTC, selon lequel une des deux parties paiera à l'autre un taux d'intérêt convenu sur un principal donné, pendant une période future spécifiée. L'hypothèse habituelle pour ce type de contrat est que l'emprunt ou le placement se feront au taux LIBOR.

Considérons donc un FRA dans lequel une institution financière X s'engage à prêter à une autre institution Y à une date future T_1 jusqu'à une autre date T_2. On note R_K le taux d'intérêt convenu et L le principal. Notons aussi :

R_F : taux forward LIBOR[6] pour la période séparant T_1 et T_2

R_M : taux LIBOR effectivement observé en T_1 pour l'horizon T_2

Nous abandonnons ici l'hypothèse habituelle de composition continue des intérêts en supposant que les trois taux, R_M, R_F et R_K, sont mesurés avec une fréquence de composition correspondant à leur maturité.

Si elle plaçait au taux LIBOR, X gagnerait R_M. Le FRA implique qu'elle gagnera en fait R_K. La différence $R_K - R_M$ engendre un gain (ou une perte) lié au contrat. Cette différence de taux conduit à une différence de flux, pour X en date T_2, égale à :

$$L\,(R_K - R_M)\,(T_2 - T_1) \tag{4.7}$$

Symétriquement, la différence de flux pour Y s'écrit :

$$L\,(R_M - R_K)\,(T_2 - T_1) \tag{4.8}$$

Ces deux équations permettent de proposer une interprétation alternative des FRA. En effet, tout se passe comme si X allait recevoir le taux R_K et payer le taux R_M pendant la période future allant de T_1 à T_2. La situation est symétrique pour Y.

En pratique, l'échange de flux lié à un FRA est réalisé en date T_1. En conséquence, les flux décrits dans les équations (4.7) et (4.8) doivent être actualisés à la date T_1, ce qui donne pour X :

$$\frac{L\,(R_K - R_M)\,(T_2 - T_1)}{1 + R_M\,(T_2 - T_1)}$$

et pour Y :

$$\frac{L\,(R_M - R_K)\,(T_2 - T_1)}{1 + R_M\,(T_2 - T_1)}$$

■ **Exemple 4.3**

Supposons qu'une entreprise conclue un FRA qui spécifie qu'elle recevra un taux fixe de 4 % sur un principal de 1 million d'euros, placement débutant dans trois ans pour une période de trois mois. Si, dans trois ans, le LIBOR 3 mois est à 4,5 %, le flux du FRA sera, dans trois ans et trois mois :

$$1000000 \times (0{,}04 - 0{,}045) \times 0{,}25 = -1250{,}00 \text{ €}$$

La valeur actualisée (dans trois ans) sera :

$$\frac{1000000 \times (0{,}04 - 0{,}045) \times 0{,}25}{1 + 0{,}045 \times 0{,}25} = -1236{,}09 \text{ €}$$

La contrepartie recevra bien sûr 1 236,09 €. Ici, tous les taux sont exprimés en composition trimestrielle.

6. Les taux forward LIBOR sont calculés avec la méthode décrite dans la section 4.6, à partir de la courbe ZC déduite des cotations de swaps (voir section 7.6).

Évaluation d'un FRA

La valeur du FRA en date 0 est nulle si $R_F = R_K$[7]. En effet, comme nous l'avons montré dans la section 4.6, le taux forward est le taux auquel un emprunt ou un placement pour la période séparant T_1 et T_2 peuvent être mis en place dès la date 0. Pour calculer la valeur du FRA si R_F et R_K sont différents, on procède de la manière suivante. Considérons deux FRA sur le même principal, le premier promettant des intérêts au taux R_F et le second au taux R_K. Les deux contrats sont identiques à l'exception du flux de date T_2 [8]. La différence de valeur de ces deux contrats en date 0 est la valeur actuelle de la différence des flux engendrés. Elle est égale à :

$$V_{\text{FRA}} = L(R_K - R_F)(T_2 - T_1)e^{-R_2 T_2} \tag{4.9}$$

où R_2 est le taux zéro-coupon (continu) de maturité T_2 prévalant en date 0. Comme la valeur du FRA promettant R_F est nulle, l'équation (4.9) donne exactement la valeur du FRA promettant R_K. Quand le FRA spécifie que le taux R_K sera payé au lieu d'être reçu, la valeur du FRA est l'opposé de la précédente, c'est-à-dire :

$$V_{\text{FRA}} = L(R_F - R_K)(T_2 - T_1)e^{-R_2 T_2} \tag{4.10}$$

■ **Exemple 4.4**

On suppose que les taux (continus) LIBOR et forward sont ceux du tableau 4.5. On considère un FRA dans lequel on reçoit un taux de 6 % (composé annuellement) pendant un an dans un an sur un principal de 1 million d'euros. Dans cette situation, le taux forward continu est 5 %, soit 5,127 % en composition annuelle. De l'équation (4.9) on déduit que la valeur du FRA est :

$$1\ 000\ 000 \times (0{,}06 - 0{,}05127) \times 1 \times e^{-0{,}04 \times 2} = 8\ 058\ €$$

En comparant les équations (4.7) et (4.9) on constate qu'un FRA peut être évalué en deux étapes :

1. Calcul du flux en supposant que le taux forward sera le taux de marché à la date T_1.
2. Actualisation de ce flux au taux sans risque.

4.8 La duration

La *duration* d'une obligation est une mesure de la durée moyenne d'attente pour percevoir les flux de cette obligation. Un zéro-coupon de maturité n années a une

7. En général, R_K est fixé égal à R_F quand le FRA est mis en place.

8. R_K, R_F et R_M sont des taux calculés avec une fréquence de composition des intérêts correspondant à $T_2 - T_1$, alors que R_2 est composé en continu.

duration égale à n. Par contre, une obligation à coupons de maturité n a une duration plus faible car des flux intermédiaires sont payés avant la date d'échéance.

Considérons une obligation de taux actuariel continu y, payant des flux c_i, $i = 1,...,n$ aux dates t_i, $i = 1,...,n$. Le prix B et le taux actuariel y sont liés par la relation :

$$B = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-yt_i} \tag{4.11}$$

La duration, D, de l'obligation est définie par :

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i c_i e^{-yt_i}}{B} \tag{4.12}$$

qui peut encore s'écrire :

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \left[\frac{c_i e^{-yt_i}}{B} \right]$$

Les termes entre crochets sont les ratios des différents cash-flows actualisés rapportés au prix de l'obligation. Comme ce dernier est égal à la somme des cash-flows actualisés, ces termes définissent un système de poids positifs dont la somme est égale à 1. La duration est donc bien une moyenne pondérée des dates auxquelles les flux sont payés. Le poids affecté à la date t_i est alors le rapport du cash-flow actualisé, payé à cette date, et du prix de l'obligation.

Si on envisage un changement Δy du taux actuariel, on a l'approximation :

$$\Delta B = \frac{\partial B}{\partial y} \Delta y \tag{4.13}$$

De l'équation (4.11) on peut alors déduire :

$$\Delta B = -\Delta y \sum_{i=1}^{n} c_i t_i e^{-yt_i} \tag{4.14}$$

(Cette équation montre la relation négative entre prix de l'obligation et taux actuariel.) Les équations (4.12) et (4.14) conduisent à :

$$\Delta B = -BD\Delta y \tag{4.15}$$

L'équation (4.15) peut encore s'écrire :

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y \tag{4.16}$$

L'équation (4.16) est la relation essentielle justifiant l'utilisation de la duration, introduite par McCaulay en 1938. Elle montre que la variation, en pourcentage, du prix d'une obligation, consécutive à une variation du taux actuariel, est égale au produit de cette variation de taux par la duration.

Considérons une obligation à 6 ans, payant un taux de coupon annuel de 5 %, et caractérisée par un taux actuariel de 6 %. Le tableau 4.6 montre le détail des calculs

permettant d'obtenir la duration. La troisième colonne indique les flux actualisés (au taux actuariel) de l'obligation. La somme des nombres de cette colonne est donc le prix de l'obligation.

Tableau 4.6 : Calcul de la duration

Date (en années)	Flux	Flux actualisé	Poids	Date × poids
1	5	4,709	0,050	0,05
2	5	4,435	0,047	0,094
3	5	4,176	0,044	0,133
4	5	3,933	0,042	0,167
5	5	3,704	0,039	0,197
6	105	73,256	0,778	4,665
Total	130	94,213	1,000	5,306

Les poids de l'avant-dernière colonne sont obtenus en divisant les termes de la troisième colonne par le prix. Enfin, dans la dernière colonne sont indiqués les produits des poids par les dates de paiement, variant ici de 1 à 6. Enfin, le total de cette dernière colonne fournit la duration $D = 5{,}306$ années.

Les changements de taux d'intérêt sont le plus souvent mesurés en points de base, un point de base valant 0,01 %. L'exemple qui suit étudie la pertinence de la relation (4.15).

■ **Exemple 4.5**

L'équation (4.15), appliquée à l'obligation du tableau 4.6, permet d'écrire :

$$\Delta B = -94{,}213 \times 5{,}306 \Delta y = -499{,}9 \Delta y$$

Quand le taux actuariel augmente de 10 points de base, le prix de l'obligation diminue de 0,4999, qu'on arrondit à 0,5. Par conséquent, avec un taux actuariel de 6,1 %, on doit avoir un prix de 93,713. Quelle est la qualité de cette estimation ? Le prix de l'obligation s'écrit en fait :

$$5e^{-0{,}061} + 5e^{-0{,}061 \times 2} + 5e^{-0{,}061 \times 3} + 5e^{-0{,}061 \times 4}$$

$$+5e^{-0{,}061 \times 5} + 105e^{-0{,}061 \times 6} = 93{,}714$$

La différence est donc négligeable, d'autant que les obligations sont cotées avec deux chiffres après la virgule.

La duration modifiée

L'analyse précédente est fondée sur l'expression d'un taux actuariel continu. Si y est en composition annuelle, l'équation (4.15) devient :

$$\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1+y}$$

Plus généralement, si y a une fréquence de composition de m fois par an, on a :

$$\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1+y/m}$$

La variable D^*, définie par :

$$D^* = -\frac{D}{1+y/m}$$

est parfois appelée *duration modifiée*. On peut donc écrire :

$$\Delta B = -BD^*\Delta y \tag{4.17}$$

où y est exprimé avec une fréquence de composition des intérêts de m fois par an.

■ **Exemple 4.6**

L'obligation du tableau 4.6 a un coupon annuel de 5 % et une duration de 5,306 années. Le taux actuariel, exprimé en composition annuelle, est égal à 6,184 %. La duration modifiée est donc donnée par :

$$D^* = \frac{5{,}306}{1+0{,}06184} = 4{,}997$$

Si l'on applique à nouveau l'équation (4.17), la variation du prix de l'obligation en cas de variation du taux actuariel est :

$$\Delta B = -94{,}213 \times 4{,}997\Delta y$$

$$\Delta B = -470{,}78\Delta y$$

Par conséquent, si l'augmentation du taux actuariel est de 10 points de base, la variation de prix de l'obligation est –0,471 si l'on arrondit à trois chiffres après la virgule. Le prix devrait donc passer à 94,213 – 0,471 =93,742. Si on recalcule le prix réel après modification du taux actuariel, on aboutit à 93,742, c'est-à-dire un prix identique au prix qui a été déterminé à l'aide de la duration.

Portefeuilles d'obligations

La duration d'un portefeuille, D, peut être définie comme une moyenne des durations des titres qui composent le portefeuille, avec des poids proportionnels à la part (en valeur) de chacun des titres dans le portefeuille. Dans le cas simple où le portefeuille contient une unité de chaque obligation, la duration du portefeuille est la moyenne

des durations des titres qui le composent, pondérées par leurs prix (en pourcentage de la valeur totale du portefeuille).

Les équations (4.15) et (4.17) s'appliquent alors avec B défini comme la valeur du portefeuille. Elles permettent d'estimer le changement de la valeur du portefeuille pour un changement Δy des taux actuariels de toutes les obligations.

Il est essentiel de garder à l'esprit que l'utilisation de la duration repose sur l'hypothèse implicite que les taux actuariels des différentes obligations subissent tous la même variation.

Quand les obligations ont des maturités très différentes, cette hypothèse est pratiquement équivalente à celle d'un déplacement parallèle de la courbe des taux zéro-coupon. Par conséquent, nous devrions interpréter les équations (4.15) à (4.17) comme un moyen d'estimer l'impact d'un déplacement parallèle de la courbe des taux sur la valeur des obligations. De plus, ces équations supposent une faible variation des taux actuariels.

4.9 La convexité

Dans le graphique 4.2 sont représentées les variations de valeur en pourcentage de deux portefeuilles ayant la même duration. Les pentes des courbes sont les mêmes à l'origine, montrant bien que, pour de petites variations de y, les variations de valeur (en pourcentage) des portefeuilles sont voisines, ce qui est illustré par l'équation (4.16). Par contre, pour des variations importantes de y, les portefeuilles se comportent différemment. X a une courbure plus marquée. Cette caractéristique de courbure s'appelle la *convexité* ; en tenir compte permet d'améliorer l'ajustement déduit de (4.16).

La convexité est mesurée par :

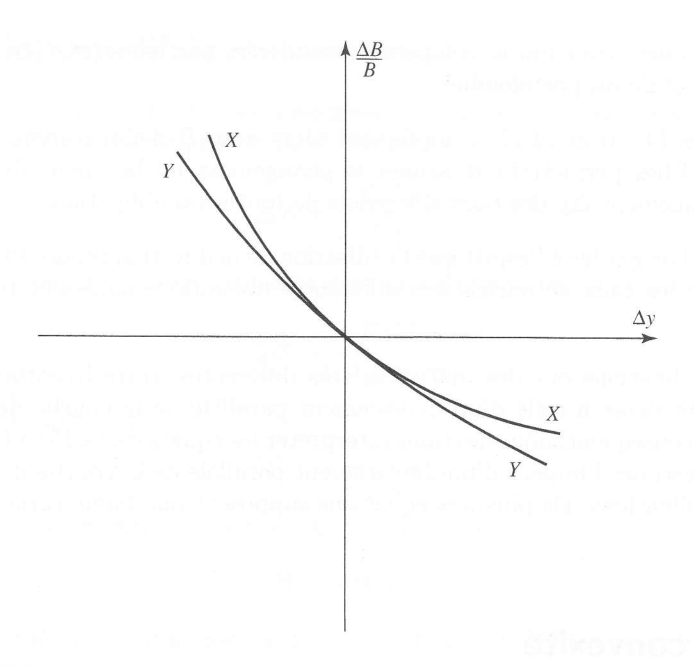
$$C = \frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i t_i^2 e^{-yt_i}}{B}$$

La convexité d'un portefeuille d'obligations tend à être plus importante quand les flux engendrés par ce portefeuille sont régulièrement répartis sur une longue période. Elle est plus faible lorsque les flux sont concentrés sur une période courte.

Lorsque la convexité est prise en compte, l'équation (4.13) devient :

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^2$$

En contrôlant à la fois la duration et la convexité, une entreprise peut couvrir le risque de taux pour des déplacements parallèles relativement importants de la courbe des taux zéro-coupon. Cependant, elle reste exposée à des déplacements non parallèles de cette courbe.



Graphique 4.2 : Deux portefeuilles obligataires de même duration.

4.10 Les théories de la structure par termes des taux

Il est assez naturel de se demander ce qui détermine la forme de la courbe des taux zéro-coupon. Pourquoi est-elle parfois croissante, parfois décroissante, et parfois croissante pour certaines maturités et décroissantes pour d'autres ?

Plusieurs théories ont été proposées, dont la plus simple est la théorie des anticipations. Selon cette approche, les taux longs reflètent les anticipations des opérateurs concernant les taux courts qui prévaudront dans le futur. Plus précisément, selon cette théorie, le taux forward pour une période future donnée est l'espérance du taux spot qui prévaudra à cette période. Une autre justification repose sur l'hypothèse de segmentation qui stipule qu'il n'y a pas forcément de relation mécanique entre taux longs et taux courts. En effet, les opérateurs sont différents sur ces deux parties de la courbe. Par exemple, un fonds de pension détiendra des obligations de maturité longue et n'aura aucun intérêt à se déplacer sur des maturités plus courtes. À l'inverse, les taux courts sont déterminés par le jeu de l'offre et de la demande sur le marché des capitaux à court terme.

La troisième théorie est celle de la préférence pour la liquidité. Dans cette approche, les taux forward sont supérieurs aux taux courts futurs espérés pour les périodes correspondantes. Ce résultat vient de l'hypothèse selon laquelle les investisseurs préfèrent un horizon de placement court pour préserver la liquidité de leurs portefeuilles. Symétriquement, les emprunteurs préfèrent emprunter à long terme à taux fixe. Dans ces conditions, si aucune incitation ne contrebalançait ces tendances, les banques feraient des prêts à long terme, financés par des dépôts à court terme. Cette situation

engendrerait un risque de taux important. Par conséquent, pour éviter ce risque de taux et apparier demande et offre de capitaux, les intermédiaires augmentent les taux longs par rapport aux taux courts futurs espérés, ce qui décourage les emprunteurs et incite les prêteurs à prêter à long terme. La théorie de la préférence pour la liquidité induit une structure par termes des taux dans laquelle les taux forward sont plus élevés que les taux zéro-coupon futurs espérés. De même, elle conduit à une courbe des taux croissante, ce qui constitue la forme la plus couramment observée sur les marchés.

Résumé

De nombreux taux d'intérêt différents sont utilisés sur les marchés financiers. Le taux zéro-coupon à n années est le taux applicable à un investissement de n années n'engendrant pas de flux intermédiaires. Les taux forward sont les taux applicables à des périodes futures, implicites dans les taux zéro-coupon observés aujourd'hui. Le taux actuariel au pair d'une obligation est le taux de coupon qui rend le prix de cette obligation égal à son nominal.

Les taux d'État doivent être distingués des taux LIBOR. Les taux d'État sont les taux auxquels empruntent les gouvernements dans leur propre devise. Les taux LIBOR sont cependant les taux les plus couramment utilisés (comme taux sans risque) dans l'évaluation des actifs dérivés.

La méthode de calcul des taux ZC appelée « bootstrap » est la plus courante. Elle consiste à calculer les taux à maturité proche à l'aide des titres d'horizon court et à en déduire, de proche en proche, les taux ZC correspondant aux maturités plus éloignées. Cette courbe des taux ZC est utilisée quotidiennement par les opérateurs des marchés de taux.

Un FRA est un contrat, négocié sur le marché OTC, qui définit le taux qui sera appliqué à un emprunt ou placement lors d'une période débutant à une date future. Ces contrats peuvent être évalués en utilisant une méthode de cristallisation, consistant (a) à supposer que les taux spot futurs sont égaux aux taux forward observés aujourd'hui et (b) à actualiser les flux au taux sans risque.

Le concept de duration est important dans la couverture du risque de taux. La duration d'un titre mesure la durée moyenne d'attente des flux pour le détenteur du titre. C'est en fait une moyenne pondérée des dates de paiement des flux, chaque date de flux étant pondérée par la valeur actuelle de celui-ci, rapportée au prix du titre. Le résultat essentiel pour établir une stratégie de couverture fondée sur la duration est le suivant :

$$\Delta B = -BD\Delta y$$

où B est le prix du titre, D est la duration, Δy la variation (supposée de faible amplitude) du taux actuariel et ΔB est la variation du prix du titre.

Références complémentaires

ALLEN S. L. et A. D. KLEINSTEIN, *Valuing Fixed-Income Investments and Derivative Securities,* New York Institute of Finance, 1991.

FABOZZI F. J., *Fixed-Income Mathematics : Analytical and Statistical Techniques,* Mc Graw Hill, New York, 1996.

FABOZZI F. J., *Duration, Convexity, and Other Bond Risk Measures,* Frank J. Fabozzi Assoc., 1999.

GRINBLATT M. et F. A. LONGSTAFF, « Financial Innovations and the Role of Derivative Securities : An Empirical Analysis of the Treasury Strips Program », *Journal of Finance,* 55, 3 (2000), 1415-36.

JORION P., *Big Bets Gone Bad : Derivatives and Bankruptcy in Orange County,* Academic Press, New York, 1995.

STIGUM M. et F. L. ROBINSON, *Money Markets and Bond Calculations,* Chicago : Irwin, 1996.

Problèmes et exercices

4.1 Une banque vous prête de l'argent à 14 % par an en composition trimestrielle. Quels sont les taux équivalents en (a) composition continue et (b) composition annuelle ?

4.2 Qu'entend-on par taux LIBOR et taux LIBID ? Lequel des deux est le plus élevé ?

4.3 Les taux zéro-coupon à 6 mois et à 1 an sont tous deux de 10 %. Le taux actuariel d'une obligation de maturité 18 mois (dont un coupon vient d'être payé), payant un coupon semestriel de 8 % par an, est de 10,4 %. Quel est le prix de cette obligation ? Quel est le taux zéro-coupon à 18 mois ? Vous supposerez que tous ces taux sont exprimés en composition semestrielle.

4.4 Un investisseur reçoit 1 100 € pour un placement de 1 000 € réalisé un an plus tôt. Calculez le taux de ce placement en composition a) annuelle, b) semestrielle, c) mensuelle, d) continue.

4.5 Considérons la courbe zéro-coupon (en composition continue) donnée dans le tableau suivant.

Maturité (mois)	Taux (en % par an)
3	8,0
6	8,2
9	8,4
12	8,5
15	8,6
18	8,7

Calculez les taux forward, vus de la date 0, pour les trimestres 2 à 6.

4.6 En utilisant les taux de l'exercice 4.5, évaluez un FRA qui conduit son détenteur à obtenir un taux de 9,5 % pour trois mois dans un an sur un principal de 1 million d'euros. Le taux est exprimé en composition trimestrielle.

4.7 La structure des taux a une pente positive. Rangez les taux suivants en ordre croissant.

a. Le taux zéro-coupon à cinq ans.

b. Le taux actuariel d'une obligation de maturité cinq ans.

c. Le taux forward pour le trimestre débutant dans cinq ans.

Quelles sont les réponses si la courbe des taux est décroissante en fonction de la maturité ?

4.8 Quelle information vous apporte la duration sur la sensibilité d'un portefeuille d'obligations par rapport aux taux d'intérêt ? Quelles sont les limites de cette notion ? Dans une couverture en duration, quelle hypothèse implicite fait-on sur les mouvements de la courbe des taux ?

4.9 Quel taux continu est équivalent à un taux de 15 % par an en composition mensuelle ?

4.10 Un compte d'épargne paie un taux continu de 12 % par an mais l'intérêt est payé chaque trimestre. Combien la banque paye-t-elle d'intérêts (tous les 3 mois) sur un montant de 10 000 € ?

4.11 Les taux zéro-coupon pour des horizons de 6 à 30 mois avec un pas de 6 mois sont respectivement de 4 %, 4,2 %, 4,4 %, 4,6 % et 4,8 % en composition continue. Quel est le prix coupon couru d'une obligation de nominal 100 de maturité 30 mois ayant un taux de coupon de 4 % par an avec des coupons semestriels ?

4.12 Quel est le taux actuariel d'une obligation à 3 ans dont le prix coupon couru est de 104, sachant que le coupon est semestriel et que le taux de coupon est de 8 % ?

4.13 Les taux zéro-coupon à 6, 12, 18 et 24 mois sont respectivement de 5 %, 6 %, 6,5 % et 7 %. Quel est le taux actuariel au pair à deux ans ?

4.14 Considérons la courbe zéro-coupon (en composition continue) donnée dans le tableau suivant.

Maturité (années)	Taux (en % par an)
1	2,0
2	3,0
3	3,7
4	4,2
5	4,5

Calculez, vus de la date 0, les taux forward de maturité 1 an pour les années 2 à 5.

4.15 Utilisez les taux de l'exercice 4.14 pour évaluer un FRA dans lequel vous allez payer 5 % pendant l'année 3 sur un principal de 1 million d'euros.

4.16 Le prix d'une obligation, notée A, de maturité 10 ans et de taux de coupon 8 % par an est de 90. Le prix d'une obligation, notée B, de maturité 10 ans et de taux de coupon 4 % est de 80. Quel est le taux zéro-coupon à 10 ans ? (Indication : considérez une position consistant en l'achat de deux titres B et la vente d'un titre A.)

4.17 Expliquez avec précision pourquoi la théorie de la préférence pour la liquidité est cohérente avec une courbe des taux plus souvent croissante que décroissante.

4.18 « Quand la courbe des taux ZC est croissante, le taux ZC pour une maturité quelconque est plus élevé que le taux au pair. Quand la courbe est inversée, c'est le contraire. » Expliquez pourquoi il en est ainsi.

4.19 Pourquoi les taux des obligations d'État sont-ils en général significativement plus faibles que d'autres taux « presque » sans risque ?

4.20 Pourquoi un prêt sur le marché du Repo présente-t-il un risque de crédit très faible ?

4.21 Expliquez pourquoi un FRA est équivalent à l'échange d'un taux variable contre un taux fixe ?

4.22 Une obligation de maturité 5 ans a un taux actuariel (continu) de 11 % et paie un taux de coupon de 8 % par an. Le coupon est payé en fin d'année.

a. Quel est le prix de cette obligation ?

b. Quelle est la duration de cette obligation ?

c. En utilisant la duration, calculez l'impact d'une baisse du taux actuariel de 0,2 % sur le prix.

d. En recalculant le prix avec un taux actuariel de 10,8 %, vérifiez le résultat de la question précédente.

4.23 Les bons du Trésor à 6 mois et 1 an cotent respectivement 94,0 et 89,0. Une obligation à 18 mois payant un coupon de 4 € chaque semestre cote actuellement 94,84 € (un coupon vient d'être payé). Une obligation à 2 ans payant un coupon de 5 € chaque semestre cote 97,12 € (un coupon vient d'être payé). Calculez les taux ZC à 6 mois, 1 an, 18 mois et 2 ans.

Questions complémentaires

4.24 Un taux d'intérêt vaut 5 % par an en composition semestrielle. Quel est le taux équivalent (a) en composition annuelle, (b) en composition mensuelle et (c) en composition continue ?

4.25 Les taux ZC à 6 mois, 12 mois, 18 mois et 2 ans sont respectivement de 4 %, 4,5 %, 4,75 % et 5 % en composition semestrielle.

a. Quels sont les taux continus correspondants ?

b. Quel est le taux forward pour une période de 6 mois débutant dans 18 mois ?

c. Quelle est la valeur d'un FRA dans lequel vous toucherez 6 % sur 1 million (en composition semestrielle) sur une période de 6 mois débutant dans 18 mois ?

4.26 Quel est le taux actuariel au pair à 2 ans quand les taux ZC sont ceux de l'exercice 4.25 ? Quel est le taux actuariel d'une obligation à 2 ans qui paie un coupon égal au taux actuariel au pair ?

4.27 Le tableau suivant donne les prix de différentes obligations.

Nominal	Maturité (en années)	Taux de coupon*	Prix
100	0,5	0,0	98
100	1,0	0,0	95
100	1,5	6,2	101
100	2,0	8,0	104

* La moitié du coupon est payée chaque semestre.

a. Calculez les taux ZC pour les maturités de 6, 12, 18 et 24 mois.

b. Quels sont les taux forward à 6 mois, dans 6 mois, 12 mois et 18 mois ?

c. Quels sont les taux actuariels au pair d'obligations de maturités 6, 12, 18 et 24 mois si ces obligations payent des coupons semestriels ?

d. Estimez le prix et le taux actuariel d'une obligation à 2 ans qui paie un taux de coupon de 7 % par an (avec paiements semestriels).

4.28 Un portefeuille A comprend une obligation ZC à 1 an de nominal 2 000 € et un ZC à 10 ans de nominal 6 000 €. Un portefeuille B comprend un ZC à 5,95 ans de nominal 5 000 €. Toutes ces obligations ont un taux actuariel de 10 %.

a. Montrez que les deux portefeuilles ont la même duration.

b. Montrez que les variations en pourcentage des deux portefeuilles sont identiques si le taux actuariel varie de 0,1 %.

c. Si les taux actuariels augmentaient de 5 %, quelles seraient les variations en pourcentage des deux portefeuilles ?

Chapitre 5

La détermination des prix forward et des prix futures

Dans ce chapitre, nous analysons les liens entre prix forward, prix futures et prix au comptant. Les prix forward sont plus faciles à analyser que les prix futures car il n'y a pas de marking to market ; en d'autres termes, « les compteurs ne sont pas remis à zéro chaque jour » par des appels de marge. Heureusement, nous verrons que les prix forward et futures restent très proches quand les contrats ont même échéance.

La première partie de ce chapitre expose quelques résultats essentiels sur la relation entre prix forward et prix spot. Ces résultats sont ensuite utilisés pour analyser le lien entre prix futures et prix spot pour les contrats sur indices, sur devises ou sur matières premières. Les contrats futures de taux seront examinés dans le chapitre suivant.

5.1 Actifs d'investissement ou actifs de consommation

Dans l'étude des forward et des futures, il est important de distinguer actifs d'investissement et actifs de consommation. Un actif d'investissement est un actif considéré par une majorité d'investisseurs comme un moyen d'investir ; c'est le cas des obligations, des actions ou encore de l'or et de l'argent. Par exemple, l'argent a des usages industriels multiples. Il est cependant considéré par un grand nombre d'agents économiques comme un véhicule d'investissement. Un actif de consommation est un actif qui est prioritairement détenu pour la consommation. Il n'est donc pas, en général, utilisé pour investir. Le cuivre, le pétrole ou les carcasses de porcs sont des exemples de tels actifs.

Comme nous le verrons au cours de ce chapitre, l'argument d'absence d'arbitrage peut être utilisé pour calculer le prix forward ou le prix futures d'un actif d'investissement à partir du prix spot et d'autres variables de marché. Ce même raisonnement ne s'applique plus pour les actifs de consommation.

5.2 Les ventes à découvert

Certaines stratégies d'arbitrage nécessitent de vendre à découvert. Cette opération consiste à vendre des actifs que l'on ne possède pas ; c'est possible pour certains actifs d'investissement, mais pas pour tous.

Considérons, pour illustrer ce mécanisme, le cas d'une vente à découvert d'actions. Un investisseur, noté A, passe auprès de son intermédiaire (appelé B) un ordre de vente à découvert de 500 titres IBM. Pour exécuter cet ordre, le broker va emprunter les titres à un autre client (appelé C) et les vendre sur le marché par la procédure usuelle. L'investisseur A peut maintenir cette position aussi longtemps qu'il le souhaite, tant que le broker B trouve un client qui prête les titres. À un moment, l'investisseur va clore sa position en achetant 500 titres IBM. Ceux-ci vont alors être mis sur le compte du client prêteur. A réalise un profit si le cours a baissé et subit une perte si le cours a augmenté. Si, à un moment quelconque pendant cette opération, le broker B ne trouve plus de prêteur C, A est obligé de dénouer sa position immédiatement, même s'il ne le souhaite pas (on parle alors de *short-squeeze*).

L'investisseur, emprunteur de titres, doit payer à B les dividendes ou les intérêts que reçoit normalement le détenteur des titres vendus à découvert. B crédite alors le compte du client C, prêteur de titres. Par exemple, supposons que A ait vendu à découvert en avril 500 IBM alors que le cours était à 120 USD et qu'il dénoue sa position en juillet alors que le cours est à 100 USD ; supposons encore qu'IBM ait payé en mai 1 USD de dividende par action.

A reçoit 500 × 120 USD = 60 000 USD en avril quand la vente à découvert est réalisée. Il paye 500 × 1 USD = 500 USD quand le dividende est versé. Enfin, il décaisse encore 500 × 100 USD = 50 000 USD en dénouant sa position en juillet. Le gain net est donc :

$$60\ 000 - 50\ 000 - 500 = 9\ 500 \text{ USD}$$

Le tableau 5.1 illustre cet exemple en montrant que les cash-flows de la vente à découvert sont symétriques de ceux d'un achat en avril suivi d'une revente en juillet.

Tableau 5.1 : Cash-flows d'une vente à découvert et d'un achat au comptant suivi d'une revente

Achat d'actions	
Avril : achat de 500 titres à 120 $	–60 000 $
Mai : encaissement du dividende	+500 $
Juillet : revente à 100 $	+50 000 $
Profit net	–9 500$
Vente à découvert	
Avril : emprunt de 500 titres et vente à 120 $	+60 000 $
Mai : paiement du dividende	–500 $
Juillet : rachat à 100 $	–50 000 $
Profit net	+9 500 $

L'investisseur doit posséder un compte de marge chez son intermédiaire financier. Il est composé de cash ou de titres qui garantissent que l'investisseur pourra faire face à ses engagements en cas de hausse du titre vendu à découvert. Ce compte a la même fonction que celui décrit au chapitre 2 pour les contrats futures. Un deposit initial est exigé et des montants additionnels pourront être exigés si la situation se détériore (c'est-à-dire si le prix de l'actif monte). Ce compte de marge ne représente cependant pas réellement un coût pour l'investisseur car les fonds déposés sur ce compte sont en général rémunérés. Si le taux proposé est trop faible, l'investisseur a la possibilité de déposer des titres (des obligations d'État, par exemple) qui rapportent des intérêts sous forme de coupons.

Aux États-Unis, il existe une règle particulière n'autorisant les ventes à découvert qu'à la suite d'un *up-tick*, c'est-à-dire après une hausse du titre. Une exception est faite quand un trader vend un portefeuille de titres répliquant un indice.

5.3 Hypothèses et notations

Dans ce chapitre, nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées, au moins pour certains intervenants du marché.

1. Il n'y a pas de frais de transaction.
2. Le taux d'imposition sur les profits est identique pour tous.
3. Prêts et emprunts peuvent être réalisés au même taux sans risque.
4. Les opérateurs profitent des opportunités d'arbitrage dès qu'elles apparaissent.

Il n'est pas nécessaire que ces hypothèses soient vérifiées pour tous les intervenants. Il suffit qu'elles le soient pour un sous-ensemble d'acteurs significatifs du marché, comme les grandes banques d'investissement. En fait, si les opérateurs importants sont à l'affût des éventuelles opportunités d'arbitrage, ils vont permettre de maintenir la relation théorique entre prix forward et prix spot.

Dans la suite, nous utilisons les notations suivantes :

T : délai jusqu'à la date de livraison d'un contrat forward ou futures (mesuré en années)

S_0 : prix de l'actif sous-jacent au contrat à la date 0 (aujourd'hui)

F_0 : prix forward ou futures aujourd'hui

r : taux sans risque annuel continu pour un placement ou emprunt de T années

Le taux sans risque, r, est souvent interprété comme le taux des émissions du Trésor, c'est-à-dire le taux auquel un gouvernement emprunte dans sa propre devise. Comme nous l'avons mentionné au chapitre 4, les grandes institutions financières et les opérateurs des marchés d'actifs dérivés utilisent plutôt le taux LIBOR pour actualiser les flux.

5.4 Le prix forward d'un actif d'investissement

Le contrat forward le plus facile à évaluer est un contrat dont le sous-jacent est un actif n'engendrant pas de revenus pendant la durée de vie du contrat. Les actions ne versant pas de dividendes (ND dans la suite) et les obligations zéro-coupon (ZC dans la suite) sont des exemples de ce type d'actif.

Illustration

Considérons un contrat forward d'échéance 3 mois sur une action ND[1]. Le cours de l'action est 40 € aujourd'hui et le taux sans risque est 5 % par an. Nous décrivons ci-après les stratégies offertes à un arbitragiste pour deux hypothèses extrêmes.

Le prix forward est 43 €, l'arbitragiste emprunte 40 € au taux sans risque, achète l'action et vend un contrat forward. À la fin des trois mois, il rembourse son emprunt :

$$40e^{0,05\times\frac{3}{12}} = 40{,}50 \text{ €}$$

Il livre l'action et reçoit 43 €. En suivant cette stratégie, il a assuré un profit de 43 € – 40,50 € = 2,5 € à la fin des trois mois.

Supposons maintenant que le prix forward soit 39 €. Dans ce cas, l'arbitragiste achète le forward, vend l'action à découvert et place le montant de cette vente au taux sans risque. Il obtient de ce placement :

$$40e^{0,05\times\frac{3}{12}} = 40{,}50 \text{ €}$$

Il paie par ailleurs 39 € pour obtenir l'action qu'il utilise pour dénouer sa position de vente à découvert. Le profit net est dans ce cas :

$$40{,}5 \text{ €} - 39 \text{ €} = 1{,}5 \text{ €}$$

Les résultats des deux stratégies que nous venons de présenter sont résumés dans le tableau 5.2.

Quelles sont les conditions permettant le genre d'opération décrite dans le tableau 5.2 ? Le premier cas engendre un profit car le prix forward est plus grand que 40,5 €, le second parce que ce même prix forward est inférieur à 40,5 €. Il apparaît que l'absence d'opportunités d'arbitrage requiert un prix forward égal à 40,5 € exactement.

1. Les contrats forward sur actions individuelles sont relativement peu développés mais permettent d'exposer simplement les idées essentielles. Des contrats futures sur actions individuelles sont cotés sur le LIFFE depuis 2001 et aux États-Unis depuis 2002.

Tableau 5.2 : Opportunités d'arbitrage quand les prix spot et forward, d'un actif ne payant pas de flux intermédiaires, sont incohérents (prix de l'actif = 40 €, (taux sans risque = 5 %, maturité du contrat = 3 mois)

Prix forward = 43 €	**Prix forward = 39 €**
Stratégie aujourd'hui	*Stratégie aujourd'hui*
Emprunt de 40 € à 5 % pour 3 mois	Vente à découvert d'une unité d'actif (40 €)
Achat d'une unité d'actif	Placement des 40 € à 5 % pour 3 mois
Position courte sur le forward (à 43 €)	Position longue sur le forward (à 39 €)
Stratégie dans 3 mois	*Stratégie dans 3 mois*
Vente de l'actif à 43 €	Achat de l'actif à 39 €
Remboursement de l'emprunt : 40,5 €	Réception de 40,5 € du placement initial
Profit 2,5 €	Profit = 1,5 €

Encadré 5.1 Kidder Peabody

Les banques d'investissement ont développé une façon de créer des zéro-coupon, appelés *strip*, en découpant une obligation à coupons et en vendant séparément les différents flux associés. Joseph Jett, trader chez Kidder Peabody, avait une stratégie relativement simple. Il achetait des strips sur le marché au comptant et les revendait à terme à l'aide de contrats forward. Comme le montre l'équation (5.1), le prix forward d'un actif qui ne paie pas de revenu intermédiaire est toujours plus élevé que son prix spot. Par exemple, si le taux à 3 mois est de 4 % en base annuelle et si le prix spot d'un strip est de 70 €, le prix forward correspondant est de $70e^{0,04\times 3/12} = 70,70$ €. Le système informatique de Kidder Peabody considérait la différence comme un profit au moment de la transaction. Évidemment, cette différence représentait simplement le coût de financement du strip. Mais, en renouvelant la position sur les contrats forward, Jett évitait que le coût de financement ne lui soit imputé. Par conséquent, le système comptabilisait un profit de 100 millions, impliquant une large gratification pour Jett, alors qu'en réalité il s'agissait d'une perte d'environ 350 millions. Cela montre que, même dans les institutions financières importantes, des dysfonctionnements importants peuvent survenir.

Généralisation

Considérons un contrat forward sur un actif d'investissement coté S_0. T est la durée de vie du contrat, r le taux sans risque et F_0 le prix forward. S_0 et F_0 sont liés par la relation :

$$F_0 = S_0 e^{rT} \tag{5.1}$$

Si $F_0 > S_0e^{rT}$, les arbitragistes achètent l'actif et vendent le forward. Si $F_0 < S_0e^{rT}$, ils achètent le forward et vendent l'actif à découvert[2]. Dans l'exemple, $S_0 = 40$, $r = 0{,}05$ et $T = 0{,}25$; par conséquent, l'équation (5.1) entraîne :

$$F_0 = 40e^{0{,}05\times 0{,}25} = 40{,}5 \text{ €}$$

C'est bien le résultat obtenu plus haut.

■ **Exemple 5.1**

Considérons un forward à 4 mois sur un zéro-coupon de maturité un an. Le prix aujourd'hui du ZC est 0,93 € (l'obligation aura encore huit mois à vivre à l'échéance du contrat forward). Le taux sans risque à 4 mois (composé en continu) est de 6 % par an. Comme le ZC ne fournit pas de flux intermédiaire, nous pouvons utiliser l'équation (5.1) avec $T = 4/12$, $r = 0{,}06$ et $S_0 = 0{,}95$. Le prix forward est donc :

$$F_0 = 0{,}93e^{0{,}06\times \frac{4}{12}} = 0{,}94879 \text{ €}$$

Ce serait le prix de livraison pour un contrat négocié aujourd'hui.

Et si les ventes à découvert ne sont pas possibles ?

Tous les actifs d'investissement ne peuvent être vendus à découvert. Cela ne pose cependant pas de problème. Pour que l'équation (5.1) soit valide, il n'est pas nécessaire de pouvoir vendre l'actif à découvert. Il faut simplement qu'un nombre significatif d'intervenants le détiennent à des fins d'investissement (par définition, c'est vrai pour un actif d'investissement). Si le prix forward est trop faible, ils auront intérêt à acheter le contrat et à vendre l'actif qu'ils détiennent.

Supposons que l'actif sous-jacent soit l'or et que celui-ci n'entraîne pas de coûts de stockage ; si $F_0 > S_0e^{rT}$, un investisseur peut alors :

1. Emprunter S_0 au taux r pour T années.
2. Acheter une once d'or.
3. Vendre un forward sur une once d'or.

À la date T, l'once d'or est vendue pour F_0 et le remboursement de l'emprunt entraîne un décaissement de S_0e^{rT}, ce qui conduit à un profit de $F_0 - S_0e^{rT}$.

Supposons maintenant que $F_0 < S_0e^{rT}$; un investisseur qui détient l'or peut opérer de la manière suivante :

1. Vendre l'or.

2. Une autre façon de montrer que l'équation (5.1) est correcte consiste à acheter une unité de l'actif et à vendre le forward. Cela coûte S_0 et rapporte à coup sûr F_0 à la date T. Par conséquent, S_0 doit être la valeur, actualisée au taux sans risque de F_0, c'est-à-dire $S_0 = F_0e^{-rT}$ ou encore $F_0 = S_0e^{rT}$.

2. Investir le montant obtenu au taux sans risque.
3. Acheter le forward.

À la date T, le placement rapporte S_0e^{rT}, l'or est racheté pour F_0 et le profit est $S_0e^{rT} - F_0$ alors que l'investisseur revient dans sa position initiale, dans laquelle il détenait l'once d'or.

Comme dans le cas du contrat forward sur action, on peut s'attendre à ce que le prix forward s'ajuste sur sa valeur théorique de façon qu'aucune des deux opportunités d'arbitrage n'apparaisse. La relation (5.1) doit donc être vérifiée.

5.5 Cas d'un flux intermédiaire connu

Analysons maintenant le cas où l'actif sous-jacent au contrat paie un flux (dividende ou coupon) pendant la durée de vie du contrat, le montant de ce flux étant supposé connu. Comme dans la section précédente, nous traitons un exemple numérique avant de présenter le raisonnement général.

Illustration

Considérons un contrat forward sur une obligation à coupons, cotée aujourd'hui 900 €. L'échéance du forward est dans 9 mois. Cette obligation verse un coupon de 40 € dans 4 mois. Les taux sans risque pour 4 mois et 9 mois sont respectivement (en taux annuel) de 3 % et 4 %:

Si le prix forward est de 910 €, un arbitragiste emprunte 900 € pour acheter l'obligation et vendre le contrat. Le premier coupon a une valeur actuelle égale à :

$$40 \times e^{-0{,}03\times(4/12)} = 39{,}60 \text{ €}$$

Par conséquent, sur les 900 € empruntés, 39,60 € peuvent être empruntés au taux 4 mois de 3 %. Le reste, soit 860,40 €, est emprunté pour un an au taux de 4 %. Après 9 mois, le remboursement sera égal à :

$$860{,}40 \times e^{0{,}04\times(9/12)} = 886{,}60 \text{ €}$$

L'arbitragiste réalise alors un profit égal à :

$$910 \text{ €} - 886{,}60 \text{ €} = 23{,}40 \text{ €}$$

Supposons maintenant que le prix forward soit de 870 €. L'investisseur vend à découvert l'obligation[3] et prend une position longue sur le forward. Il place le montant obtenu

3. Si la vente à découvert n'est pas possible, les investisseurs qui possèdent l'obligation pourront toujours mettre en œuvre cette stratégie en vendant l'obligation qu'ils détiennent. La technique est alors similaire à celle utilisée sur l'or dans la section 5.4.

au taux sans risque, 39,60 €, à 4 mois et le reste, 860,40 €, à 9 mois. Après 4 mois, il obtient 40 € du placement, ce qui correspond au premier coupon de l'obligation, et après 9 mois, il encaisse 886,60 € du fait du placement à 9 mois. Le profit réalisé s'écrit donc :

$$886{,}60\text{ €} - 870\text{ €} = 16{,}60\text{ €}$$

Les résultats des deux stratégies sont résumés dans le tableau 5.3. La première produit un profit dès que le prix forward est supérieur à 886,60 €, et la seconde dès que le prix forward tombe en deçà de 886,60 €. Par conséquent, en l'absence d'opportunités d'arbitrage, le prix forward doit être égal à 886,60 €.

Tableau 5.3 Opportunités d'arbitrage quand les prix spot et forward, d'un actif ne payant pas de flux intermédiaires, sont incohérents (prix de l'actif = 900 €, taux sans risque à 4 et 9 mois = 3 % et 4 % respectivement, coupon = 40 € dans 4 mois, maturité du contrat = 9 mois)

Prix forward = 43 €	**Prix forward = 39 €**
Stratégie aujourd'hui	*Stratégie aujourd'hui*
Emprunt de 900 € : 39,60 à 3 % pour 4 mois et 860,40 à 4 % pour 9 mois	Vente à découvert d'une unité d'actif (900 €)
Achat d'une unité d'actif	Placement de 39,60 pour 4 mois et de 860,40 pour 9 mois
Position courte sur le forward (à 910 €)	Position longue sur le forward (à 870 €)
Stratégie dans 4 mois	*Stratégie dans 4 mois*
Réception des 40 € de coupon	Encaissement des 40 € du premier placement
Remboursement de 40 € sur le premier emprunt	Paiement du coupon de 40 €
Stratégie dans 9 mois	*Stratégie dans 9 mois*
Vente de l'obligation à 910 €	Encaissement de 886,60 € du second placement
Remboursement du second emprunt pour 886,60 €	Achat de l'obligation à 870 €
Profit : 23,40 €	Profit : 16,60 €

Généralisation

On peut montrer que le prix forward d'un contrat, sur un actif payant des flux dont la valeur actuelle est I, est égal à :

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT} \tag{5.2}$$

Dans l'exemple $S_0 = 900$; I $= 40 \times e^{-0,03 \times 4/12} = 39,60$, $r = 0,04$ et $T = 0,75$; par conséquent :

$$F_0 = (900 - 39,60) \times e^{0,04 \times 0,75} = 886,60$$

Cela concorde, bien sûr, avec les calculs précédents. L'équation (5.2) s'applique à n'importe quel actif payant un flux intermédiaire connu.

Si $F_0 > (S_0 - I)e^{rT}$, l'arbitragiste achète l'obligation en empruntant et vend le contrat forward. Si $F_0 < (S_0 - I)e^{rT}$, les investisseurs qui détiennent l'obligation trouveront profitable d'acheter le contrat et de vendre leur titre[4].

- **Exemple 5.2**

  Considérons un forward à 10 mois sur une action cotée 50 €, qui paiera des dividendes égaux à 0,75 € par action dans trois, six et neuf mois. Le taux sans risque est de 8 % pour toutes les maturités. La valeur actuelle des dividendes est donc :

$$0,75 \times \left(e^{-0,08 \times \frac{1}{4}} + e^{-0,08 \times \frac{1}{2}} + e^{-0,08 \times \frac{3}{4}}\right) = 2,162 \text{ €}$$

  Comme $T = 10$ mois, le prix forward est égal à (voir équation 5.2) :

$$F_0 = (50 - 2,162)\, e^{0,08 \times \frac{10}{12}} = 51,14 \text{ €}$$

  Si le prix forward était plus faible, un arbitragiste vendrait le titre et achèterait le forward. Si, au contraire, F_0 était plus élevé, l'arbitragiste vendrait le contrat et achèterait l'actif.

5.6 Cas d'un actif à rendement connu

Considérons maintenant le cas d'un actif qui paye un rendement continu au taux q plutôt qu'un flux à une date donnée. Cela signifie que le flux intermédiaire est exprimé en pourcentage du prix de l'actif au moment où ce revenu est payé. Si on s'attend à un rendement de 5 % par an, le flux peut être payé en une seule fois et dans ce cas il représente 5 % du cours au moment du paiement, ou en deux fois et c'est une composition semestrielle qui est adoptée pour obtenir les 5 %. À la section 4.2, nous avons expliqué que les taux sont le plus souvent mesurés en continu ; dans ces conditions, on utilisera aussi un taux continu, noté q, pour les flux intermédiaires d'un actif financier. Les formules permettant de passer d'un taux mesuré avec une fréquence de composition donnée à une autre fréquence ont été données à la section 4.2.

On peut alors montrer (voir problème 5.20) que :

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T} \qquad (5.3)$$

4. Une autre façon de montrer que l'équation (5.2) est correcte consiste à acheter une unité de l'actif et à vendre le forward. Le coût S_0 est connu et engendrera un flux F_0 en T ainsi que des flux intermédiaires de valeur actuelle I. Par conséquent, le décaissement initial S_0 doit être égal à la valeur actuelle des encaissements, c'est-à-dire $I + F_0 e^{-rT}$. On a donc $F_0 = (S_0 - I)e^{rT}$.

■ **Exemple 5.3**

Considérons un contrat forward à 6 mois sur un actif procurant un seul revenu de 2 % du prix de l'actif sur la période de six mois. Le taux sans risque continu est de 10 % par an. Le prix de l'actif est 25 € ; on a donc $S_0 = 25$; $r = 0{,}1$ et $T = 0{,}5$. Le taux de rendement est ainsi de 4 % sur l'année, composé semestriellement, ce qui correspond à un taux continu de 3,96 % (équation 4.3). Le prix forward est alors donné par :

$$F_0 = 25 \times e^{(0{,}1-0{,}0396)\times 0{,}5} = 25{,}77 \text{ €}$$

5.7 L'évaluation des contrats forward

La valeur d'un contrat forward est toujours nulle au moment où il est créé. Il peut ensuite avoir une valeur positive ou négative. Il est important pour les banques et les institutions financières de connaître la valeur des contrats chaque jour (on évoque alors le marking to market des contrats). En utilisant les notations précédentes, F_0 est le prix forward aujourd'hui, T est la durée de vie résiduelle du contrat, K est le prix de livraison et r désigne le taux sans risque.

Notons aussi :

f : valeur du contrat forward aujourd'hui

Il est important d'être clair sur la signification des variables F_0, K et f. Si la date d'aujourd'hui est celle de la négociation du contrat, le prix de livraison K est aussi le prix forward F_0. La valeur du contrat f est nulle à cette date. Quand le temps s'écoule, K reste constant (c'est une caractéristique juridique définissant le contrat) mais F_0 change en fonction de l'offre et de la demande. De même, f peut devenir positif ou négatif.

On peut montrer, pour tous les contrats forward portant aussi bien sur des actifs d'investissement que sur des actifs de consommation, que :

$$f = (F_0 - K)\ e^{-rT} \tag{5.4}$$

Pour comprendre pourquoi la relation (5.4) est correcte, il suffit de comparer un contrat avec un prix de livraison F_0 à un contrat dont le prix de livraison est K. La seule chose qui change entre les deux est la différence des flux payés en date T pour obtenir le sous-jacent. Le décaissement (nous supposons une position longue) sera F_0 pour le détenteur du premier contrat et K pour celui du second. La valeur actuelle de cette différence est $(F_0 - K)e^{-rT}$. Le premier contrat a donc moins de valeur que le second si $F_0 > K$. Comme par définition le premier contrat a une valeur nulle, le second vaut $(F_0 - K)e^{-rT}$.

De la même façon, la valeur d'une position courte sur un contrat dont le prix de livraison est K est égale à :

$$(K - F_0)e^{-rT}$$

■ **Exemple 5.4**

Une position longue sur un forward sur action ND a été prise par un investisseur il y a quelques mois. Il reste six mois avant l'échéance. Le taux sans risque est 10 %, l'action cote 25 € et le prix de livraison est 24 €. On a donc $S_0 = 25$; $r = 0{,}1$, $T = 0{,}5$ et $K = 24$. De l'équation (5.1), on déduit :

$$F_0 = 25 \times e^{0{,}1 \times 0{,}5} = 26{,}28 \text{ €}$$

Et l'équation (5.4) donne la valeur du forward :

$$f = (26{,}28 - 24)\, e^{-0{,}1 \times 0{,}5} = 2{,}17 \text{ €}$$

L'équation (5.4) montre que l'on peut évaluer une position longue sur un forward en supposant que le prix de l'actif à la maturité du contrat sera égal à F_0. En effet, quand on fait cette hypothèse, il s'ensuit que le flux de date T sera $F_0 - K$, dont la valeur actuelle est $(F_0 - K)e^{-rT}$. Il s'agit de la valeur de f dans l'équation (5.4). Le même raisonnement s'applique pour une position courte.

En utilisant conjointement (5.4) et (5.1), on peut écrire :

$$f = S_0 - Ke^{-rT} \tag{5.5}$$

De même, quand l'actif paie des flux intermédiaires de valeur actuelle I, l'équation (5.4) combinée avec l'équation (5.2) donne :

$$f = S_0 - I - Ke^{-rT} \tag{5.6}$$

Enfin, quand l'actif a un rendement q, en combinant (5.4) et (5.3), on obtient :

$$f = S_0e^{-qT} - Ke^{-rT} \tag{5.7}$$

Quand un prix futures évolue, le gain ou la perte sur le contrat est calculé en multipliant cette variation par le volume de la position. Les gains ou pertes sont réalisés presque immédiatement du fait du système des appels de marge. L'équation (5.4) montre que, quand un prix forward change, le gain ou la perte est la valeur actuelle de cette variation. Cette différence de mode de calcul entre forward et futures peut parfois prêter à confusion (voir encadré 5.2).

Encadré 5.2 Une erreur d'informatique ?

Un trader travaillant sur le marché des changes prend une position longue sur un forward à 3 mois portant sur un million de livres sterling au taux de 1,6000. Au même moment, un autre trader prend une position du même type sur des contrats futures (16 contrats portant chacun sur 62 500 $). Quelques minutes plus tard, les taux de change futures et forward sont passés à 1,6040. Le système informatique de la banque enregistre un profit de 4 000 $ sur le contrat futures et de 3 900 $ sur le contrat forward. Le trader du contrat forward se plaint auprès des services informatiques en évoquant une erreur d'enregistrement. A-t-il raison de se plaindre ?

La réponse est non ! Le marking to market quotidien des contrats futures fait que le gain de 4 000 $ est enregistré immédiatement. En revanche, si le trader souhaite réaliser son profit, il doit prendre une position courte sur le même contrat, avec un prix forward de 1,6040 et un horizon de 3 mois. Le profit de 4 000 $ est alors assuré, mais dans trois mois seulement. Le profit réel aujourd'hui est en fait la valeur actuelle de ces 4 000 $. Cette remarque est cohérente avec l'équation (5.4).

Le trader de contrats forward peut cependant se consoler en notant que le traitement est identique pour les pertes. Si les taux de change futures et forward étaient passés à 1,5960, il n'aurait perdu que 3 900 $ alors que son collègue du marché futures aurait perdu 4 000 $.

5.8 Les prix forward sont-ils égaux aux prix futures ?

L'annexe de ce chapitre expose le raisonnement d'arbitrage montrant que, si le taux sans risque est constant et indépendant de la maturité, prix forward et prix futures sont identiques pour des contrats de même maturité. Le raisonnement peut être étendu au cas où le taux sans risque est une fonction déterministe du temps.

Quand les taux varient de façon aléatoire, il n'y a plus, d'un point de vue théorique, de raison pour laquelle les deux prix devraient être égaux. On peut en avoir une intuition en examinant le cas où le prix de l'actif S est fortement corrélé positivement au taux sans risque. Quand S augmente, un investisseur qui détient une position longue sur un futures réalise un gain immédiat par le système d'appels de marge. La corrélation positive indique que le taux d'intérêt a aussi probablement augmenté. Le gain réalisé est donc placé à un taux plus élevé. De la même façon, quand S diminue, l'investisseur subit une perte immédiate car il est appelé en marge. Mais cette marge supplémentaire sera, probablement, financée à un taux plus faible. Par contre, un investisseur qui détient une position sur un contrat forward n'est pas affecté par les variations de taux. Dans l'exemple ci-dessus, le contrat futures est plus attractif que le contrat forward et par conséquent le prix futures devrait être supérieur au prix forward. Quand S est négativement corrélé avec les taux d'intérêt, un argument analogue montre que le prix forward devrait être plus élevé que le prix futures.

Quand l'échéance est proche, la différence entre les deux prix est suffisamment faible pour pouvoir être ignorée, du moins sur le plan théorique. En pratique, de nombreux facteurs non pris en compte dans les modèles théoriques peuvent engendrer des écarts de prix. Ce sont par exemple la fiscalité, les coûts de transaction ou les procédures d'appels de marge. Le risque de défaut de la contrepartie est moindre sur les contrats futures à cause du rôle joué par la chambre de compensation. De plus, les contrats futures sont souvent plus liquides et donc plus faciles à échanger que les contrats forward.

En dépit de ces éléments, il est dans la plupart des cas raisonnable de supposer l'égalité des deux prix, forward et futures. C'est l'hypothèse que nous ferons le plus souvent dans ce livre. Nous noterons donc indifféremment F_0 le prix forward et le prix futures d'un actif aujourd'hui.

Les différences entre les deux prix augmentent avec la durée de vie des contrats et sont susceptibles de devenir significatives. Il est dans ce cas dangereux de supposer que les deux types de contrats sont parfaitement substituables. Cette remarque est notamment pertinente pour les contrats futures sur eurodollars parce que leur durée de vie peut atteindre dix ans. Nous étudierons ces contrats au chapitre 6.

5.9 Les prix futures des contrats sur indices

Les contrats futures sur indices ont été introduits à la section 3.5 ; nous avons montré leur utilisation pour la couverture d'un portefeuille d'actions. Le tableau 3.3 donnait les cotations de futures sur indices pour différents contrats. Nous pouvons maintenant chercher à comprendre comment se forment ces prix futures.

Un indice peut être analysé comme un actif d'investissement qui paie des dividendes[5]. L'actif d'investissement est le portefeuille d'actions qui constitue l'indice, et les dividendes sont ceux qui seraient reçus par le détenteur d'un tel portefeuille. Si l'on suppose, comme nous l'avons déjà fait, que les dividendes sont payés en continu à un taux q plutôt qu'à une ou plusieurs dates précises, le prix futures du contrat, F_0, s'écrit :

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T} \tag{5.8}$$

Dans le tableau 3.3 vous pouvez noter que le prix futures du contrat DJIA pour l'échéance juin est inférieur à celui de l'échéance mars. Cela indique que, le 4 février 2004, le taux de dividende attendu était supérieur au taux sans risque.

- **Exemple 5.5**

  Considérons un contrat futures à 3 mois sur le CAC 40 et supposons que les titres composant le portefeuille paient un rendement en dividende de 1 %, en base annuelle, et que l'indice soit à 4000. Le taux sans risque est de 6 %. Dans ce cas, $S_0 = 4000$, $r = 0{,}06$, $T = 0{,}25$ et $q = 0{,}01$. Le prix futures est alors :

  $$F_0 = 4\ 000 e^{(0{,}06-0{,}01)\times 0{,}25} = 4\ 050{,}3$$

  En pratique, le rendement en dividende de l'indice varie de semaine en semaine. Par exemple, les actions composant l'indice CAC 40 paient leurs dividendes entre mai et août, avec une concentration plus importante en juin-juillet. Par conséquent, le taux q retenu doit être ajusté pour tenir compte de ces spécificités. Dans le tableau 3.3, on note que, sur le contrat S&P500, les prix futures sont décroissants avec la maturité, au rythme de 0,4 % par an. C'est le signe, comme pour le contrat DJIA, que le taux de dividende attendu est supérieur de 0,4 % environ au taux sans risque.

5. Il arrive cependant que ce ne soit pas le cas, comme l'illustre l'encadré 5.3.

Encadré 5.3 Le contrat futures sur l'indice Nikkei

Les arguments de ce chapitre concernant la détermination des prix futures s'appliquent à des contrats dont les sous-jacents sont des actifs échangés sur les marchés. C'est pourquoi l'équation (5.8) ne s'applique pas au contrat futures sur l'indice Nikkei 225 coté sur le CME. La raison est assez subtile. Alors que S mesure la valeur de l'indice en yens, la variable sous-jacente au contrat futures sur cet indice, coté sur le CME, est égale à $5 \times S$, mais où S est en dollars. En d'autres termes, le contrat considère un sous-jacent mesuré en yens, mais le traite comme s'il s'agissait de dollars. Il n'est alors pas possible d'investir dans un portefeuille dont la valeur est constamment $5S$ dollars. Le mieux que l'on puisse faire est d'avoir un portefeuille qui vaut toujours $5S$ yens, ou $5QS$ dollars si Q est le taux de change entre les deux devises. Le raisonnement d'arbitrage utilisé jusqu'ici suppose que le sous-jacent du contrat futures peut toujours être échangé. Cela n'est pas tout à fait vrai pour le contrat Nikkei 225 qui est un exemple de « quanto ». Il s'agit de contrats dérivés tels que le sous-jacent est mesuré dans une devise et les flux engendrés par l'actif dérivé sont exprimés dans une autre devise. Les quantos sont étudiés au chapitre 27.

L'arbitrage sur indices

Si $F_0 > S_0e^{(r-q)T}$, un profit peut être réalisé en achetant au comptant les actions composant l'indice et en vendant le contrat futures. Si $F_0 < S_0e^{(r-q)T}$, il faut adopter la stratégie symétrique. Ces stratégies sont appelées « arbitrage sur indice ». Quand $F_0 < S_0e^{(r-q)T}$, l'arbitrage peut être monté par un fonds de pension qui possède un portefeuille répliquant l'indice. Le plus souvent, l'arbitrage sur indice est opéré à partir d'un système de *program trading* qui émet les ordres de manière automatique.

Quand l'indice comporte un grand nombre de titres, la stratégie d'arbitrage peut être construite en traitant un portefeuille composé d'un sous-ensemble des titres de l'indice et reflétant au mieux les variations de l'indice.

La plupart du temps, les activités des arbitragistes entraînent que l'équation (5.8) est vérifiée, mais il peut arriver, en des circonstances inhabituelles, que l'arbitrage soit impossible à mettre en œuvre (voir encadré 5.4).

Encadré 5.4 L'arbitrage sur indices en octobre 1987

Pour faire de l'arbitrage sur indice, il faut pouvoir opérer simultanément sur le contrat futures et sur les actions composant l'indice. Dans des conditions normales de marché, c'est possible en utilisant le *program trading* et F_0 est alors proche de $S_0e^{(r-q)T}$. Les 19 et 20 octobre 1987 sont deux exemples de jours où les conditions de marché étaient tout sauf normales.

Le « lundi noir », c'est-à-dire le 19 octobre 1987, le marché de New York a chuté de plus de 20 % et le volume de transactions de 604 millions de titres a battu tous les records précédents. Le système informatique était surchargé et il pouvait s'écouler plus de deux heures entre le passage d'un ordre et son exécution. Pendant une grande partie de la journée, les prix futures étaient inférieurs à la valeur de l'indice. Par exemple, le S&P500 a clôturé à 225,06 alors que le prix futures échéance décembre valait 201,50. Mais à cause des délais d'exécution, l'opportunité d'arbitrage était impossible à exploiter. Le jour suivant, les autorités de marché ont imposé des restrictions temporaires sur l'utilisation du *program trading*. Celles-ci rendaient l'arbitrage sur indice très difficile et l'écart entre les deux marchés a persisté. Jusqu'au point où l'écart entre le prix futures et l'indice au comptant a atteint 18 %. Le marché est revenu à des conditions normales quelques jours plus tard, c'est-à-dire à des conditions dans lesquelles les activités des arbitragistes assurent que l'équation (5.8) est vérifiée.

5.10 Les contrats futures et forward sur devises

L'actif sous-jacent de ces contrats est une certaine quantité de devises. On posera, pour simplifier, S_0 le prix en USD d'une unité de devise étrangère (pour un Américain) et F_0 le prix forward correspondant. Cependant, comme nous l'avons mentionné à la section 2.10, ce n'est pas toujours de cette façon que les devises sont cotées. Par exemple, en France, on dira que le dollar US cote 1,15 contre l'euro pour signifier qu'il faut 1,15 USD pour acheter un euro (mais dans ce cas, c'est le nombre d'unités de devise étrangère pour une unité de devise domestique). Une devise a une propriété particulière : son détenteur peut la placer au taux sans risque du pays d'origine. Par exemple, un Français disposant d'USD peut acheter des obligations du Trésor américain.

On notera donc r_f le taux sans risque du pays étranger correspondant à la devise. r désigne toujours le taux sans risque domestique. La relation entre F_0 et S_0 est alors :

$$F_0 = S_0 e^{(r-r_f)T} \tag{5.9}$$

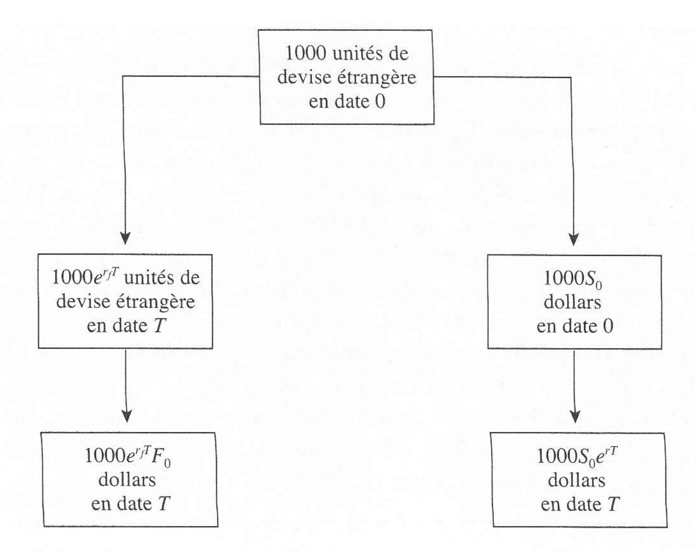
C'est la relation de parité des taux d'intérêt bien connue en finance internationale. Le graphique 5.1 montre pourquoi elle doit être vérifiée.

- **Exemple 5.6**

Supposons que les taux sans risque à 2 ans en France (r_f) et aux États-Unis (r) soient respectivement de 5 % et 3 % et que le taux de change EUR contre USD soit de 1,1 USD/EUR. De l'équation (5.9), on déduit :

$$1{,}1 \times e^{(0{,}03-0{,}05)\times 2} = 1{,}057$$

Supposons que le taux de change forward soit à 1,04 ; un arbitragiste peut alors :



Graphique 5.1 : Deux façons de convertir 1 000 unités d'une devise en dollars à la date T. S_0 est le taux de change spot, F_0 est le taux de change forward et r et r_f sont les taux d'intérêt domestique et étranger.

1. Emprunter 1 000 € au taux de 5 % par an pour 2 ans (ce qui implique un remboursement de $1000 \times e^{0,05\times 2} = 1105{,}17$ € dans deux ans), les convertir en 1 100 USD et les placer à 3 %.
2. Prendre une position longue sur un contrat forward pour 1 105,17 € au taux de 1,04, ce qui correspond à 1 149,37 USD.

Les 1 100 USD sont investis à 3 % sur 2 ans et rapporteront 1 168,02 USD. Sur ceux-ci, 1 149,37 USD seront utilisés pour acquérir 1 105,17 €, selon les termes du contrat forward. Ils permettront de rembourser l'emprunt. La stratégie donne donc lieu à un profit de 1 168,02 – 1 149,37 = 18,65 USD. Si le prix forward était par exemple à 1,08, une stratégie symétrique (emprunt d'USD, vente d'un forward) permettrait de profiter de l'opportunité d'arbitrage.

Le tableau 5.4 montre les cotations des futures sur devises le 4 février 2004, telles qu'elles apparaissaient dans le *Wall Street Journal* du lendemain. Pour les huit premiers contrats, la cotation est en nombre d'USD par unité de la devise considérée. C'est la convention habituelle pour les contrats futures. L'équation (5.9) s'applique alors avec le taux américain comme taux domestique. À cette date, les taux japonais et suisses étaient plus faibles que le taux US. Cela explique pourquoi les taux de change futures augmentent avec la maturité. En ce qui concerne le dollar canadien, la livre sterling, le dollar australien, le peso mexicain et l'euro, c'est la situation symétrique qui est observée. Les taux de change futures sont décroissants avec la maturité.

Les deux derniers contrats concernent l'euro. Les cotations sont en yens par euro et en livres sterling par euro. Pour utiliser l'équation (5.9) dans le cas du contrat euro/yen, on mesure F_0 et S_0 en yens/euros. r est alors le taux en yens et r_f le taux en euros. De

la même façon, pour le contrat euro/sterling, on mesure F_0 et S_0 en sterlings/euros, on définit r comme le taux en sterlings et r_f le taux en euros.

Tableau 5.4 : Exemple de cotations de contrats futures sur devises du Wall Street Journal du 5 février 2004 (les colonnes indiquent : mois d'échéance, cours d'ouverture, plus haut, plus bas, compensation, variation, plus haut et plus bas sur la durée de vie, position ouverte)

Currency Futures

Japanese Yen (CME)-¥12,500,000; $ per ¥								
Mar	.9490	.9507	.9476	.9497	.0011	.9515	.8240	161,371
June	.9524	.9529	.9510	.9526	.0011	.9532	.8496	8,070
Est vol 6,229; vol Tue 14,298; open int 169,516, +4,280.								
Canadian Dollar (CME)-CAD 100,000; $ per CAD								
Mar	.7466	.7500	.7431	.7485	.0015	.7863	.6150	57,248
June	.7450	.7480	.7421	.7465	.0015	.7850	.6201	3,453
Sept	.7448	.7460	.7414	.7449	.0015	.7815	.6505	1,635
Dec	.7440	.7445	.7405	.7433	.0015	.7800	.6940	787
Est vol 6,009; vol Tue 12,621; open int 63,329, −2,093.								
British Pound (CME)-£62,500; $ per £								
Mar	1.8335	1.8338	1.8225	1.8277	−.0049	1.8488	1.5654	66,330
June	1.8200	1.8200	1.8060	1.8135	−.0051	1.8373	1.6080	127
Est vol 6,429; vol Tue 14,952; open int 66,822, +2,521.								
Swiss Franc (CME)-CHF 125,000; $ per CHF								
Mar	.8018	.8020	.7970	.8002	−.0008	.8249	.7060	40,580
June	...	...	...	.8019	−.0008	.8248	.7117	216
Est vol 4,223; vol Tue 9,933; open int 40,899, +458.								
Australian Dollar (CME)-AUD 100,000; $ per AUD								
Mar	.7605	.7614	.7545	.7578	−.0034	.7769	.5193	50,309
June	.7490	.7500	.7490	.7494	−.0034	.7686	.5645	843
Est vol 3,108; vol Tue 10,590; open int 51,677, −1,877.								
Mexican Peso (CME)-MXN 500,000; $ per MXN								
Mar	.08990	.09050	.08857	.08920	−00057	.09330	.08600	36,882
June	.08900	.08915	.08780	.08812	−00060	.09125	.08495	594
Est vol 12,680; vol Tue 6,785; open int 38,120, −303.								
Euro/US Dollar (CME)-€125,000; $ per €								
Mar	1.2532	1.2565	1.2478	1.2520	−.0013	1.2875	1.0425	122,318
June	1.2492	1.2520	1.2460	1.2491	−.0013	1.2837	1.0570	1,293
Est vol 20,357; vol Tue 69,168; open int 124,312, +3,721.								
Euro/US Dollar (FINEX)-€200,000; $ per €								
Mar	...	...	...	1.2520	−.0012	1.2841	1.4720	510
Est vol 191; vol Tue 93; open int 512, −12.								
Euro/Japanese Yen (FINEX)-€100,000; ¥ per €								
Mar	131.85	131.85	131.61	131.85	−.28	136.44	130.45	7,752
Est vol 67; vol Tue 287; open int 7,752, +76.								
Euro/British Pound (FINEX)-€100,000; £ per €								
Mar	.6840	.6843	.6832	.6852	.0013	.7094	.6832	9,964
Est vol 198; vol Tue 454; open int 9,964, +360.								

Sources : Dow Jones & Company, Inc. 2004.

Lorsque le taux étranger est plus élevé que le taux domestique ($r_f > r$), l'équation (5.9) indique que $F_0 < S_0$ et que F_0 est d'autant plus faible que la maturité est éloignée. Par conséquent, la relation entre maturité et prix futures dépend de la façon dont est cotée la devise. Si aux États-Unis l'euro est coté en nombre de dollars par euro alors que le dollar est coté en France en nombre de dollars par euro, la différence $r - r_f$ n'a pas le même signe dans les deux pays.

■ **Exemple 5.7**

Dans le tableau 5.4, les prix futures de l'euro en dollars US sont décroissants par rapport à la maturité. Cela suggère que le taux US est inférieur au taux euro.

Une devise vue comme un actif rapportant un rendement connu

L'équation (5.9) est analogue à l'équation (5.3) en remplaçant q par r_f. Ce n'est pas une coïncidence. Une devise, l'USD pour un investisseur français par exemple, peut être vue comme un actif dont le rendement est le taux sans risque US.

Supposons qu'un investisseur français achète un million d'USD alors que le taux d'intérêt français est à 5 % et le taux US à 3 %. L'investisseur va obtenir 30 000 USD d'intérêts pour l'année. La valeur de ces intérêts en € dépendra du taux de change dans un an. Si le taux de change est de 1 USD pour 1 €, ces intérêts valent 30 000 €. L'intérêt de 3 % représente donc bien un taux de rendement connu pour l'investisseur français sur un investissement en USD.

5.11 Les contrats futures sur matières premières

Nous allons analyser tout d'abord l'influence des coûts de stockage sur les prix futures des matières premières qui sont des actifs d'investissement, comme l'or ou l'argent[6]. Nous supposons que ces actifs n'engendrent pas de revenus intermédiaires.

Les coûts de stockage

Comme nous l'avons montré dans l'encadré 3.1, les stratégies de couverture des producteurs d'or conduisent les banques à emprunter de l'or. Les détenteurs d'or, comme les banques centrales, facturent un taux d'intérêt pour ces prêts. C'est vrai aussi en ce qui concerne l'argent. En conséquence, la détention d'or ou d'argent est génératrice de revenus.

L'équation (5.1) donne la relation entre prix forward et prix au comptant en l'absence de coûts de stockage :

$$F_0 = S_0 e^{rT} \tag{5.10}$$

Les coûts de stockage peuvent être interprétés comme des revenus négatifs dus à la détention de l'actif. Si U désigne la valeur actuelle de ces coûts, on peut écrire, en utilisant l'équation (5.2) :

$$F_0 = (S_0 + U)\, e^{rT} \tag{5.11}$$

■ **Exemple 5.8**

Considérons un contrat futures à un an sur l'or ; le coût de stockage est de 2 USD par once et par an, ce coût étant réglé en fin d'année. Le taux sans risque est 7 %

6. Rappelons qu'un actif peut être « d'investissement » même si ce n'est pas son seul usage. Il suffit qu'il soit détenu en tant que tel par un nombre suffisant d'investisseurs, éventuellement prêts à le vendre et à acheter des contrats forward si cette stratégie est profitable.

et le prix spot de l'or est 450 USD l'once. On a alors :

$$U = 2 \times e^{-0,07\times 1} = 1{,}865 \text{ USD}$$

On déduit de l'équation (5.1) :

$$F_0 = (450 + 1{,}865)\, e^{0,07\times 1} = 484{,}63 \text{ USD}$$

Si $F_0 > 484{,}63$ USD, un arbitragiste achète l'or et vend le contrat futures pour s'assurer un profit. Si l'inégalité est inversée, un investisseur qui détient déjà l'or le vend et achète le contrat futures pour dégager un profit d'arbitrage.

Si les coûts de stockage peuvent être considérés comme proportionnels au prix de l'actif, ils peuvent être analysés comme un taux de rendement négatif. Dans ce cas, l'équation (5.3) implique :

$$F_0 = S_0 e^{(r+u)T} \tag{5.12}$$

où u est le coût de stockage annuel en pourcentage du prix au comptant.

Les matières premières, actifs de consommation

Certaines matières premières sont essentiellement des actifs de consommation et les arguments d'arbitrage doivent être maniés avec prudence. Si, au lieu de l'équation (5.11), on observe :

$$F_0 > (S_0 + U)\, e^{rT} \tag{5.13}$$

Un arbitragiste peut alors :

1. Emprunter $(S_0 + U)$ au taux sans risque pour acheter l'actif et payer les coûts de stockage.
2. Prendre une position courte sur un forward.

Si un contrat futures est analysé comme un forward, cette opération engendre un profit $F_0 - (S_0 + U)e^{rT}$ à la date T. Cette stratégie ne pose aucune difficulté. Les prix vont donc s'ajuster sous la pression de l'offre et de la demande jusqu'à ce que l'égalité soit rétablie.

Supposons maintenant que :

$$F_0 < (S_0 + U)\, e^{rT} \tag{5.14}$$

Pour les matières premières ou marchandises qui ne jouent pas le rôle d'actifs d'investissement, le raisonnement d'arbitrage ne tient plus. En effet, les entreprises qui utilisent cette matière première ou cette marchandise dans leur activité ne seront pas prêtes à vendre leurs stocks pour réaliser l'arbitrage, simplement parce que les contrats forward qui seraient achetés ne permettent pas de continuer la production, contrairement à l'actif sous-jacent. Par conséquent, pour ce type d'actif, on a simplement la relation :

$$F_0 \leqslant (S_0 + U)\, e^{rT} \tag{5.15}$$

De même, si les coûts de stockage sont exprimés par un taux u, on a :

$$F_0 \leqslant S_0 e^{(r+u)\,T} \tag{5.16}$$

Le rendement d'opportunité (convenience yield)

Les inégalités (5.15) et (5.16) montrent que la détention d'une matière première procure des avantages que ne donnent pas les forward ou futures. Une raffinerie de pétrole ne considérera pas de la même façon le pétrole brut et un contrat futures sur ce pétrole. Le stockage permet en effet la poursuite du processus de production et protège, dans une certaine mesure, contre les pénuries. Cet avantage lié à la détention de la matière première est appelé « rendement d'opportunité » (*convenience yield*) et est noté y. Si U désigne toujours la valeur actuelle des coûts de stockage, y vérifie :

$$F_0 e^{yT} = (S_0 + U)\, e^{r\,T}$$

Si le coût de stockage est exprimé en pourcentage du prix spot (u), on a :

$$F_0 e^{yT} = S_0 e^{(r+u)\,T}$$

ou encore :

$$F_0 = S_0 e^{(r+u-y)\,T} \tag{5.17}$$

y mesure en quelque sorte l'écart entre les deux membres des inégalités (5.15) et (5.16). Pour les actifs d'investissement, $y = 0$, sinon il existe des opportunités d'arbitrage. Un rendement d'opportunité important se traduit sur les cotations par un prix futures décroissant avec la maturité, c'est-à-dire $r + u - y < 0$. C'était le cas dans le graphique 2.2 du chapitre 2 qui concernait les prix futures des contrats pétroliers.

y reflète en fait les anticipations des opérateurs quant à la disponibilité future de l'actif. Si une pénurie menace, y peut être très élevé car la détention de l'actif procure une protection contre cette possibilité de pénurie. À l'inverse, lorsque les stocks (au niveau global de l'économie) sont très importants, y est proche de 0.

5.12 Le coût de portage

La relation entre prix spot, prix forward et prix futures peut être résumée par la notion de coût de portage, noté c. Il mesure le coût de stockage plus le coût de financement de l'actif moins le revenu engendré par cet actif.

Pour une action ne payant pas de dividende, $c = r$ puisqu'il n'y a ni coût de stockage ni revenus ; pour un indice $c = r - q$ et pour une marchandise ou une matière première qui engendre un coût de stockage proportionnel u, $c = r + u$.

De manière générale, on écrira donc, pour un actif d'investissement :

$$F_0 = S_0 e^{c\,T} \tag{5.18}$$

et pour un actif de consommation :

$$F_0 = S_0 e^{(c-y)\,T} \tag{5.19}$$

où y est le rendement d'opportunité.

5.13 Les options de livraison

Un contrat forward spécifie la date et le lieu de livraison, alors qu'un contrat futures laisse en général une marge de manœuvre au vendeur du contrat, qui peut choisir une date à l'intérieur d'une période donnée. Cette possibilité complique la détermination du prix futures. Doit-on retenir le début, le milieu ou la fin de la période de livraison ? Même si une grande majorité des contrats est débouclée avant l'échéance, il est important, sur le plan théorique, de préciser ce point.

Si le prix futures est une fonction croissante de la maturité, c'est-à-dire $c > y$ dans l'équation (5.19), il est préférable pour le vendeur de livrer au plus tôt puisque les intérêts reçus sur le placement de la somme encaissée sont supérieurs à l'avantage découlant de la détention de l'actif. Le prix futures doit alors être calculé en faisant l'hypothèse d'une livraison au plus tôt. À l'inverse, si $c < y$, il est préférable de livrer au plus tard et cette hypothèse sera retenue dans l'évaluation.

5.14 Prix futures et espérance du prix spot futur

Une question toute naturelle consiste à se demander si le prix futures F_0 est égal à l'espérance du prix spot à l'échéance. En d'autres termes, F_0 est-il un estimateur sans biais de S_T ? Supposons qu'en juin le prix futures du contrat sur le maïs d'échéance septembre soit de 200 cents par boisseau. Est-ce le prix futur attendu par le marché à la fin du mois de septembre ?

Comme nous l'avons illustré dans le graphique 2.1, le prix futures converge vers le prix spot à l'échéance. Si le prix futur attendu du maïs est inférieur à 200, le marché devrait anticiper une baisse du prix futures, de sorte que les traders en position courte seraient gagnants et les traders en position longue perdants. Un raisonnement symétrique peut être fait si le prix futur attendu est supérieur à 200.

Keynes et Hicks

John Maynard Keynes et John Hicks ont un raisonnement différent de celui qui vient d'être avancé. Selon eux, les opérateurs en couverture tendent à détenir des positions courtes alors que les spéculateurs sont plutôt sur des positions longues. Par conséquent, les hedgers acceptent un prix futures moins élevé puisque la vente de futures diminue leur risque global. À l'inverse, les spéculateurs exigent une prime pour assumer les risques, ils veulent donc un prix futures plus faible[7].

Lorsque le prix futures est en deçà du prix attendu à l'échéance, on parle de *déport normal* ; si la relation est dans l'autre sens, on parle de *contango*. Dans le chapitre suivant, nous examinerons plus en détail ces relations.

7. Voir J. M. Keynes, *A Treatise on Money*, MacMillan, London, 1930, et J. R. Hicks, *Value and Capital*, Clarendon Press, Oxford, 1939.

Risque et rentabilité

Une explication alternative peut être avancée en considérant la relation risque-rentabilité dans l'économie. En général, plus le risque d'un investissement est élevé, plus l'espérance de rentabilité exigée par l'investisseur est importante. Les lecteurs familiarisés avec le CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) ou MEDAF (modèle d'équilibre des actifs financiers) savent que le risque a une composante systématique et une composante non systématique (ou spécifique).

Cette dernière peut être éliminée par diversification. À l'inverse, le risque systématique ne peut être supprimé ; il est lié à la corrélation entre l'actif considéré et le marché dans son ensemble. Un investisseur exige une rentabilité supplémentaire pour supporter plus de risque systématique, mais peut accepter une rentabilité moindre si son risque systématique diminue.

Le risque d'une position en contrats futures

Considérons un spéculateur prenant une position longue dans un contrat futures parce qu'il anticipe une hausse du prix spot. On suppose que l'investisseur place au taux sans risque un montant égal à la valeur actuelle du prix futures.

Nous assimilons ici le contrat futures à un contrat forward. Le flux obtenu en T par le placement initial est utilisé pour acheter l'actif sous-jacent, selon les termes du contrat futures. Les flux de cette stratégie sont donc $-F_0e^{-rT}$ à la date 0 et S_T à la date T. La valeur actuelle espérée de l'investissement s'écrit alors :

$$-F_0e^{-rT} + E(S_T)\,e^{-kT}$$

si k est le taux d'actualisation ajusté au risque pour cet investissement. Si tous les investissements sur le marché ont une valeur actuelle nette espérée nulle, on a :

$$F_0 = E(S_T)\,e^{(r-k)T} \tag{5.20}$$

k dépend du risque systématique de l'investissement. Si l'actif n'est pas corrélé avec le marché, le risque systématique est nul et $k = r$, d'où $F_0 = E(S_T)$. Si l'actif est corrélé positivement avec le marché, $k > r$ et donc $F_0 < E(S_T)$. L'inégalité est inversée en cas de corrélation négative.

Un exemple d'actif dont le risque systématique est positif est un indice d'actions. Les investisseurs exigeront en général une rentabilité espérée supérieure au taux sans risque. Si l'indice paie un taux de dividende q, la rentabilité en capital exigée par les investisseurs sera supérieure à $r - q$. L'équation (5.8) est alors cohérente avec l'existence d'un prix futures sous-évaluant le prix futur espéré.

Lorsque le rendement de l'actif sous-jacent est négativement corrélé au rendement du marché, on a $k < r$ et l'équation (5.20) indique que le prix futures est supérieur au prix spot futur espéré.

De manière générale, quand le prix futures est inférieur au prix spot futur espéré, on parle de *déport normal*. On appelle *contango* la situation symétrique.

Résumé

Dans de nombreux cas, prix futures et prix forward peuvent être supposés égaux. En théorie, ils sont identiques quand les taux évoluent de manière déterministe. Il est judicieux de diviser les supports de contrats en actifs d'investissement et actifs de consommation. Pour les actifs d'investissement, trois cas ont été envisagés :

1. L'actif ne procure pas de flux intermédiaire.
2. L'actif procure un revenu connu, exprimé en unités monétaires.
3. L'actif procure un rendement connu, exprimé en pourcentage du prix spot.

Les résultats sont résumés dans le tableau 5.5. Ils permettent d'obtenir les prix futures pour les contrats sur indices, sur devises ou sur matières premières, telles l'or ou l'argent. Les coûts de stockage sont interprétés comme des revenus négatifs. Pour les actifs de consommation, il n'est pas possible d'obtenir les prix futures à partir des prix au comptant. Le rendement d'opportunité apparaît alors. Il mesure l'importance qu'accordent les détenteurs de l'actif à sa possession, du fait des avantages qu'il procure par rapport à la détention d'un contrat futures. Ces avantages sont, par exemple, la sécurité en cas de pénurie ou l'assurance de pouvoir continuer un processus de production. Dans ce cas, seule une borne supérieure pour F_0 peut être obtenue.

Tableau 5.5 : Résultats pour un contrat futures d'échéance T sur un actif de prix initial S_0 avec un taux sans risque r

Actif	Prix forward/futures	Valeur d'un contrat à prix de livraison K
Pas de revenus	S_0e^{rT}	$S_0 - Ke^{-rT}$
Revenus de valeur actuelle I	$(S_0 - I)e^{rT}$	$S_0 - I - Ke^{-rT}$
Rendement au taux q	$S_0e^{(r-q)T}$	$S_0e^{-qT} - Ke^{-rT}$

Le concept de coût de portage désigne le coût de stockage plus le coût de financement moins les revenus de l'actif. Pour les actifs d'investissement, le prix futures F_0 est supérieur au prix spot à cause de ce coût de portage. Pour les actifs de consommation, $F_0 > S_0$ si la différence entre coût de portage et rendement d'opportunité est positive.

Dans le cadre du CAPM, la relation entre prix futures et prix espéré de l'actif à l'échéance dépend de la corrélation de l'actif avec le marché. Une corrélation positive tend à impliquer $F_0 < E(S_T)$, et une corrélation négative entraîne $F_0 > E(S_T)$. L'égalité est obtenue quand la corrélation est nulle.

Références complémentaires

COX, J. C., J. E. INGERSOLL et S. A. ROSS, « The Relation between Forward Prices and Futures Prices », *Journal of Financial Economics*, 9 (décembre 1981), 321-46.

GHON R. S. et R. P. CHANG, « Intra-Day Arbitrage in Foreign Exchange and Eurocurrency Markets », *Journal of Finance*, 47, 1 (1992), 363-80.

JARROW R. A. et G. S. OLDFIELD, « Forward Contracts and Futures Contracts », *Journal of Financial Economics*, 9 (décembre 1981), 373-82.

KANE E. J., « Market Incompleteness and Divergences between Forward and Futures Interest Rates », *Journal of Finance*, 35 (mai 1980), 221-34.

RICHARD S. et M. SUNDARESAN, « A Continuous-Time Model of Forward and Futures Prices in a Multigood Economy », *Journal of Financial Economics*, 9 (décembre 1981), 347-72.

ROUTLEDGE B. R., D. J. SEPPI et C. S. SPATT, « Equilibrium Forward Curves for Commodities », *Journal of Finance*, 55, 3 (2000), 1297-1338.

Problèmes et exercices

5.1 Expliquez le mécanisme de vente à découvert d'une action.

5.2 Quelle est la différence entre un prix forward et la valeur d'un contrat forward ?

5.3 Vous prenez une position longue sur un forward 6 mois portant sur une action ND quand l'action cote 30 €, et le taux sans risque continu est 12 % par an. Quel est le prix forward ?

5.4 Un indice vaut aujourd'hui 350. Le taux sans risque est 8 % et le rendement en dividende 4 %. Quel est le prix futures théorique pour $T = 4$ mois ?

5.5 Expliquez avec soin pourquoi le prix futures d'un contrat sur l'or peut être déduit du prix spot (et d'autres variables) et qu'une telle relation ne peut être établie pour le cuivre.

5.6 Expliquez les expressions « rendement d'opportunité » et « coût de portage ». Quelle relation peut-on établir entre prix futures, prix spot, rendement d'opportunité et coût de portage ?

5.7 Expliquez pourquoi une devise étrangère peut être traitée comme un actif procurant un taux de revenu connu.

5.8 Le prix futures d'un contrat sur indice est-il plus élevé ou plus faible que la valeur espérée de l'indice à l'échéance ? Justifiez votre réponse.

5.9 Une position longue sur un forward à un an sur une action ND est prise quand l'action cote 40 € et le taux sans risque est de 10 % (en continu).

- **a.** Quel est le prix forward et quelle est la valeur initiale du contrat ?
- **b.** Six mois plus tard, l'action cote 45 € et le taux sans risque est toujours 10 %. Quel est le prix forward et quelle est la valeur du contrat ?

5.10 Le taux sans risque est 7 % et le rendement en dividende d'un indice est 3,2 %. L'indice est à 150. Quel est le prix futures à 6 mois ?

5.11 Le taux sans risque continu est 9 % et le rendement en dividende d'un indice varie pendant l'année. En février, mai, août et novembre, des dividendes sont payés en taux annuel de 5 %. Dans les autres mois, le dividende est payé au taux de 2 %. Le 31 juillet, l'indice vaut 300. Quel est, à cette date, le prix futures d'un contrat ayant comme échéance le 31 décembre ?

5.12 Le taux sans risque continu est 10 % et le rendement en dividende d'un indice est 4 %. L'indice vaut 400 et le prix futures à 4 mois est 405. Quelles sont les opportunités d'arbitrage ?

5.13 Estimez la différence entre les taux d'intérêt à court terme au Mexique et aux États-Unis le 4 février 2004 en utilisant le tableau 5.4.

5.14 Les taux d'intérêt à deux mois en Suisse et en France sont respectivement 3 % et 8 %. Le taux de change franc suisse (CHF) contre euro est 0,65 EUR/CHF. Le prix futures d'un contrat à deux mois est 0,66 EUR/CHF. Quelles sont les opportunités d'arbitrage ?

5.15 L'argent vaut 9 USD l'once. Les coûts de stockage sont de 0,24 USD par an, payables trimestriellement en début de période. Si le taux sans risque continu est de 10 %, quel est le prix futures d'un contrat à 9 mois ?

5.16 Soient F_1 et F_2 les prix futures de deux contrats sur la même matière première et d'échéances T_1 et T_2 où $T_2 > T_1$. Montrez que :

$$F_2 \leqslant F_1 e^{r(T_2-T_1)}$$

où r est le taux sans risque. On suppose que les coûts de stockage sont nuls et qu'un prix futures est assimilable à un prix forward.

5.17 Quand un décaissement futur, en devise étrangère, est couvert par un contrat forward, il n'y a plus de risque de change. Quand la couverture est faite avec un contrat futures, il reste un risque résiduel du fait du marking to market. Quelle est la nature de ce risque ?

En particulier, est-il préférable pour une entreprise de choisir un contrat futures quand :

a. La valeur de la devise étrangère chute rapidement pendant la vie du contrat ?

b. La valeur de la devise étrangère monte rapidement pendant la vie du contrat ?

c. La valeur de la devise étrangère monte d'abord puis revient à sa valeur initiale ?

d. La valeur de la devise étrangère chute d'abord puis revient à sa valeur initiale ?

On supposera que prix futures et prix forward sont identiques.

5.18 On dit parfois qu'un taux de change forward est un estimateur sans biais du taux de change au comptant à l'échéance du contrat. Dans quelles circonstances cette affirmation est-elle justifiée ?

5.19 Montrez que le taux de croissance du prix futures d'un contrat sur indice est égal à l'excès du taux de rentabilité de l'indice par rapport au taux sans risque. On supposera que le taux sans risque et le rendement en dividende sont constants.

5.20 Montrez que l'équation (5.3) est vérifiée en considérant un investissement dans l'actif avec une position courte sur un contrat futures. On suppose que les revenus procurés par l'actif sont réinvestis dans celui-ci. Utilisez un argument analogue à celui des notes de bas de page 2 et 4, et expliquez ce que ferait un arbitragiste si l'équation (5.3) n'était pas vérifiée.

5.21 Expliquez en détail ce qu'on entend par prix futur attendu pour une matière première donnée, à une date future fixée. Supposez que, le 4 février 2004, les spéculateurs soient plutôt en position courte sur le contrat futures Crude Oil et les hedgers en position longue. Quelles sont les implications des arguments de Keynes et Hicks sur le prix futur attendu du pétrole ? Utilisez le tableau 2.2.

5.22 Le Value Line Index reflète les variations de valeur d'un portefeuille équipondéré de 1 600 actions. Jusqu'au 9 mars 1998, la variation journalière de l'indice était calculée comme une moyenne géométrique des variations des titres composant l'indice. Dans quels cas l'équation (5.8) établit-elle une relation correcte entre le prix futures et la valeur au comptant ? Si ce n'est pas le cas, cela entraîne-t-il une sous ou une surévaluation ?

5.23 Une entreprise américaine cherche à couvrir son risque de change par rapport au dollar australien en utilisant les contrats cotés au CME. On note r le taux sans risque américain pour toutes les maturités et r_f le taux australien correspondant. On suppose que ces taux sont constants et que l'entreprise utilise à la date t des contrats d'échéance $T > t$.

a. Montrez que le ratio de couverture optimal est égal à $e^{(r_f - r)(T-t)}$.

b. Montrez que si $T - t$ est de l'ordre de la journée, le ratio optimal est très proche de S_0/F_0 où S_0 est le prix spot en t et F_0 le prix futures à cette même date pour le contrat d'échéance T.

c. Montrez que l'entreprise peut utiliser le marking to market quotidien pour ajuster dans le temps son ratio de couverture de façon qu'il soit toujours égal au rapport du prix spot et du prix futures, même quand la durée de couverture est supérieure à une journée.

Questions complémentaires

5.24 Deux dividendes de 1 € sont attendus dans 2 mois et dans 5 mois sur une action qui cote 50 €. Le taux sans risque continu est de 8 % par an. Un investisseur prend une position courte sur un forward à 6 mois sur cette action :

a. Quels sont le prix forward et la valeur initiale du contrat ?

b. Trois mois plus tard l'action cote 48 € ; quels sont le prix forward et la valeur de la position de l'investisseur (le taux sans risque est inchangé) ?

5.25 Une banque propose à un client d'emprunter en cash à 11 % ou d'emprunter en or à 2 % (dans ce cas les intérêts sont payables en or). Le taux sans risque est de 9,25 % et les coûts de stockage de 0,5 % par an. Les taux des emprunts sont censés être composés annuellement alors que le taux sans risque et les coûts de stockage sont composés en continu. Aucun revenu n'est payé par l'or. Comparez les deux types d'emprunt. Faites les mêmes calculs si l'or engendre un revenu de 1,5 % par an.

5.26 Une firme ne sait pas exactement quand elle paiera ou recevra une somme en devises. Elle cherche à négocier avec sa banque un contrat forward qui spécifie une période de livraison (plutôt qu'une date) : l'entreprise se réserve le choix de la date exacte de livraison. En vous mettant à la place du banquier, comment feriez-vous pour évaluer le produit financier demandé par l'entreprise ?

5.27 Un investisseur détient de l'or en portefeuille. Il peut acheter de l'or à 450 $ l'once et en vendre à 449 $ l'once. Il peut aussi emprunter des fonds à 6 % et en placer à 5,5 % par an (ces taux sont exprimés en composition annuelle). Quel est l'intervalle de prix forward à 1 an compatible avec l'absence d'opportunités d'arbitrage ? Vous supposerez qu'il n'y a pas de bid-ask spread sur les prix forward.

5.28 Une entreprise négocie un contrat forward avec une banque pour vendre une devise au prix K_1 à la date T_1. Le taux de change en T_1 est égal à $S_1 > K_1$. L'entreprise demande à la banque de prolonger la position jusqu'à une date $T_2 > T_1$. La banque donne son accord en spécifiant un nouveau taux de change K_2. Comment K_2 est-il calculé ?

Annexe

Démonstration de l'égalité des prix forward et futures lorsque les taux d'intérêt sont constants

Considérons un contrat futures dont l'échéance est dans n jours et notons F_i le prix futures au jour i $(0 < i < n)$; on note δ le taux d'intérêt par jour [8].

Adoptons la stratégie suivante :

1. Position longue sur le futures égale à e^{δ} contrats au début du jour 1.
2. Augmenter la position à $e^{2\delta}$ à la fin du jour 1, puis à $e^{3\delta}$ à la fin du jour 2, etc.

Le tableau 5.6 résume les résultats. Au début du jour i, la position longue est $e^{\delta\iota}$. Le profit de la position pour ce jour est :

$$e^{\delta i}\left(F_i - F_{i-1}\right)$$

Tableau 5.6 : Stratégie d'investissement sur les futures

Jour	0	1	2	...	$n-1$	n
Prix futures	F_0	F_1	F_2	...	F_{n-1}	F_n
Position sur le futures	e^{δ}	$e^{2\delta}$	$e^{3\delta}$	...	$e^{n\delta}$	0
Gain/Perte	0	$e^{\delta}(F_1 - F_0)$	$e^{2\delta}(F_2 - F_1)$	...	...	$e^{n\delta}(F_n - F_{n-1})$
Gain/Perte capitalisé à la date n	0	$e^{n\delta}(F_1 - F_0)$	$e^{n\delta}(F_2 - F_1)$	...	...	$e^{n\delta}(F_n - F_{n-1})$

Supposons que ce profit soit composé au taux sans risque jusqu'au jour n. Il vaut à la fin du jour n :

$$e^{\delta i}e^{\delta(n-i)}\left(F_i - F_{i-1}\right) = \left(F_i - F_{i-1}\right)e^{n\delta}$$

Pour la stratégie dans son ensemble, le profit s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(F_i - F_{i-1}\right)e^{n\delta} = \left(F_n - F_0\right)e^{n\delta}$$

Mais comme $F_n = S_T$, on a un profit $\left(S_T - F_0\right)e^{n\delta}$.

Un investissement d'un montant F_0 dans l'actif sans risque combiné à la stratégie ci-dessus donne un revenu final :

$$F_0e^{n\delta} + \left(S_T - F_0\right)e^{n\delta} = S_Te^{n\delta}$$

8. Cette stratégie est proposée par J. C. Cox, J. E. Ingersoll et S. A. Ross : « The Relation between Forward Prices and Futures Prices », *Journal of Financial Economics*, 9 (Décembre 1981), 321-46.

Par conséquent, un investissement initial F_0 conduit à un flux final $S_T e^{n\delta}$.

Considérons maintenant une position longue sur $e^{n\delta}$ contrats forward avec un prix forward initial G_0, combinée avec un placement de G_0 au taux sans risque. Ce placement rapporte $G_0 e^{n\delta}$ qui correspond au paiement permettant d'obtenir les $e^{n\delta}$ unités d'actif (qui cote S_T).

Les deux stratégies valent $S_T e^{n\delta}$ à la fin alors qu'elles nécessitent des investissements initiaux F_0 et G_0. En l'absence d'arbitrage, on a $F_0 = G_0$.

En conclusion, prix forward et prix futures sont identiques dans les hypothèses faites ci-dessus.

Chapitre 6

Les futures de taux d'intérêt

Jusqu'à présent nous avons vu les contrats sur matières premières, sur indices et sur devises. Nous avons décrit leur fonctionnement, précisé comment ils sont utilisés pour la couverture, et aussi comment les évaluer. Nous allons, au cours de ce chapitre, analyser les contrats futures de taux d'intérêt.

Les contrats les plus échangés sont les contrats futures Eurodollar ainsi que ceux ayant pour sous-jacents les obligations d'État. De nombreux contrats construits sur les mêmes principes sont échangés à travers le monde.

Nous montrons aussi comment ces contrats de taux, utilisés conjointement avec les mesures de duration présentées au chapitre 4, peuvent être utilisés pour couvrir le risque de taux d'une entreprise ou d'une institution financière.

6.1 Les conventions de décompte des jours

À titre préliminaire, définissons la façon dont les jours sont comptés sur les différents marchés de taux. Il s'agit ici de savoir comment sont capitalisés les intérêts au cours du temps. Ces conventions sont généralement exprimées sous la forme X/Y. Quand on calcule l'intéret entre deux dates, X définit la façon de compter le nombre de jours entre ces deux dates et Y stipule la mesure du nombre total de jours dans la période de référence. L'intérêt est alors calculé sous la forme :

$$\frac{\text{Nombre de jours entre les deux dates}}{\text{Nombre de jours de la période de référence}} \times \text{Intérêt sur une période de référence}$$

Les trois conventions les plus courantes sont :

1. Exact/Exact.
2. 30/360.
3. Exact/360.

Les obligations d'État

La convention Exact/Exact est utilisée pour les obligations d'État. Elle signifie que l'intérêt gagné entre deux dates est fondé sur le rapport du nombre de jours exact entre les deux dates et du nombre exact de jours de la période de référence. Si celle-ci est l'année, ce nombre sera 365 ou 366 ; s'il s'agit d'un semestre, le nombre de jours variera selon que le mois de février est ou non dans ce semestre et selon le nombre de mois de 31 jours dans ce semestre. Par exemple, considérons une obligation britannique payant des coupons semestriels de 4 £ le 1er mars et le 1er septembre. On cherche à calculer le coupon couru entre le 1er mars et le 3 juillet. La période de référence est ici le semestre allant du 1er mars au 1er septembre, qui comporte 184 jours, alors que 124 jours séparent nos deux dates. Le coupon couru entre le 1er mars et le 3 juillet sera donc :

$$\frac{124}{184} \times 4 = 2{,}6957$$

Les obligations du secteur privé

La référence 30/360 est utilisée pour les obligations du secteur privé (dites *corporate*) et pour les obligations municipales aux États-Unis. Cette référence suppose que tous les mois comportent 30 jours et que l'année comporte 360 jours. Dans l'exemple précédent, si l'on calculait le coupon couru sur cette base, on obtiendrait :

$$\frac{122}{180} \times 4 = 2{,}7111$$

Comme nous l'illustrons dans l'encadré 6.1, la convention 30/360 peut conduire à des résultats surprenants.

Encadré 6.1 Le décompte des jours peut être surprenant

Entre le 28 février 2007 et le 1er mars 2007, vous avez le choix entre détenir une obligation d'État et détenir une obligation du secteur privé de mêmes caractéristiques. Que préférez-vous ?

Intuitivement vous devriez être indifférent (le risque de défaut pendant la nuit peut être négligé), mais, en fait, vous préférerez l'obligation du secteur privé. En effet, dans la convention 30/360, il y a trois jours entre le 28 février et le 1er mars alors qu'il n'y en a qu'un dans la convention Exact/Exact. En détenant l'obligation privée, vous accumulerez environ trois fois plus de coupon qu'avec l'obligation d'État.

Le marché monétaire

La référence Exact/360 pour un instrument monétaire indique que la période de référence est une année de 360 jours. On divise alors le nombre de jours réellement écoulés par 360. L'intérêt gagné sur 90 jours est exactement égal au quart du taux coté en base annuelle dans ce cas. Par conséquent, sur une année entière, l'intérêt gagné est 365/360 fois le taux coté.

Les instruments monétaires sont souvent cotés en taux. C'est l'intérêt gagné du fait de la détention, exprimé en pourcentage de la valeur faciale de l'instrument considéré. Considérons par exemple un bon du Trésor US pour lequel la convention de décompte des jours est Exact/360. Si Y est la valeur du bon et n sa durée de vie, l'expression :

$$P = \frac{360}{n} \times (100 - Y)$$

définit le taux de rendement annualisé.

En effet, supposons une valeur de 99,07 pour un bon à 91 jours. Le taux de rendement (coté en %) est alors :

$$\frac{360}{91} \times (100 - 99{,}07) = 3{,}68$$

L'interprétation n'est donc pas la même que pour une obligation. Si on payait 99,07 pour un zéro-coupon qui rembourse 100 dans 91 jours, la rentabilité annuelle se calculerait de la manière suivante (dans une année de 366 jours) :

$$\frac{100 - 99{,}07}{99{,}07} \times \frac{366}{91} = 3{,}375\%$$

6.2 Les cotations des obligations

Selon le marché considéré, les obligations ne sont pas toujours cotées de la même façon. Sur le marché américain, elles sont cotées en dollars et trente-deuxièmes de dollar pour un nominal de 100 USD. En Europe, la cotation est en pourcentage du nominal avec deux décimales.

Par exemple, une cotation de 90-16 pour une obligation américaine de nominal 1 000 USD correspond à un prix de 905 USD car 16 signifie 16/32 = 0,5 USD. Cette cotation est équivalente à 90,5 sur le marché européen. Le montant décaissé (appelé prix coupon couru) pour acheter une obligation est égal au prix coté (appelé prix pied de coupon), auquel s'ajoute le coupon couru, c'est-à-dire l'intérêt accumulé depuis le dernier détachement de coupon.

Considérons par exemple l'OAT (Obligation Assimilable du Trésor) de taux de coupon 4,75 % (payé annuellement), dont l'échéance est le 25 octobre 2012. Nous sommes le 5 mars 2008 et l'obligation cote 102,55, pied de coupon. Pour calculer le coupon couru, il faut tout d'abord évaluer le nombre de jours séparant le 25 octobre 2007, date du paiement précédent, du 5 mars 2008, soit 132 jours. La durée de la période de référence est ensuite calculée, c'est-à-dire le nombre de jours séparant le 25 octobre

2007 du 25 octobre 2008 ; il y a 366 jours puisque 2008 est une année bissextile. Par conséquent, le coupon couru est égal à :

$$\frac{132}{366} \times 0{,}0475 = \quad 0{,}0171$$

pour un nominal de 1 €. Le prix de l'obligation, coupon couru en pourcentage du nominal, est donc, 102,55 + 1,71 = 104,26.

6.3 Les contrats futures sur obligations

Le tableau 6.1 montre les cotations de futures de taux d'intérêt tels qu'elles apparaissaient dans le *Wall Street Journal* du 5 février 2004. Un des contrats les plus échangés porte sur les obligations du Trésor US (contrat *Treasury Bonds*), coté sur le Chicago Board of Trade. N'importe quelle obligation d'État d'une maturité supérieure à 15 ans peut être livrée à l'échéance de ce contrat. Nous expliquerons un peu plus loin pourquoi il en est ainsi.

Les contrats sur bons du Trésor (*Treasury Notes*) et sur bons du Trésor à 5 ans (*5-Yr Treasury Notes*) sont aussi très populaires ; la livraison porte, pour le premier, sur des obligations ayant une maturité variant entre 6,5 et 10 ans et, pour le second, sur des obligations de maturité 4 ou 5 ans.

Les cotations

Les contrats futures sont cotés comme les obligations, à savoir en pourcentage du nominal avec deux chiffres après la virgule sur le marché européen, et en dollars et trente-deuxièmes de dollar sur le marché américain. Une cotation de 102-08 sur le marché américain est alors équivalente à une cotation de 102,25 sur le marché européen.

Le facteur de concordance

Les contrats futures sur obligations sont fondés sur un principe qui peut paraître curieux au premier abord : l'actif sous-jacent n'existe pas ! Il s'agit d'un titre fictif appelé obligation notionnelle. Sur le contrat US Treasury Bonds coté au CBOT, il s'agit d'une obligation d'une durée de vie de 30 ans payant un taux de coupon de 6 %. Le point important est que cette obligation fictive a toujours, par convention, la même durée de vie et le même taux de coupon. Sur le contrat FGBL portant sur les obligations de l'État Allemand, produit phare des futures de taux long dans la zone euro et coté sur l'Eurex, l'obligation notionnelle a une durée de vie de 10 ans et paie 6 % de taux de coupon.

Tableau 6.1 : Cotations des futures de taux d'intérêt tirés du Wall Street Journal du 5 février 2004 (les colonnes indiquent le mois d'échéance, le prix d'ouverture, les plus haut et plus bas de la journée, le prix de compensation, les plus haut et plus bas sur la durée de vie et la position ouverte).

Interest Rate Futures

Treasury Bonds (CBT)-$100,000; pts 32nds of 100%

Mar	111-25	111-31	109-18	111-17	-3	116-23	101-00	467,134
June	110-09	110-12	109-16	110-03	-3	116-15	104-00	31,215

Est vol 183,502; vol Tue 208,442; open int 499,090, +8,789.

Treasury Notes (CBT)-$100,000; pts 32nds of 100%

Mar	113-29	14-005	113-15	113-22	-4.5	116-10	106-29	1,130,409
June	112-17	112-17	111-29	112-03	-4.5	113-18	107-13	147,892

Est vol 489,439; vol Tue 623,701; open int 1,278,301, -9,178.

5 Yr. Treasury Notes (CBT)-$100,000; pts 32nds of 100%

Mar	12-215	112-24	12-125	112-17	-3.5	19-215	09-145	882,174

Est vol 219,841; vol Tue 268,683; open int 948,759, +6,645.

2 Yr. Treasury Notes (CBT)-$200,000; pts 32nds of 100%

Mar	07-132	07-142	07-102	07-127	-.2	07-205	106-02	164,711

Est vol 15,846; vol Tue 11,507; open int 166,044, +168.

30 Day Federal Funds (CBT)-$5,000,000; 100 - daily avg.

Feb	99.000	99.000	98.995	99.000	...	99.890	98.700	64,359
Mar	99.00	99.00	98.99	98.99	...	99.16	98.74	48,219
Apr	99.00	99.00	98.99	98.99	...	99.17	89.96	71,817
May	98.96	98.96	98.95	98.96	...	99.79	98.40	37,989
June	98.94	98.95	98.94	98.95	...	98.97	98.38	27,460
July	98.87	98.87	98.86	98.87	...	98.93	98.20	26,248
Aug	98.77	98.78	98.77	98.78	.01	98.85	98.24	4,137
Sept	98.70	98.71	98.68	98.71	-.01	98.79	98.22	5,260

Est vol 15,789; vol Tue 16,390; open int 286,642, -49,041.

10 Yr. Interest Rate Swaps (CBT)-$100,000; pts 32nds of 100%

Mar	111-15	111-19	111-03	111-10	-6	113-05	107-20	39,568

Est vol 1,060; vol Tue 968; open int 39,569, +269.

10 Yr. Muni Note Index (CBT)-$1,000 x index

Mar	103-13	103-21	103-08	103-15	1	105-04	99-21	2,249

Est vol 269; vol Tue 194; open int 2,249, +6.
Index: Close 104-15; Yield 4.44.

1 Month Libor (CME)-$3,000,000; pts of 100%

	OPEN	HIGH	LOW	SETTLE	CHG	YIELD	CHG	OPEN INT
Feb	98.90	98.90	98.89	98.89	...	1.11	...	29,195
Mar	98.89	98.89	98.89	98.89	...	1.11	...	11,060
Apr	98.86	98.86	98.86	98.86	...	1.14	...	8,279
May	98.83	98.83	98.82	98.82	...	1.18	...	2,550
Oct	98.44	98.44	98.43	98.44	...	1.56	...	51,960

Est vol 1,215; vol Tue 2,781; open int 171,119, +1,172.

Eurodollar (CME)-$1,000,000; pts of 100%

	OPEN	HIGH	LOW	SETTLE	CHG	YIELD	CHG	OPEN INT
Feb	98.86	98.86	98.86	98.86	...	1.14	...	32,246
Mar	98.84	98.84	98.83	98.84	...	1.16	...	827,925
Apr	98.80	98.80	98.79	98.80	...	1.20	...	35,531
May	98.75	98.75	98.74	98.74	...	1.26	...	14,543
June	98.69	98.69	98.66	98.68	...	1.32	...	838,794
July	98.58	98.58	98.57	98.58	...	1.42	...	2,150
Sept	98.41	98.43	98.38	98.41	...	1.59	...	794,586
Dec	98.04	98.06	98.00	98.03	...	1.97	...	600,750
Mr05	97.65	97.67	97.58	97.63	...	2.37	...	419,479
June	97.24	97.26	97.19	97.23	...	2.77	...	330,839
Sept	96.88	96.90	96.82	96.86	...	3.14	...	260,971
Dec	96.56	96.59	96.51	96.55	...	3.45	...	191,396
Mr06	96.32	96.33	96.25	96.30	-.01	3.70	.01	172,526
June	96.10	96.11	96.04	96.07	-.01	3.93	.01	128,625
Sept	95.91	95.91	95.83	95.86	-.01	4.14	.01	119,346
Dec	95.69	95.71	95.63	95.66	-.02	4.34	.02	105,045
Mr07	95.47	95.53	95.46	95.49	-.02	4.51	.02	75,659
June	95.34	95.38	95.30	95.33	-.03	4.67	.03	66,675
Sept	95.19	95.23	95.16	95.18	-.03	4.82	.03	73,288
Dec	95.05	95.09	95.02	95.04	-.03	4.96	.03	59,439
Mr08	94.92	94.97	94.90	94.92	-.03	5.08	.03	46,996
June	94.80	94.86	94.79	94.81	-.03	5.19	.03	50,074
Sept	94.71	94.75	94.68	94.71	-.03	5.29	.03	34,029
Dec	94.65	94.65	94.57	94.60	-.03	5.40	.03	26,470
Ju09	94.42	94.47	94.41	94.43	-.03	5.57	.03	9,247
Sept	94.34	94.40	94.34	94.35	-.03	5.65	.03	8,400
Dec	94.26	94.31	94.25	94.27	-.03	5.73	.03	4,633
Mr10	94.19	94.19	94.18	94.19	-.04	5.81	.04	8,192
June	94.12	94.12	94.11	94.12	-.04	5.88	.04	6,761
Sept	94.05	94.05	94.04	94.05	-.04	5.95	.04	4,683

Est vol 780,408; vol Tue 779,833; open int 5,375,781, +11,885.

Euroyen (CME)-¥100,000,000; pts of 100%

	OPEN	HIGH	LOW	SETTLE	CHG	LIFETIME HIGH	LIFETIME LOW	OPEN INT
Mar	99.91	99.91	99.91	99.91	...	99.92	99.14	11,530
June	99.91	99.91	99.91	99.91	...	99.92	99.41	9,096
Sept	99.89	99.89	99.89	99.89	...	99.90	99.35	12,320
Mr05	99.82	99.82	99.82	99.82	...	99.84	99.27	4,726

Est vol 431; vol Tue 25; open int 49,808, +775.

Short Sterling (LIFFE)-£500,000; pts of 100%

	OPEN	HIGH	LOW	SETTLE	CHG	LIFETIME HIGH	LIFETIME LOW	OPEN INT
Feb	95.82	95.82	95.82	95.82	...	95.89	95.80	1,913
Mar	95.76	95.77	95.75	95.76	...	96.80	93.01	188,159
June	95.57	95.58	95.54	95.56	...	96.71	93.04	201,882
Sept	95.37	95.40	95.34	95.36	...	96.59	93.35	153,843
Dec	95.21	95.24	95.19	95.20	...	96.48	93.25	139,045
Mr05	95.10	95.13	95.06	95.08	...	96.38	93.29	83,684
June	95.01	95.04	94.98	94.99	...	96.30	93.29	72,583
Sept	94.95	94.97	94.91	94.92	...	96.23	94.06	70,992
Dec	94.88	94.91	94.85	94.86	...	96.15	94.06	35,228
Mr06	94.82	94.84	94.80	94.82	.02	96.10	94.05	27,988
June	94.77	94.81	94.75	94.77	.02	95.97	94.04	28,423
Sept	94.74	94.78	94.72	94.74	.02	95.75	94.32	15,264
Dec	94.74	94.75	94.71	94.72	.02	95.83	94.25	6,356
Mr07	94.69	94.69	94.69	94.71	.02	95.82	94.33	527
June	94.71	94.71	94.71	94.70	.02	95.73	94.66	639

Est vol 142,996; vol Tue 184,402; open int 1,028,552, -284.

Long Gilt (LIFFE)-£100,000; pts of 100%

	OPEN	HIGH	LOW	SETTLE	CHG	LIFETIME HIGH	LIFETIME LOW	OPEN INT
Mar	107.95	108.41	107.95	108.12	.26	109.73	105.39	159,338

Est vol 50,453; vol Tue 36,817; open int 159,339, -153.

3 Month Euribor (LIFFE)-€1,000,000; pts of 100%

	OPEN	HIGH	LOW	SETTLE	CHG	LIFETIME HIGH	LIFETIME LOW	OPEN INT
Feb	97.92	97.93	97.92	97.93	.01	97.96	97.77	13,595
Mar	97.94	97.95	97.93	97.94	.01	98.29	93.83	562,698
June	97.91	97.92	97.89	97.90	.02	98.21	93.79	511,614
Sept	97.77	97.78	97.75	97.76	.03	98.08	93.73	428,741
Dec	97.55	97.57	97.53	97.55	.04	97.91	93.64	436,055
Mr05	97.32	97.34	97.30	97.31	.03	97.77	94.07	301,516
June	97.09	97.10	97.06	97.07	.03	97.60	94.29	197,768
Sept	96.88	96.89	96.84	96.86	.02	97.44	94.29	119,907
Dec	96.68	96.69	96.65	96.66	.02	97.28	94.41	95,512
Mr06	96.51	96.53	96.48	96.50	.02	97.14	94.40	41,992
June	96.35	96.36	96.32	96.33	.02	96.96	94.66	37,197
Sept	96.20	96.21	96.17	96.18	.02	96.81	94.58	22,947
Dec	96.03	96.04	96.01	96.02	.02	96.60	94.62	11,645
Mr07	95.93	95.93	95.93	95.90	.02	96.48	94.57	4,473
June	95.79	95.79	95.79	95.80	.02	96.29	94.57	2,490
Sept	95.69	95.69	95.69	95.70	.02	96.21	95.26	2,204

Est vol 547,848; vol Tue 533,760; open int 2,791,222, +50,205.

3 Month Euroswiss (LIFFE)-CHF 1,000,000; pts of 100%

	OPEN	HIGH	LOW	SETTLE	CHG	LIFETIME HIGH	LIFETIME LOW	OPEN INT
Mar	99.73	99.74	99.72	99.73	...	99.75	96.32	95,989
June	99.61	99.61	99.56	99.57	-.02	99.63	96.98	81,441
Sept	99.37	99.39	99.35	99.36	-.01	99.41	97.60	41,632
Dec	99.14	99.14	99.11	99.12	-.01	99.17	98.00	32,364
Mr05	98.87	98.87	98.86	98.87	-.01	98.93	97.90	7,335
June	98.65	98.65	98.61	98.62	-.01	98.68	97.74	9,694
Sept	98.43	98.44	98.36	98.41	-.02	98.47	97.75	4,732
Dec	98.21	98.22	98.14	98.19	-.01	98.24	97.92	2,745

Est vol 14,180; vol Tue 21,649; open int 275,932, -1,537.

Canadian Bankers Acceptance (ME)-CAD 1,000,000

	OPEN	HIGH	LOW	SETTLE	CHG	LIFETIME HIGH	LIFETIME LOW	OPEN INT
Mar	97.71	97.71	97.67	97.68	-0.02	97.78	93.77	70,087
June	97.78	97.78	97.72	97.75	-0.03	97.88	95.34	97,819
Sept	97.71	97.71	97.65	97.68	-0.03	97.81	94.22	35,605
Dec	97.51	97.51	97.45	97.47	-0.04	97.62	94.10	17,196
Mr05	97.21	97.21	97.16	97.18	-0.04	97.33	94.45	9,163
Sept	96.53	96.53	96.53	96.51	-0.04	96.64	95.21	1,200

Est vol 24,925; vol Tue 21,162; open int 238,828, +585.

10 Yr. Canadian Govt. Bonds (ME)-CAD 100,000

	OPEN	HIGH	LOW	SETTLE	CHG	LIFETIME HIGH	LIFETIME LOW	OPEN INT
Mar	110.58	110.64	110.07	110.39	-0.22	111.61	106.90	90,003

Est vol 6,222; vol Tue 12,898; open int 90,003, +6,036.

3 Yr. Commonwealth T-Bonds (SFE)-AUD 100,000

Mar	94.38	94.48	94.37	94.47	0.09	94.56	93.96	609,295

Est vol 130,882; vol Tue 72,788; open int 609,295, +83,322.

Euroyen (SGX)-¥100,000,000; pts of 100%

Mar	99.91	99.91	99.91	99.91	...	99.92	98.19	60,509
June	99.91	99.91	99.91	99.92	0.01	99.92	99.45	71,194
Sept	99.89	99.90	99.89	99.90	0.01	99.90	99.34	43,155
Dec	99.87	99.87	99.87	99.87	...	99.87	99.22	45,234
Mr05	99.81	99.82	99.81	99.82	0.01	99.85	99.18	23,103
June	99.78	99.78	99.78	99.78	0.01	99.85	99.10	20,948
Sept	99.70	99.71	99.70	99.71	0.02	99.74	98.95	14,023
Dec	99.61	99.62	99.61	99.61	0.01	99.77	98.80	3,635
Mr06	99.50	99.50	99.50	99.50	0.01	99.76	98.84	3,405
June	99.42	99.42	99.42	99.43	0.02	99.75	98.55	1,380
Dec	99.23	99.23	99.23	99.23	0.02	99.71	98.35	1,851

Est vol 3,160; vol Tue 5,292; open int 295,306, –1,880.

5 Yr. Euro-BOBL (EUREX)-€100,000; pts of 100%

Mar	111.59	111.66	111.47	111.56	...	112.06	108.71	743,330
June	110.79	110.80	110.71	110.75	...	111.16	109.50	7,545

vol Wed 582,579; open int 750,875, +21,654.

10 Yr. Euro-BUND (EUREX)-€100,000; pts of 100%

Mar	114.30	114.45	114.15	114.26	–0.02	117.76	110.73	945,187
June	113.31	113.43	113.26	113.28	–0.01	114.11	110.62	27,345

vol Wed 841,211; open int 972,534, –23,916.

2 Yr. Euro-SCHATZ (EUREX)-€100,000; pts of 100%

Mar	106.18	106.20	106.13	106.17	...	106.35	104.95	683,537
June	105.80	105.84	105.79	105.80	...	105.88	105.21	28,066

vol Wed 437,442; open int 711,603, +22,620.

Sources : Dow Jones & Company, Inc. 2004.

L'intérêt de choisir une obligation fictive réside dans la standardisation des contrats que permet ce choix. Chaque jour, le même contrat est négocié, avec le même sous-jacent (fictif) en termes de durée de vie, de taux de coupon et de coupon couru (toujours supposé nul). Une position longue prise aujourd'hui peut être dénouée demain en prenant une position courte sur le même contrat. Si le sous-jacent était réel, l'obligation aurait perdu demain une journée de maturité, induisant une différence entre le contrat coté aujourd'hui et celui coté demain.

Bien évidemment, il faut définir des règles de dénouement de ces contrats à l'échéance et les rattacher au marché réel. C'est pourquoi les autorités de marché définissent une liste d'obligations, bien réelles celles-là, qui pourront être livrées à l'échéance. C'est la définition d'un facteur de concordance qui permet de faire le lien entre obligation notionnelle et obligations livrables.

Le tableau 6.2 donne un exemple de cotation du contrat FGBL le 14 novembre 2006, qui sera utilisé dans la suite.

Tableau 6.2 : Cotation du contrat FGBL (échéance mars 2007) le 14 novembre 2006

Ouverture	+ Haut	+ Bas	Clôture	Compensation	Volume	PO
117,95	118,44	117,87	118,35	118,11	6 234	37 706

Sources : www.eurexchange.com

Pour ce contrat FGBL d'échéance mars 2007, les deux obligations suivantes pouvaient être livrées (cet ensemble de titres est appelé gisement) :

1. BUND 3,5 %, 4 janvier 2016.
2. BUND 4 %, 4 juillet 2016.

Les obligations livrables doivent avoir une durée de vie résiduelle entre 8,5 et 10,5 années. L'objectif est qu'elles soient aussi proches que possible du notionnel mais qu'il ne soit pas nécessaire d'en changer trop souvent. Un contrat porte sur 100 000 € de nominal sous-jacent.

Sur le Chicago Board of Trade, les obligations d'État ayant une durée de vie supérieure à 15 ans sont livrables et le contrat porte sur 100 000 USD de nominal sous-jacent.

Bien évidemment, les taux de coupon des obligations livrables sont le plus souvent différents du taux de coupon du notionnel, à savoir 6 %. Par conséquent, ces obligations n'ont pas la même valeur que le notionnel. Le facteur de concordance est destiné à ajuster les termes du contrat pour tenir compte de cette remarque.

Supposons que le vendeur du contrat décide de livrer le Bund 3,5 % alors que le prix futures est égal à 100. Si le notionnel existait, le vendeur livrerait 100 000 obligations notionnelles (de nominal 1 €) et recevrait 100 000 € puisque le prix futures est supposé égal à 100.

Il livre en fait une obligation qui vaut moins puisque le coupon est moins élevé (3,5 %, contre 6 % pour l'obligation notionnelle). Deux solutions sont possibles pour ajuster le contrat : garder le paiement de 100 000 € et modifier le nombre d'obligations livrées, ou garder le même nombre de Bunds mais ajuster le prix payé par le vendeur. Cette seconde solution a été retenue, pour des raisons techniques évidentes, sur les contrats futures sur obligations. Le montant payé par l'acheteur est donc égal au prix futures (100 dans notre exemple) multiplié par le facteur de concordance.

Le second ajustement concerne le coupon couru. Il est rajouté au prix à payer par l'acheteur quand les obligations livrées ont un coupon couru non nul.

Dans notre exemple, le Bund 3,5 % a un facteur de concordance égal à 0,832458 et un coupon couru de 1,2753. Par conséquent, l'acheteur paiera au vendeur :

$$100000 \times \left(\frac{83{,}2454 + 1{,}2753}{100}\right) = 84521{,}14\text{ €}$$

Le facteur de concordance est en fait la valeur (au pied du coupon) qu'aurait l'obligation si la structure des taux était plate, au niveau du taux de coupon de l'obligation notionnelle.

En supposant, pour simplifier, qu'à l'échéance d'un contrat, le Bund ait exactement 9 ans à vivre et que le coupon vienne d'être payé, le facteur de concordance vaudrait alors :

$$\sum_{i=1}^{9} \frac{3{,}5}{1{,}06^i} + \frac{103{,}5}{1{,}06^9} = 81{,}6$$

Supposons maintenant que le Bund ait 9 ans et 3 mois de maturité. Le taux du notionnel pour trois mois est $1{,}06^{0{,}25} - 1 = 1{,}467$ %. Il faut donc actualiser la valeur de 81,6 trouvée ci-dessus sur trois mois, ce qui donne $81{,}6/1{,}01467 = 80{,}42$. Mais, dans ce cas, le coupon couru est de 2,625, qu'il faut déduire du résultat précédent. On obtient un facteur de concordance égal à $(80{,}42 - 2{,}625) / 100 = 0{,}77795$.

Précisons toutefois que, sur le CBOT, le facteur de concordance est calculé en arrondissant la durée de vie résiduelle de l'obligation au nombre entier de trimestres immédiatement inférieur à la durée de vie réelle.

L'obligation la moins chère à livrer

Pour chaque obligation livrable, le vendeur peut calculer, par l'intermédiaire du prix futures et du facteur de concordance, le prix qui lui sera payé selon le titre qu'il choisit de livrer. Pour choisir quelle obligation livrer, il évalue le coût d'achat de chacune des obligations. Pour chaque possibilité, la différence entre le montant reçu et le montant payé représente le gain (perte) réalisé sur ce choix particulier. En fin de compte, le vendeur choisira le titre qui maximise son gain ou minimise sa perte. C'est ce qui détermine l'obligation la *moins chère à livrer* (les professionnels disent simplement *cheapest*).

On peut noter que le coût d'achat des obligations comprend le coupon couru, de même que le montant reçu. Par conséquent, celui-ci est neutralisé lorsqu'on calcule la différence. Pour déterminer la moins chère à livrer, il suffit donc de maximiser la différence :

$$\text{Prix futures} \times \text{Facteur de concordance} - \text{Prix de l'obligation (pied de coupon)}$$

■ **Exemple 6.1**

Considérons à nouveau les deux obligations livrables du contrat Bund mars 2007. On suppose que le prix futures est de 119,01 le jour de la liquidation, et les prix et facteurs de concordance sont donnés dans les colonnes 2 et 3 du tableau 6.3. Le gain du vendeur est présenté dans la dernière colonne du tableau. On constate que le gain maximal est obtenu sur le BUND 4 %, qui est dès lors l'obligation la moins chère à livrer.

Tableau 6.3 : Prix des obligations et facteurs de concordance

Obligation livrable	**Prix**	**Facteur de concordance**	**Gain/Perte**
BUND 3,5 %, 4 janvier 2016	99,00	0,832458	0,07
BUND 4 %, 4 juillet 2016	102,10	0,860066	0,2564

Plusieurs facteurs déterminent la moins chère à livrer. Quand les taux actuariels des obligations sont plus élevés que le taux de coupon du notionnel, le système du facteur de concordance favorise les obligations à faible coupon et à maturité longue. Quand c'est l'inverse (c'est le cas ici), les obligations plus courtes et à taux de coupon élevé sont favorisées.

De la même façon, quand la courbe des taux est croissante, les obligations à échéance plus longue sont favorisées. Notons cependant que l'écart de maturité entre les obligations livrables est au maximum de deux ans sur le contrat FGBL ; par contre, sur le contrat américain sur Treasury Bonds, toutes les obligations du Trésor US ayant plus de quinze ans de maturité sont livrables, à condition qu'elles ne comportent pas de clause de remboursement anticipé.

Nous avons vu que le vendeur choisit l'obligation qu'il va livrer et possède donc une option par ce biais. Il en possède une autre qu'on appelle *wild card*, liée au décalage temporel entre l'arrêt des cotations du contrat futures et l'arrêt des cotations des obligations livrables. Elle est décrite dans l'encadré 6.2

Encadré 6.2 La Wild Card

Considérons le contrat futures sur obligations du CBOT. La cotation du contrat cesse à 14 heures, mais les obligations continuent à être cotées jusqu'à 16 heures, et le vendeur a jusqu'à 20 heures pour notifier la livraison à la chambre de compensation. Si le prix de la moins chère à livrer baisse entre 14 et 16 heures, le vendeur peut acheter les obligations sur le marché et notifier ensuite son intention de livrer. Si les prix montent, il laisse la position ouverte et attend le lendemain. Cette stratégie peut être suivie pendant toute la période de livraison.

Bien sûr, les diverses options détenues par le vendeur ne sont pas gratuites ; leur valeur est reflétée dans le prix futures du contrat qui est plus faible que ce qu'il serait en l'absence de telles options.

La détermination du prix futures théorique

Un prix futures théorique exact n'est pas toujours facile à déterminer, en particulier du fait du choix laissé au vendeur concernant l'obligation qu'il va livrer et la date exacte de livraison. Cependant, si l'on suppose que la date de livraison est connue, ainsi que l'obligation la moins chère à livrer, le contrat est un futures sur un titre payant un flux connu[1]. L'équation (5.2) peut alors être utilisée pour écrire :

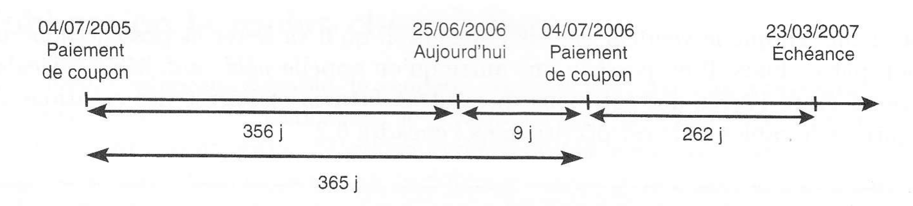
$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT} \tag{6.1}$$

où I est la valeur actuelle des coupons payés pendant la durée de vie du contrat, T est la durée restante jusqu'à l'échéance du contrat, r est le taux applicable pour cette durée, et F_0,S_0 désignent les prix futures et spot.

■ **Exemple 6.2**

Supposons que l'obligation la moins chère à livrer du gisement Bund, le 25 juin 2006, soit le Bund 4 %, avec un facteur de concordance de 0,860066, et que la livraison ait lieu dans 271 jours, le 23 mars 2007. Un coupon a été payé il y a 356 jours, le 4 juillet 2005. Le graphique 4.1 indique le schéma chronologique.

1. En pratique, les opérateurs supposent, pour déterminer la moins chère à livrer, que les taux zéro-coupon à l'échéance du contrat seront égaux aux taux forward observés aujourd'hui.



Graphique 6.1 : Chronologie.

La structure des taux est supposée plate au niveau de 4 % (en continu). Supposons que l'obligation cote 100 au pied du coupon. Le prix de l'obligation coupon couru est alors :

$$100 + \frac{356}{365} \times 4 = 103{,}90$$

Un coupon sera payé dans 9 jours ; sa valeur actuelle est :

$$4e^{-0{,}04 \times \frac{9}{365}} = 3{,}99$$

Le prix théorique du contrat futures (coupon couru) est donc égal à :

$$(103{,}90 - 3{,}99)e^{0{,}04 \times \frac{271}{365}} = 102{,}92$$

À la date de livraison, il y a 262 jours de coupon couru. Par conséquent, si le contrat portait sur le Bund, le prix futures au pied du coupon serait donné par :

$$102{,}92 - \frac{262}{365} \times 4 = 100{,}05$$

Mais le facteur de concordance indique que le Bund est équivalent à 0,860066 obligation notionnelle ; par conséquent, le prix futures théorique du contrat est donné par :

$$\frac{100{,}05}{0{,}860066} = 116{,}33$$

6.4 Les contrats futures Eurodollar

Un des contrats de taux les plus échangés est le contrat futures Eurodollar 3 mois du CME. Un eurodollar est un dollar déposé dans une banque américaine ou étrangère en dehors des USA. Le taux Eurodollar est alors le taux d'intérêt versé sur un dépôt de ce type. Il est analogue, pour d'autres devises, aux taux LIBOR, vus au chapitre 4.

Le contrat Eurodollar 3 mois du CME est un contrat portant sur ce taux Eurodollar 3 mois. Les maturités varient de 1 mois à 10 ans avec des échéances mensuelles pour l'horizon proche et 40 échéances trimestrielles du cycle mars, juin, septembre, décembre. Les flux engendrés par ce contrat (à l'échéance) correspondent au montant d'intérêts sur un placement de 1 million d'USD à 90 jours (en négligeant la compensation quotidienne pour faciliter l'interprétation).

Le contrat Euribor 3 mois, coté sur Euronext.LIFFE et Eurex, fonctionne sur le même principe, mais avec 20 échéances trimestrielles et donc un horizon de 5 ans ; il porte sur un nominal de 1 million d'euros.

Si Q désigne le prix coté du contrat, sa valeur est définie par :

$$10000[100 - 0{,}25(100 - Q)] \tag{6.2}$$

- **Exemple 6.3**

Supposons un cours de compensation de 95,53 pour un contrat d'échéance juin 2007. Cela correspond à une valeur de :

$$10\,000[100 - 0{,}25(100 - 95{,}53)] = 988\,825 \text{ USD}$$

L'équation (6.2) souligne le fait qu'une variation égale à un point de base dans la cotation correspond à une variation de valeur de 25 USD. Les variations minimales (tick) sont de 0,25 ou 0,50 point de base, selon l'échéance. À la date d'échéance, la compensation est faite en fixant $Q = 100 - R$, où R est le taux Eurodollar 3 mois constaté ce jour, exprimé en composition trimestrielle sur une base Exact/360. Si par exemple $R = 8$ %, la cotation finale est 92 et la valeur finale du contrat est, selon l'équation (6.2) :

$$10\,000[100 - 0{,}25(100 - 92)] = 980\,000 \text{ USD}$$

Taux forward versus taux futures

Le contrat futures Eurodollar ressemble à un FRA (voir section 4.7) car il permet de fixer un taux d'intérêt pour une période future. Pour les maturités courtes (jusqu'à un an), les deux types de contrats peuvent être supposés identiques et le taux futures Eurodollar peut donc être supposé égal au taux forward correspondant. Pour des maturités plus longues, les différences ne peuvent plus être négligées. Comparons un contrat Eurodollar définissant un taux sur une période $[t_1; t_2]$ et un FRA correspondant à la même période. Le premier contrat fait l'objet d'un marking to market quotidien. Il se termine à la date t_1 et reflète le taux prévalant à cette date pour la période allant jusqu'à t_2. À l'inverse, le FRA se termine en t_2 même s'il reflète le taux de la même période[2].

En conséquence, deux éléments induisent des différences entre les deux contrats :

1. Le marking to market quotidien.
2. Le fait que l'un des contrats ait une date finale de paiement en t_1, alors que pour l'autre la date finale est t_2.

Ces différences peuvent induire une certaine confusion. Les deux entraînent une diminution du taux forward par rapport au taux futures, mais, pour les contrats d'échéance

2. Comme nous l'avons mentionné dans la section 4.7, le paiement peut-être néanmoins réalisé en t_1, mais il est égal à la valeur actuelle du paiement qui devrait normalement être fait en t_2.

longue, la réduction provenant du point (2) est bien moins importante que celle due au point (1). Le fait que le marking to market provoque une baisse du taux forward est lié aux arguments de la section 5.8.

Considérons un contrat dont le paiement est $R_M - R_F$ à la date t_1, où R_F est un taux prédéterminé pour la période $[t_1; t_2]$ et R_M est le taux observé pour cette période. S'il y a un marking to market quotidien, le contrat engendre des flux positifs quand les taux sont élevés et des flux négatifs quand les taux sont bas. Le marking to market est alors avantageux. En conséquence, R_F sera fixé à un niveau plus élevé pour compenser.

Pour comprendre le rôle du point (2), supposons maintenant que la fin du contrat soit fixée en date t_2. Si R_M est élevé, le flux est positif. Mais, dans ce cas, il aurait été préférable de recevoir ce flux en t_1. Le raisonnement symétrique peut être fait si R_M est faible. De ce fait il est nécessaire d'introduire une compensation par une baisse du taux R_F[3].

Les analystes réalisent alors un ajustement de convexité pour tenir compte de cette différence. La formulation usuelle de cet ajustement est[4] :

$$\text{Taux forward} = \text{Taux futures} - \frac{1}{2}\sigma^2 t_1 t_2 \qquad (6.3)$$

où t_1 est la maturité du contrat futures et t_2 est égal à t_1 plus la durée à laquelle s'applique le taux du contrat (3 mois dans l'exemple). σ est l'écart-type annuel des variations du taux court. Les deux taux dans l'égalité précédente sont exprimés en continu[5].

■ **Exemple 6.4**

On suppose ici que $\sigma = 0{,}012$ et l'on cherche à calculer le taux forward quand le contrat futures à 8 ans cote 94. Dans ce cas, $t_1 = 8$ et $t_2 = 8{,}25$, et l'ajustement de convexité est donné par :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 t_1 t_2 = \frac{1}{2} \times 0{,}012^2 \times 8 \times 8{,}25 = 0{,}00475$$

c'est-à-dire 0,475 % ou 47,5 points de base. Comme le taux futures est de 6 % (le contrat cote 94) en base Exact/360 et avec composition trimestrielle, cela donne 6,038 % en continu. Le taux forward correspondant est donc 6,038 − 0,475 = 5,563 % par an en continu.

Notons que le taux forward est plus faible que le taux futures et que l'ajustement est proportionnel (approximativement) au carré de la durée de vie du contrat. On voit sur le tableau 6.4 que cet ajustement est donc 16 fois plus important sur un contrat à 8 ans que sur un contrat à 2 ans.

3. La quantification de cet effet sur la valeur d'un actif dérivé est discutée plus en détail au chapitre 27.

4. Voir la note technique n° 1 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr) pour une démonstration.

5. Cette formule est basée sur le modèle de Ho et Lee qui sera discuté au chapitre 28. Voir T. S. Y. Ho et S. B. Lee, « Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims », *Journal of Finance*, 41 (décembre 1986), 1011-1029.

Tableau 6.4 : Ajustements de convexité pour le taux futures de l'exemple 6.4

Maturité du contrat (années)	Convexité Ajustments de convexité (bp)
2	3,2
4	12,2
6	27,0
8	47,5
10	73,8

L'extension de la courbe zéro-coupon LIBOR

La courbe des taux ZC LIBOR, appelée aussi courbe swap (voir chapitre 7), est généralement considérée comme la courbe des taux sans risque dans l'évaluation des actifs dérivés. Les taux spot LIBOR (voir section 4.1) sont utilisés pour les maturités courtes; pour les maturités plus longues, on emploie les futures Eurodollar avec l'ajustement de convexité exposé dans la section précédente.

Avec des échéances mars, juin, septembre, décembre, la courbe ZC LIBOR peut être calculée. En effet, supposons que le i-ième contrat ait la date T_i comme échéance. Le taux forward déduit du prix de ce contrat s'applique à la période $[T_i; T_{i+1}]$. Une méthode de bootstrap peut ensuite être appliquée; en effet, si F_i est le taux forward déduit du i-ième contrat et si R_i est le taux ZC pour la maturité T_i, on sait par l'équation (4.5) que :

$$F_i = \frac{R_{i+1}T_{i+1} - R_iT_i}{T_{i+1} - T_i}$$

ou encore :

$$R_{i+1} = \frac{F_i(T_{i+1} - T_i) + R_iT_i}{T_{i+1}} \tag{6.4}$$

- **Exemple 6.5**

  Le taux ZC LIBOR à 400 jours a été évalué à 4,8 %, en composition continue. À partir de cotations de contrat futures Eurodollar, on déduit que le taux forward continu à 90 jours débutant dans 400 jours est égal à 5,3 %, que le taux forward à 90 jours débutant dans 491 jours est égal à 5,5 % et que le taux forward à 90 jours débutant dans 589 jours est égal à 5,6 %. Tous ces taux sont en composition continue.

  On peut utiliser l'équation (6.4) pour calculer le taux à 491 jours. Il est égal à :

$$\frac{0{,}053 \times 91 + 0{,}048 \times 400}{491} = 0{,}04893$$

soit 4,893 %. De la même façon, le taux à 589 jours est donné par :

$$\frac{0{,}055 \times 98 + 0{,}04893 \times 491}{589} = 0{,}04994$$

Le taux suivant de 5,6 % permettrait de poursuivre le calcul de la courbe des taux ZC. On peut noter que, même si les taux sous-jacents aux contrats Eurodollar sont des taux à 90 jours, on les applique à des durées de 91 ou 98 jours, qui sont les délais séparant deux échéances successives de contrats.

6.5 Les stratégies de couverture fondées sur la duration

Nous avons déjà introduit la duration à la section 4.8. Considérons ici la couverture d'une position dépendant des taux d'intérêt (comme un portefeuille d'obligations par exemple) par des contrats futures. Notons :

F_C : prix futures du contrat considéré

D_F : duration de l'actif sous-jacent à la date d'échéance du contrat

P : valeur forward du portefeuille à couvrir à la fin de la période de couverture (en pratique, on suppose souvent que c'est la valeur d'aujourd'hui)

D_P : duration du portefeuille à la fin de la période de couverture

Si nous supposons que la variation Δy des taux est la même pour toutes les maturités (déplacement parallèle de la courbe), nous pouvons écrire en première approximation :

$$\Delta P = -PD_P\Delta y$$

La relation correspondante pour le contrat futures s'écrit :

$$\Delta F_C = -F_C D_F \Delta y$$

Par conséquent, le nombre de contrats nécessaires pour couvrir la position est défini par :

$$N^* = \frac{PD_P}{F_C D_F} \tag{6.5}$$

Cette quantité de contrats est le ratio de couverture fondé sur la duration[6] ; il permet de ramener la duration de la position globale à 0.

Quand le contrat futures est un futures sur obligations, le hedger doit faire une hypothèse sur l'obligation la moins chère à livrer. Si, par la suite, un changement de l'obligation la moins chère à livrer survient, la couverture doit être ajustée et sa performance sera peut-être moins bonne que celle qui avait été prévue.

De manière plus générale, quand la couverture est fondée sur des futures de taux, il est important de garder à l'esprit que taux et prix d'obligations varient en sens

6. Pour une discussion plus détaillée sur l'équation (31.3), voir R. J. Rendleman, « Duration-Based Hedging with Treasury Bond Futures », *Journal of Fixed Income*, 9, 1, (juin 1999), 84-91.

opposé. Par conséquent, une entreprise susceptible de perdre de l'argent quand les taux baissent doit prendre une position longue sur les futures de taux.

Le hedger choisit un contrat futures dont la duration du sous-jacent est aussi proche que possible de celle du portefeuille qu'il cherche à couvrir. Les futures Eurodollar seront utilisés de manière privilégiée pour couvrir une exposition aux variations des taux courts, alors que les futures sur obligations seront préférés pour couvrir une exposition aux variations des taux longs.

■ **Exemple 6.6**

Le 2 août, un gérant de fonds possède un portefeuille d'obligations d'État de 10 millions d'euros et s'inquiète d'une possible hausse des taux dans les trois mois à venir. Il décide d'utiliser, pour se couvrir, le contrat FGBL d'échéance décembre. Le prix futures est de 112,50. Comme chaque contrat porte sur 100 000 € de nominal, le prix futures est de 112 500 €. On suppose que la duration du portefeuille dans trois mois sera de 5,3 ans et que l'obligation la moins chère à livrer est un Bund dont la duration sera de 7,3 ans dans trois mois et qui paie un taux de coupon de 5 %. Le taux actuariel de ce Bund est actuellement de 6 %.

Le gérant envisage de prendre une position courte sur ce contrat pour couvrir son portefeuille. Si les taux montent, le gain sur le futures compensera la perte sur le portefeuille. Le nombre de contrats à vendre est donné par :

$$N^* = \frac{10\ 000\ 000}{112\ 500} \times \frac{5{,}3}{7{,}3} = 64{,}54$$

En arrondissant à l'entier le plus proche, le hedger prendra une position courte sur 65 contrats.

6.6 La couverture de portefeuilles d'actifs et de passifs

Les institutions financières cherchent fréquemment à couvrir leurs positions contre le risque de taux en s'assurant que la duration moyenne de leurs actifs coïncide avec celle de leurs passifs (qui peuvent être analysés comme une position courte sur un portefeuille d'obligations). Cette stratégie est appelée *immunisation de portefeuille* ou encore *duration matching* . Une fois mise en place, elle assure qu'un faible déplacement parallèle de la courbe des taux aura peu d'effet sur la valeur du portefeuille d'actifs et de passifs. Le gain (la perte) sur les actifs doit être compensé par la perte (le gain) sur les passifs.

Cependant, l'immunisation ne protège pas contre des déplacements non parallèles de la courbe des taux, c'est la faiblesse essentielle de cette approche. En pratique, les taux courts sont plus volatils que les taux longs, les deux types de taux n'étant pas parfaitement corrélés. Il peut même arriver qu'ils changent dans des directions opposées. Une stratégie de *duration matching* n'est donc qu'un premier pas et les institutions financières ont développé d'autres outils qui les aident à gérer leur risque de taux, comme l'illustre l'encadré 6.3.

Encadré 6.3 L'ALM (*Asset-Liability Management*) vu par les banques

Dans les années 1960, les taux étaient faibles et peu volatils. Les banques avaient donc pris l'habitude d'accepter des dépôts à court terme et de prêter simultanément à long terme. Dans les années 1970, les taux ont commencé à augmenter et ces établissements se retrouvaient dans la situation de devoir financer à taux élevé des prêts accordés précédemment à taux faible. Il s'ensuivit quelques faillites spectaculaires.

Les comités de gestion actif-passif (ALM pour le sigle anglo-saxon) gèrent maintenant de très près l'exposition au risque de taux des banques. Mettre en correspondance la duration des actifs et celle des passifs est un premier pas mais cela ne protège pas contre des mouvements de la courbe des taux qui ne sont pas de simples translations. Une approche souvent utilisée est le *gap management*, qui consiste à découper la courbe des taux zéro-coupon en plusieurs segments et à immuniser le portefeuille segment par segment. Supposons que le i-ième segment soit l'intervalle de maturités $[t_i; t_{i+1}]$. L'institution financière qui cherche à se couvrir évalue l'impact d'une variation Δy des taux correspondant à ces maturités, les autres restant inchangés. Si l'exposition au risque est trop importante sur cette partie de la courbe, la position sera modifiée pour ramener le risque dans des limites acceptables. Heureusement, les banques ont aujourd'hui toute une gamme d'instruments financiers permettant de gérer ce type de risque. Il s'agit en particulier des swaps, des FRA, des futures sur obligations, des contrats Eurodollar, etc.

Résumé

Les deux contrats de taux les plus échangés sont les futures sur obligations d'État et les futures sur taux interbancaires Eurodollar ou Euribor. Dans un contrat sur obligations, le vendeur dispose de plusieurs options :

1. Le choix du jour de livraison quand une période de livraison est définie contractuellement.
2. Le choix de l'obligation livrable dans un ensemble de titres appelé gisement.
3. La cotation des contrats s'arrête chaque jour avant celle des obligations livrables ; quand il existe une période de livraison, le vendeur peut attendre pour savoir s'il va livrer ce jour, ou attendre le jour suivant en fonction de l'évolution du prix des titres livrables.

Toutes ces options tendent à réduire le prix futures du contrat.

Le contrat futures Eurodollar 3 mois porte sur un taux d'intérêt à 3 mois à partir de l'échéance du contrat. Les prix de ces contrats sont souvent utilisés pour estimer les taux forward LIBOR et construire la courbe zéro-coupon LIBOR. Quand des contrats

de maturité longue sont employés dans ce but, il est important d'opérer un ajustement de convexité pour tenir compte du marking to market quotidien sur les contrats.

Le concept de duration est essentiel dans la couverture du risque de taux. La duration permet à un hedger de déterminer la sensibilité du prix d'un contrat futures aux variations du taux actuariel du sous-jacent au contrat. Sous l'hypothèse de déplacements parallèles de la courbe des taux, cette information permet de calculer le nombre de contrats à acheter ou à vendre pour couvrir une position.

Toutefois, les taux courts étant en général plus volatils que les taux longs, la performance de la couverture est susceptible d'être décevante par rapport à ce qui était prévu si l'obligation sous-jacente au contrat a une maturité très différente de celle de la position à couvrir.

Références complémentaires

BURGHARDT G. et W. HOSKINS, « The Convexity Bias in Eurodollar Futures », *RISK*, 8, 3(1995), 63-70.

DUFFIE D., « Debt Management and Interest Rate Risk », *in* W. Beaver et G. Parker (éd.), *Risk Management : Challenges and Solutions*, New York, McGraw-Hill, 1994.

GRINBLATT M. et N. JEGADEESH, « The Relative Price of Eurodollars Futures and Forward Contracts », *Journal of Finance*, 51, 4 (septembre 1996), 1499-1522.

Problèmes et exercices

6.1 Une obligation d'État paie un taux de coupon de 7 % le 7 janvier et le 7 juillet de chaque année. Quel est le coupon couru entre le 7 juillet et le 9 août si le nominal est de 100 € ? Votre réponse serait-elle différente s'il s'agissait d'une obligation du secteur privé ?

6.2 Le 9 janvier 2008, une obligation d'État américaine, de taux de coupon 12 %, dont l'échéance est le 12 octobre 2011, est cotée 102-07. Quel est son prix coupon couru ?

6.3 Comment est calculé le facteur de concordance d'une obligation ? À quoi sert-il ?

6.4 La cotation d'un contrat futures Eurodollar passe de 96,76 à 96,82. Quel est le gain/perte d'un investisseur ayant une position longue sur deux contrats ?

6.5 Quel est l'objectif des ajustements de convexité sur les taux des futures Eurodollar ? Pourquoi cet ajustement est-il nécessaire ?

6.6 Le taux LIBOR à 350 jours est de 3 % en composition continue et le taux forward calculé à partir d'un contrat futures Eurodollar dont l'échéance est dans 350 jours est de 3,2 % en composition continue. Calculez le taux ZC à 440 jours.

6.7 Le 30 janvier, vous détenez un portefeuille d'obligations valant 6 millions de dollars. La duration du portefeuille sera de 8,2 ans dans six mois. Le prix futures du contrat sur obligations du Trésor, échéance septembre, cote 108-15, et l'obligation la moins chère à livrer aura en septembre une duration de 7,6 ans. Comment pouvez-vous couvrir votre portefeuille contre des variations de taux dans les six mois à venir ?

6.8 Un bon du Trésor à 90 jours est coté 10,00. Quel taux (continu) gagne un investisseur (en base Exact/365) détenant ce bon pour 90 jours ?

6.9 Le 5 mai 2008, une obligation d'État, payant un taux de coupon de 12 % et d'échéance le 27 juillet 2013, cote 110,53. Quel est son prix coupon couru ?

6.10 Supposons que le prix futures du contrat sur Treasury Bonds soit 101-12. Laquelle de ces quatre obligations est la moins chère à livrer ?

Obligation	Prix	Facteur de concordance
1	125-05	1,2131
2	142-15	1,3792
3	115-31	1,1149
4	144-02	1,4026

6.11 Le 30 juillet 2008, l'obligation la moins chère à livrer d'un contrat Treasury Bonds d'échéance septembre 2008 est une obligation de taux de coupon 13 % avec livraison le 30 septembre 2008. Les paiements de coupon ont lieu les 4 février et 4 août de chaque année. La structure des taux est plate au niveau de 12 %, en composition semestrielle. Le facteur de concordance pour l'obligation est de 1,5. Le prix actuel, au pied du coupon, de l'obligation est 110. Quel est le prix futures du contrat ?

6.12 Un opérateur cherche des opportunités d'arbitrage sur le marché du contrat futures FGBL. En quoi cette activité est-elle compliquée par la possibilité pour le vendeur de livrer n'importe quelle obligation du gisement ?

6.13 Les taux (continus) LIBOR à 6 et 9 mois sont respectivement 7,5 % et 8 % (tous les deux sont en composition continue et en base Exact/365). Quel est le prix futures d'un contrat Eurodollar 3 mois, d'échéance 6 mois ?

6.14 Supposez que le taux LIBOR à 300 jours soit de 4 % et que les contrats Eurodollar pour des maturités de 300, 398 et 489 jours cotent respectivement 95,83, 95,62 et 95,48. Calculez les taux ZC à 398 et 489 jours. Vous pouvez supposer pour ces calculs qu'il n'y a pas de différence entre taux forward et taux futures.

6.15 Un portefeuille d'obligations de duration 12 ans est couvert par un contrat futures pour lequel la duration du sous-jacent est de 4 ans. Quel peut être l'impact, sur la couverture, d'une volatilité moindre du taux 12 ans par rapport au taux 4 ans ?

6.16 Le 20 février, un trésorier sait que le 17 juillet, son entreprise va émettre 5 millions d'euros en billets de trésorerie à 180 jours. Si les billets étaient

émis aujourd'hui, l'entreprise obtiendrait 4,82 millions (en d'autres termes, elle obtiendrait cette somme et rembourserait 5 millions dans 180 jours). Le contrat Euribor cote 92,00. Comment le trésorier devrait-il se couvrir ?

6.17 Le 1er août, un gérant détient un portefeuille d'obligations valant 10 millions d'euros. En octobre, la duration de ce portefeuille sera de 5,1 années. Le contrat FGBL échéance décembre cote 112,37 et l'obligation la moins chère à livrer aura une duration de 7 ans à l'échéance du contrat. Comment le gérant devrait-il procéder pour immuniser son portefeuille dans les deux prochains mois ?

6.18 Dans le problème 6.17, comment le gérant devrait-il opérer pour ramener la duration de son portefeuille à 3 ans ?

6.19 Entre le 30 octobre 2008 et le 1er novembre 2008, vous avez la possibilité de détenir une obligation d'État payant 10 % de taux de coupon ou une obligation du secteur privé de même taux de coupon. En ignorant le risque de défaut et en vous fondant sur les conventions de décompte des jours, laquelle préféreriez-vous détenir ?

6.20 Un contrat Eurodollar arrive à maturité dans 60 jours et cote 88. Quel est le taux forward LIBOR pour la période de 3 mois débutant dans 60 jours ? Vous ignorerez la différence entre prix futures et prix forward.

6.21 Le contrat futures Eurodollar de maturité 6 ans cote 95,20. L'écart-type des variations du taux court est de 1,1 % par an. Estimez le taux forward LIBOR pour la période de 3 mois débutant dans six ans.

6.22 Expliquez pourquoi le taux forward est plus faible que le taux futures correspondant, déduit des cotations du contrat futures Eurodollar.

Questions complémentaires

6.23 Une banque peut prêter et emprunter au même taux sur le marché LIBOR. Le taux à 90 jours est de 10 % par an, le taux à 180 jours est de 10,2 %, les deux étant des taux continus en base Exact/Exact. Le contrat futures Euribor dont l'échéance est dans 91 jours est coté 89,5. Quelles sont les opportunités d'arbitrage ?

6.24 Une entreprise canadienne souhaiterait créer un contrat futures LIBOR sur le dollar canadien en utilisant les futures Eurodollar et les contrats forward sur le change. En donnant un exemple, montrez comment elle pourrait procéder. Vous supposerez que contrats futures et contrats forward sont identiques.

6.25 Le 5 juin 2008, le prix futures du contrat sur Treasury Bonds d'échéance juin 2008 est 118-23.

- **a.** Calculez le facteur de concordance d'une obligation dont l'échéance est le 1er janvier 2024, payant un coupon (semestriellement) de 10 % par an.
- **b.** Calculez le facteur de concordance d'une obligation dont l'échéance est le 1er janvier 2029, payant un coupon (semestriellement) de 7 % par an.

c. Si les obligations décrites en (a) et (b) cotent (pied de coupon) 169 et 136, quelle est la moins chère à livrer ?

d. Si l'obligation déterminée au point précédent est effectivement livrée, combien recevra le vendeur ?

6.26 Un gérant de fonds pense utiliser le contrat FGBL pour couvrir un portefeuille d'obligations qui vaut aujourd'hui 100 millions d'euros et qui aura une duration de 4 ans dans 3 mois. Le prix futures est 113 et chaque contrat porte sur 100 000 €. L'obligation la moins chère à livrer est anticipée comme un titre de duration 7 ans à l'échéance du contrat. Quelle position le gérant doit-il prendre ?

a. Comment faut-il modifier la couverture si après un mois, la moins chère à livrer devient une obligation de duration 5 ans ?

b. Supposez qu'après 3 mois, tous les taux d'intérêt aient augmenté, mais que les taux longs aient augmenté plus que les taux de court et de moyen termes. Quel est l'effet de cette évolution sur la performance de la couverture ?

Chapitre 7

Les swaps

Les premiers swaps furent négociés au début des années quatre-vingt. Depuis, ces marchés ont connu une croissance considérable. Un swap est un accord entre deux entreprises pour échanger des flux de trésorerie dans le futur. Cet accord définit les dates auxquelles ces cash-flows seront échangés et la façon dont ils seront calculés. Généralement, ils dépendent d'une ou plusieurs variables économiques comme un taux d'intérêt ou un taux de change.

Un contrat forward peut être vu comme un swap. Si, le 1er mars 2006, une entreprise prend une position longue sur un contrat forward pour acheter 100 onces d'or à 400 USD l'once dans un an, elle pourra vendre l'or dès qu'elle l'aura reçu. Le contrat forward est alors équivalent à un swap dans lequel l'entreprise s'engage à payer 40 000 USD le 1er mars 2007 et à recevoir 100 S, où S est le prix de l'once d'or à cette date.

Alors qu'un contrat forward correspond à un échange de flux à une date unique, les swaps comportent des échanges à plusieurs dates. Dans ce chapitre, nous analysons ces contrats, la façon dont ils sont construits et leur évaluation. Ce chapitre est centré sur les swaps de taux standard (ou vanille) et sur les swaps de devises. D'autres types de swaps seront décrits au chapitre 30.

7.1 Le fonctionnement des swaps de taux

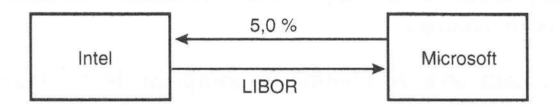
Le swap le plus courant est le swap de taux « vanille » (*plain vanilla*). Dans un tel contrat, une entreprise s'engage à payer des cash-flows égaux aux intérêts à taux fixe sur un principal donné, pendant un certain nombre d'années, et en retour, elle reçoit des intérêts à un taux variable sur le même principal pendant la même durée.

Le LIBOR

Le taux variable le plus courant dans les contrats de swap est le taux LIBOR, introduit au chapitre 4. C'est le taux offert dans différentes devises (Euribor pour l'euro) dans les échanges interbancaires pour différentes échéances de court terme (un mois, trois mois, etc.). C'est la référence pour les prêts sur les marchés financiers internationaux. Pour comprendre son utilisation, considérons une obligation à 5 ans avec un taux spécifié comme le LIBOR 6 mois plus 50 points de base. La durée de vie de cette obligation est divisée en 10 périodes de 6 mois. Au début de chaque période, le coupon (qui sera payé en fin de période) est calculé à partir du taux LIBOR 6 mois prévalant à cette date, auquel on ajoute 0,5 %.

Illustration

Considérons un swap hypothétique à 3 ans entre deux entreprises, Microsoft et Intel par exemple, initié le 5 mars 2007. Microsoft s'engage à payer un taux d'intérêt de 5 % à Intel sur un principal de 100 millions de dollars ; en retour Intel s'engage à payer des intérêts à Microsoft au taux LIBOR 6 mois. Les flux seront échangés tous les six mois et le taux fixe de 5 % est en composition semestrielle. Le diagramme du swap est représenté dans le graphique 7.1.



Graphique 7.1 : Swap de taux entre Microsoft et Intel.

Le premier échange de flux du swap interviendra le 5 septembre 2007, six mois après la conclusion du contrat. Microsoft doit payer 2,5 millions de dollars à Intel, qui représentent l'intérêt pendant la période de six mois sur le principal de 100 millions. Mais Intel doit payer à Microsoft l'intérêt au taux LIBOR 6 mois qui prévalait le 5 mars, sur le même principal. Si, par exemple, ce taux était à 4,2 %, Intel doit payer à Microsoft 2,1 millions[1]. On peut voir qu'il n'y a aucune incertitude sur ce premier échange puisque le LIBOR était observable le 5 mars.

Le deuxième échange sera réalisé le 5 mars 2008. Microsoft doit payer à nouveau 2,5 millions alors qu'Intel paie l'intérêt au LIBOR 6 mois constaté le 5 septembre 2007. Si ce taux est par exemple de 4,8 %, Intel paie 2,4 millions.

Au total il y aura six échanges de flux sur ce swap de 3 ans. Les paiements de Microsoft seront systématiquement de 2,5 millions, alors que ceux d'Intel changeront avec l'évolution du LIBOR 6 mois. Le swap est généralement conçu pour que seule la différence d'intérêts soit réglée par la partie qui doit payer le montant le plus élevé.

1. Les calculs ne sont pas précis ici car nous négligeons les règles de décompte des jours. Ce point est examiné plus loin dans ce chapitre.

Dans notre exemple, Microsoft paierait, le 5 septembre 2007, 2,5 – 2,1 = 0,4 million à Intel et 2,5 – 2,4 = 0,1 million le 5 mars 2008.

Le tableau 7.1 fournit l'ensemble des paiements du swap, du point de vue de Microsoft. On peut noter que le principal de 100 millions ne sert qu'à calculer les intérêts, il n'est pas échangé. S'il l'était à la fin de la durée de vie du swap, cela ne changerait pas les flux nets, comme le montre le tableau 7.2. Cependant, cette présentation permet de voir le swap sous un autre angle. Les cash-flows de la troisième colonne sont ceux d'une position longue sur une obligation à taux variable, alors que ceux de la quatrième colonne sont ceux d'une position courte sur une obligation à taux fixe. Le swap peut donc être appréhendé comme l'échange d'une obligation à taux fixe contre une obligation à taux variable.

Tableau 7.1 : Cash-flows de Microsoft pour un swap à 3 ans de principal 100 millions quand le taux fixe est 5 % et le taux variable est le LIBOR 6 mois

Date	LIBOR 6 mois (en %)	Flux variable	Flux fixe	Flux net
5 mars 2007	4,20			
5 septembre 2007	4,80	2,10	–2,50	–0,40
5 mars 2008	5,30	2,40	–2,50	–0,10
5 septembre 2008	5,50	2,65	–2,50	0,15
5 mars 2009	5,60	2,75	–2,50	0,25
5 septembre 2009	5,90	2,80	–2,50	0,30
5 mars 2010	6,40	2,95	–2,50	0,45

Microsoft, dont la position est décrite dans le tableau 7.2, a une position longue sur l'obligation à taux variable, et courte sur l'obligation à taux fixe. La position d'Intel est symétrique. Cette présentation du swap explique pourquoi le taux variable est défini six mois avant le paiement effectif; en effet, sur une obligation à taux variable, le taux d'intérêt est généralement déterminé en début de période et le coupon correspondant payé en fin de période.

L'utilisation des swaps pour transformer un engagement

Pour Microsoft, le swap pourrait être utilisé pour transformer une dette à taux variable en dette à taux fixe. Supposons que Microsoft ait contracté une dette de 100 millions au taux LIBOR + 10 points de base, que nous noterons LIBOR + 10 (rappelons que 1 point de base est égal à 0,01 %). Dès la mise en place du swap, trois ensembles de cash-flows interviennent :

1. Le paiement de LIBOR + 10 à ses prêteurs.
2. La réception du LIBOR sur le swap.

Tableau 7.2 : Cash-flows (en millions de dollars) du tableau 7.1 avec un échange du principal à l'échéance du swap

Date	LIBOR 6 mois (en %)	Flux variable	Flux fixe	Flux net
5 mars 2007	4,20			
5 septembre 2007	4,80	2,10	–2,50	–0,40
5 mars 2008	5,30	2,40	–2,50	–0,10
5 septembre 2008	5,50	2,65	–2,50	0,15
5 mars 2009	5,60	2,75	–2,50	0,25
5 septembre 2009	5,90	2,80	–2,50	0,30
5 mars 2010	6,40	102,95	–102,50	0,45

3. Le paiement de 5 % sur le swap.

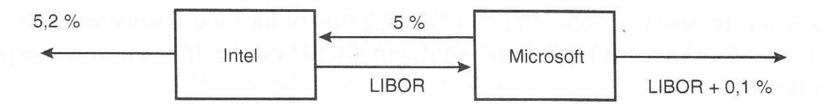
Ces trois ensembles de cash-flows sont équivalents à un emprunt à taux fixe à 5,1 %. De la même façon, pour Intel, ce swap pourrait être employé pour transformer une dette à taux fixe en dette à taux variable. Supposons qu'Intel ait contracté un emprunt au taux fixe de 5,2 % pour 100 millions. Après la mise en place du swap, trois types de cash-flows seront reçus ou payés par Intel.

1. Le paiement de 5,2 % à ses prêteurs.

2. La réception de 5 % sur le swap.

3. Le paiement du LIBOR sur le swap.

En définitive, ces cash-flows sont équivalents à un emprunt à taux variable LIBOR + 20. Pour Intel, ce swap aurait pour effet de transformer la dette initiale à taux fixe en dette à taux variable (voir graphique 7.2).



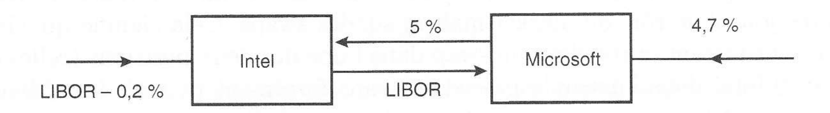
Graphique 7.2 : Transformation d'engagements de Microsoft et Intel par un swap.

Utilisation d'un swap pour transformer un actif

Comme dans la section précédente, un swap peut aussi servir, pour Microsoft, à transformer un actif rapportant un taux fixe en un actif rapportant un taux variable. Supposons que Microsoft détienne un portefeuille d'obligations de 100 millions qui paient 4,7 % de taux de coupon (coupon payé semestriellement) dans les trois prochaines années. Après la mise en place du swap, trois séries de cash-flows entrent en jeu :

1. L'encaissement de 4,7 % sur le portefeuille d'obligations.
2. La réception du LIBOR sur le swap.
3. Le paiement de 5 % sur le swap.

En fin de compte, le portefeuille d'obligations à taux fixe a été transformé en un portefeuille obligataire à taux variable rapportant LIBOR – 30. Symétriquement, si Intel possède un portefeuille d'obligations à taux variable rapportant LIBOR – 20, le swap permet de transformer ce portefeuille en portefeuille de titres à taux fixe rapportant 4,8 % (voir graphique 7.3).



Graphique 7.3 : Transformation d'actifs de Microsoft et Intel par un swap.

Le rôle d'intermédiaire

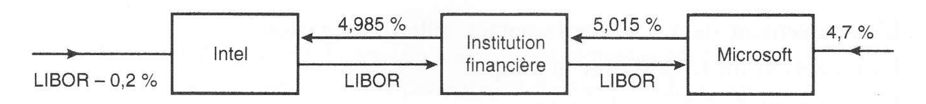
En général, deux entreprises industrielles comme Intel et Microsoft ne contractent pas directement, comme nous l'avons illustré dans les graphiques 7.2 et 7.3. Elles vont recourir à un intermédiaire financier. Les swaps vanille taux fixe contre taux variable sont généralement proposés par les institutions financières pour que leur profit d'intermédiaire soit de l'ordre de 3 ou 4 points de base sur des transactions symétriques comme celle qui a été évoquée précédemment.

Le graphique 7.4 montre le rôle de l'intermédiaire dans la situation du graphique 7.2. Le profit de l'intermédiaire vient de l'écart de taux fixe entre ce qui est payé par Microsoft (5,015 %) et ce qui est reçu par Intel (4,985 %). S'il n'y a pas défaut d'une des deux parties, l'intermédiaire s'assure un profit de 3 points de base par an, multiplié par le principal du swap. En définitive, Microsoft emprunte à 5,115 % (au lieu des 5,1 % du graphique 7.2) et Intel emprunte à LIBOR + 21,5 au lieu de LIBOR + 20.

Le graphique 7.5 illustre le rôle de l'intermédiaire dans la situation du graphique 7.3. Ici encore, le profit de l'intermédiaire est 3 points de base si les parties prenantes ne font pas défaut. Microsoft reçoit LIBOR – 31,5 au lieu de LIBOR – 30, et Intel reçoit 4,735 % au lieu de 4,75 %. Il est bon de noter que l'intermédiaire signe deux contrats séparés, l'un avec Microsoft, l'autre avec Intel, sans que les deux firmes soient même informées qu'il existe une contrepartie autre que l'intermédiaire. Si l'une des deux entreprises fait défaut, l'intermédiaire doit faire face à ses engagements vis-à-vis de l'autre. Les 3 points de base représentent aussi une rémunération pour ce risque.



Graphique 7.4 : Swap du graphique 7.2 avec un intermédiaire financier.



Graphique 7.5 : Swap du graphique 7.3 avec un intermédiaire financier.

Les market-makers

Dans la pratique, il est improbable que deux entreprises aient besoin au même moment de deux positions parfaitement symétriques. De ce fait, certaines institutions financières jouent le rôle de market-makers sur les swaps. Cela signifie qu'elles sont prêtes, à tout instant, à conclure un swap dans l'une des deux positions (celles de Microsoft et d'Intel dans l'exemple précédent) sans forcément pouvoir immédiatement dénouer la position prise avec une autre contrepartie[2]. Il est alors essentiel pour ces institutions de quantifier précisément et de couvrir le risque encouru. Les obligations, les FRA et les futures de taux sont les instruments privilégiés de cette couverture.

Les institutions financières qui jouent le rôle de market-makers sur les swaps affichent dans différentes devises et pour différentes maturités des taux (offerts et demandés) auxquels elles sont prêtes à conclure un swap. Le taux demandé (bid) est le taux auquel le market-maker accepte de payer le taux fixe et de recevoir le taux variable. Réciproquement, le taux offert est celui auquel il accepte de conclure un swap dans lequel il reçoit le taux fixe et paie le taux variable. Le tableau 7.3 donne un exemple de ce type de cotations[3]. Le spread pour chaque maturité est de l'ordre de 3 ou 4 points de base. Le milieu de fourchette est appelé taux de swap. Il apparaît dans la dernière colonne du tableau.

Tableau 7.3 : Taux offerts et demandés pour un swap

Maturité (en années)	Demandé (%)	Offert (%)	Taux de swap
2	6,03	6,06	6,045
3	6,21	6,24	6,225
4	6,35	6,39	6,370
5	6,47	6,51	6,490
7	6,65	6,68	6,665
10	6,83	6,87	6,850

Considérons un swap dont le taux fixe est le taux de swap. On peut raisonnablement supposer que la valeur du swap est nulle au moment où il est conclu (on ne voit pas

2. On les appelle parfois *warehousing swaps*.

3. Aux Etats-Unis, un swap classique suppose que les paiements à taux fixe sont réalisés tous les six mois et échangés contre des paiements variables effectués tous les trois mois. Dans le tableau 7.1, cette distinction a été négligée.

pour quelle autre raison le market-maker afficherait ces taux !). Dans le tableau 7.2 nous avons vu qu'un swap peut être caractérisé par la différence entre une obligation à taux fixe et une obligation à taux variable.

Notons :

B_{fix} : la valeur de l'obligation à taux fixe sous-jacente au swap

B_{var} : la valeur de l'obligation à taux variable sous-jacente au swap

Comme la valeur du swap est nulle au moment où il est conclu, on a :

$$B_{var} = B_{fix} \tag{7.1}$$

Ce résultat sera utilisé ultérieurement pour déterminer la courbe des taux ZC à partir des swaps.

7.2 Les conventions de décompte des jours

La façon de décompter les jours (déjà abordée à la section 6.1) influence les paiements d'un swap. L'exemple donné précédemment négligeait ce point précis.

Considérons à nouveau les taux LIBOR 6 mois du tableau 7.1 ; ces taux sont le plus souvent en base Exact/360. Le premier paiement du swap, calculé avec un LIBOR à 4,2 %, était de 2,1 millions. Ce calcul, fondé sur 0,5 an, n'était pas tout à fait exact car il y a 184 jours entre le 5 mars 2005 et le 5 septembre de la même année. Le paiement serait en réalité de :

$$100 \times 0{,}042 \times \frac{184}{360} = 2{,}1467 \text{ millions}$$

En général, le flux de la jambe variable (nom donné à la série de cash-flows à taux variable) d'un swap, fondé sur le LIBOR, est calculé comme $\frac{L \times R \times n}{360}$, où L est le principal, R est le taux LIBOR pertinent, et n est le nombre de jours depuis le paiement précédent (ou depuis la date de départ du swap s'il s'agit du premier paiement).

De la même façon, les paiements de la jambe fixe sont calculés avec une convention qui peut les faire varier au cours du temps en fonction du nombre de jours entre deux paiements successifs (tous les semestres n'ont pas le même nombre de jours). Pour le taux fixe, la base Exact/365 est la plus courante. On remarque alors que, si cette base est utilisée, les deux taux ne sont pas directement comparables ; le taux LIBOR doit être multiplié par 365/360 pour être comparé au taux fixe, ou le taux fixe doit être multiplié par 360/365 pour être comparé au taux variable. Pour des raisons pédagogiques, nous ferons abstraction de ce point dans les exemples de ce chapitre.

7.3 La confirmation

Il s'agit du document, ayant valeur légale, qui spécifie les termes du contrat et qui est signé par les deux parties. L'encadré 7.1 récapitule les points essentiels de ce document, pour le swap hypothétique du début de ce chapitre.

Le premier groupe d'informations spécifie la convention utilisée si une date de paiement est un jour férié ou un week-end. Dans ce cas, le paiement est réalisé le premier jour ouvré qui suit la date de paiement prévue. Les jours fériés, entrant dans l'application de la convention jours ouvrés, sont ceux du calendrier US dans cet exemple[4].

Encadré 7.1 Extrait d'une confirmation pour un swap entre Microsoft et Intel

Date de transaction	27 février 2007
Date de départ	5 mars 2007
Convention jours ouvrés	Suivant
Calendrier jours ouvrés	US
Date de fin	5 mars 2010
Paiements fixes	
Payeur du taux fixe	Microsoft
Principal du fixe	100 millions USD
Taux fixe	5 %
Décompte des jours	Exact/365
Dates de paiement	5 mars et 5 septembre de chaque année commençant le 5 septembre 2007 jusqu'au 5 mars 2010 inclus
Paiements variables	
Payeur du taux variable	Intel
Principal du variable	100 millions USD
Taux variable	LIBOR 6 mois sur USD
Décompte des jours	Exact/360
Dates de paiement	5 mars et 5 septembre de chaque année commençant le 5 septembre 2007 jusqu'au 5 mars 2010 inclus

4. Il existe aussi une convention appelée « jour suivant modifié ». Elle stipule que si le jour ouvré suivant n'appartient pas au même mois, le paiement sera effectué le jour précédant la date de paiement convenue.

7.4 L'avantage comparatif

La popularité des swaps est souvent justifiée par l'argument de l'avantage comparatif. Pour un couple d'entreprises donné, la facilité relative d'accès aux marchés des emprunts à taux fixe et à taux variable n'est pas la même. Chaque entreprise aura donc intérêt à emprunter sur le marché qui lui est le plus favorable, quitte ensuite à faire un swap avec l'autre si le type d'endettement contracté (fixe ou variable) ne lui convient pas.

Illustration

Deux entreprises, Acorp et Bcorp, souhaitent emprunter 10 millions d'euros pour 5 ans. Les taux qu'elles se voient proposer pour cet emprunt sont reportés dans le tableau 7.4.

Tableau 7.4 : Taux d'emprunt d'Acorp et Bcorp

	Fixe	**Variable**
Acorp	4,0 %	LIBOR + 30
Bcorp	5,2 %	LIBOR + 100

Acorp a un rating AAA, alors que Bcorp est notée BBB[5]. Cette dernière souhaite emprunter à taux fixe alors que Acorp préférerait un emprunt à taux variable, fondé sur le LIBOR 6 mois. Bien sûr, les conditions d'emprunt sont plus défavorables sur les deux marchés pour Bcorp, puisque cette entreprise a un rating plus faible.

L'élément clé qui conduit à l'utilisation d'un swap est le fait que la différence entre les taux auxquels les deux entreprises peuvent emprunter n'est pas la même sur les deux marchés. Elle vaut 1,2 % sur le taux fixe mais seulement 0,7 % sur le taux variable. Bcorp a de ce fait un avantage comparatif sur le taux variable[6], et Acorp un avantage sur le marché à taux fixe. Acorp va donc emprunter au taux fixe de 4 %, Bcorp au taux variable LIBOR + 100, et les deux sociétés vont conclure le swap décrit dans le graphique 7.6, très semblable à celui du graphique 7.2. Acorp paiera le LIBOR 6 mois sur un principal de 10 millions, et Bcorp paiera un taux fixe de 3,95 % sur le même principal. Acorp a donc trois types de cash-flows :

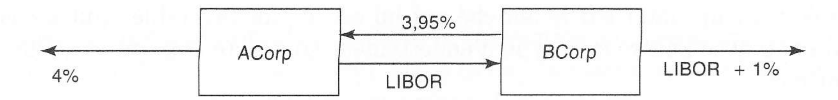
1. Paiement de 4 % au prêteur.
2. Réception de 3,95 % dans le cadre du swap.

5. Les notes attribuées par l'agence S&P (dans l'ordre décroissant de qualité) sont AAA, AA, A, BBB, BB, B et CCC. Les notes correspondantes pour Moody's sont Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B et Caa.

6. Ce qui ne signifie pas, comme on peut le voir dans le tableau 7.5, que son taux d'emprunt est plus faible que celui d'Acorp sur ce marché. On pourrait aussi dire que Bcorp est moins pénalisée sur le marché à taux variable que sur le marché à taux fixe.

3. Paiement du LIBOR dans le cadre du swap.

En définitive, le résultat de ces opérations revient à emprunter à LIBOR + 5, soit 25 points de base de moins que le taux proposé initialement.



Graphique 7.6 : Swap entre Acorp et Bcorp sur la base des taux du tableau 7.5.

Les cash-flows reçus ou payés par Bcorp sont les suivants :

1. Paiement de LIBOR + 100 au prêteur.

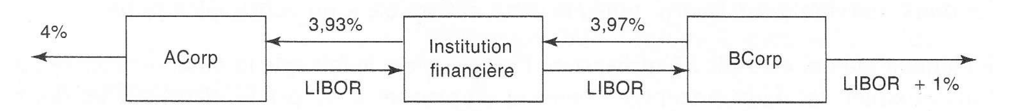
2. Réception de LIBOR dans le cadre du swap.

3. Paiement de 3,95 % dans le cadre du swap.

Globalement, c'est comme si Bcorp avait emprunté à un taux fixe de 4,95 %, soit 25 points de base de moins que le taux fixe initial. Par le swap, chaque entreprise a gagné 25 points de base. Le gain total est de 0,5 %, différence entre les spreads sur les deux marchés.

$$0{,}5\ \% = (5{,}2\ \% - 4\ \%) - ((\text{LIBOR} + 100) - (\text{LIBOR} + 30))$$

Si les deux entreprises avaient eu recours à un intermédiaire financier, le résultat aurait pu être celui du graphique 7.7. Dans ce cas, Acorp emprunte à LIBOR + 7, Bcorp à 3,97 %. Chaque entreprise gagne 23 points de base et l'intermédiaire 4 points, ce qui donne toujours un total de 50 points de base.



Graphique 7.7 : Swap entre Acorp et Bcorp sur la base des taux du tableau 7.5 avec un intermédiaire.

Critique de l'argument de l'avantage comparatif

La question est de savoir pourquoi, dans le tableau 7.4, le spread de taux fixe (1,2 %) est supérieur au spread de taux variable (0,7 %). Alors que le marché des swaps existe depuis longtemps, on peut s'étonner que de telles différences existent encore.

Une des explications concerne la nature des contrats sur chacun des deux marchés. Sur le marché à taux fixe, comme son nom l'indique, le taux est fixé pour toute la durée de l'emprunt. Ce taux est modifié tous les six mois sur le marché à taux variable. Si la note de l'emprunteur vient à se dégrader, le prêteur a la possibilité de modifier l'écart de taux par rapport au LIBOR (qui est au départ de 0,3 % pour

Acorp et 1 % pour Bcorp[7]). Les spreads de taux entre les deux sociétés reflètent la différence de qualité entre les deux emprunteurs, résumée par les ratings. Dans les six mois, la probabilité de défaut est minime pour chacune des deux entreprises. À plus long terme, la probabilité de défaut augmente plus rapidement pour Bcorp que pour Acorp, ce qui peut expliquer pourquoi l'écart de taux est plus faible pour les taux variables.

Après négociation du swap, il apparaît que Bcorp emprunte à 4,97 % sur cinq ans. Ce n'est pas tout à fait vrai si la notation se dégrade, car le spread par rapport au LIBOR peut augmenter. S'il passe par exemple à 2 %, le taux fixe de Bcorp devient 5,97 %. De fait, le coût espéré de l'emprunt est supérieur à 4,97 %.

Le swap du graphique 7.7 fixe le taux d'emprunt d'Acorp à LIBOR + 7, ce qui est avantageux par rapport au LIBOR + 30 initial. L'inconvénient est que l'entreprise supporte le risque de défaut de l'intermédiaire, ce qui n'aurait pas été le cas si elle avait emprunté directement à taux variable.

7.5 La nature des taux de swap

La courbe ZC LIBOR est aussi appelée courbe des taux swap ou courbe swap. Les taux LIBOR de maturité inférieure à un an sont les taux d'emprunt sur le marché interbancaire. Il est tentant de supposer que les taux ZC pour des maturités plus longues sont aussi les taux d'emprunt de ce même marché. Ce n'est pas tout à fait exact.

Supposons en effet que le taux de swap 5 ans soit 5 % et qu'une banque puisse emprunter pour 6 mois au LIBOR. Elle peut conclure un swap pour échanger le LIBOR contre un taux fixe de 5 %, ce qui revient à assurer un taux fixe d'emprunt de 5 %. Comme nous l'avons mentionné précédemment, ce taux s'applique seulement si la banque peut continuer à emprunter au LIBOR. Il existe en fait un risque qualifié de risque de *roll-over*. Il n'est pas certain qu'elle puisse faire glisser sa position de six mois en six mois aux mêmes conditions. Si le taux d'emprunt à 6 mois vient à augmenter, le taux fixe de 5 % s'élèvera. La courbe ZC LIBOR peut être interprétée comme une courbe définissant les taux d'emprunt seulement si l'on suppose que le risque de roll-over est nul.

7.6 Les taux zéro-coupon déduits des swaps

Nous avons expliqué à la section 4.1 que les traders utilisent les taux LIBOR comme taux sans risque quand ils évaluent des actifs dérivés. Un des problèmes associés à cette pratique est que ces taux concernent des maturités inférieures à 12 mois. Comme nous l'avons vu à la section 6.4, on peut étendre la courbe LIBOR à des maturités

7. Lorsque cet écart est fixé irrévocablement dès le départ, l'avantage comparatif est nul ou très marginal.

plus longues en utilisant les contrats futures Eurodollar. Pour prolonger cette courbe à des maturités encore plus éloignées, on utilise les taux de swap. On parle alors de *courbe LIBOR* ou de *courbe swap*. Pour éviter les confusions, nous emploierons souvent l'expression *courbe LIBOR/swap*.

On peut d'abord noter qu'une nouvelle émission à taux variable indexée sur le LIBOR 6 mois cote à sa valeur faciale quand la courbe LIBOR/swap est utilisée pour l'actualisation des flux de cette obligation[8]. C'est simplement lié au fait que le coupon payé par l'obligation est calculé avec le taux qui sert à actualiser.

Dans l'équation (7.1), nous avons vu que $B_{var} = B_{fi}$ pour un swap qui vient d'être émis avec un taux fixe égal au taux de swap. Mais B_{var} est alors égal au principal notionnel du swap. Il en est de même pour B_{fix}. Les taux de swap définissent ainsi un ensemble de taux actuariels au pair. Par exemple, dans le tableau 7.3, on peut déduire que le taux LIBOR/swap à 2 ans est de 6,045 %, le taux correspondant à 3 ans est de 6,225 %, et ainsi de suite.

La méthode la plus courante pour déterminer la courbe LIBOR/swap est la technique du bootstrap, que nous avons déjà utilisée pour calculer la courbe ZC des obligations d'État à la section 4.5.

Exemple 7.1

Supposons que les taux ZC LIBOR jusqu'à 18 mois de maturité aient déjà été calculés (les taux continus à 6, 12 et 18 mois sont supposés égaux à 4 %, 4,5 %, 4,8 %). Le taux de swap à 2 ans avec paiements semestriels est supposé égal à 5 % par an. Ce taux signifie qu'une obligation à 2 ans payant 5 % de taux de coupon et de nominal 100 € cote 100 €.

Le taux ZC à 2 ans, noté R, est alors solution de l'équation :

$$2{,}5 \times (e^{-0{,}04\times 0{,}5} + e^{-0{,}045\times 1} + e^{-0{,}048\times 1{,}5}) + 102{,}50 \times e^{-R\times 2} = 100$$

Nous obtenons ainsi $R = 4{,}953$ %. Ce calcul est simplifié car nous ne tenons pas compte ici des conventions de décompte des jours (voir section 7.2).

7.7 L'évaluation des swaps

Au moment où un swap est conclu, sa valeur est nulle, mais par la suite, cette valeur peut devenir négative ou positive. L'évaluation d'un swap peut être assimilée, comme nous l'avons vu, soit à celle d'un portefeuille d'obligations, soit à celle d'un portefeuille de FRA.

8. Le même résultat est vérifié si l'obligation est indexée sur le LIBOR 1 mois, 3 mois ou 12 mois.

Le swap comme portefeuille d'obligations

En présentant un swap avec l'échange du principal (voir tableau 7.2), nous savons que la valeur d'un swap peut s'écrire :

$$V = B_{var} - B_{fix}$$

quand le taux variable est reçu et le taux fixe est payé. Nous avons employé cette équation pour montrer que B_{fix} est égal au principal du swap au départ du contrat. Nous allons à nouveau recourir à cette équation pour évaluer le swap à une date quelconque. Notons :

t_i : la durée jusqu'au i-ième paiement (n paiements au total)

L : le principal du swap

r_i : le taux ZC LIBOR pour la maturité t_i

k : le paiement de la jambe fixe à chaque date

Ces notations permettent d'écrire B_{fix} ainsi :

$$B_{fix} = \sum_{i=1}^{n} ke^{-r_i t_i} + Le^{-r_n t_n}$$

Après chaque date de paiement, l'obligation à taux variable peut être considérée comme une nouvelle obligation avec une maturité moins longue. Le raisonnement appliqué précédemment permet donc de dire que, juste après une date de paiement, le prix de l'obligation à taux variable est égal au principal du swap. Juste avant une date de paiement, le prix de cette obligation est par conséquent $L + k^*$, où k^* est le paiement qui va être effectué sur la jambe variable du swap (il est déjà connu à ce moment-là). Avec les notations définies plus haut, t_1 est le délai jusqu'au prochain paiement, et l'on peut donc écrire :

$$B_{var} = (L + k^*)\, e^{-r_1 t_1}$$

- **Exemple 7.2**

Considérons une institution financière qui paie le LIBOR 6 mois et reçoit un taux fixe de 8 % (en composition semestrielle) sur un swap de principal 100 millions d'euros. Les dates de paiement restantes se situent dans 3, 9 et 15 mois. Les taux ZC LIBOR continus pour ces trois maturités sont respectivement 10 %, 10,5 % et 11 %. Lors du dernier paiement, le LIBOR 6 mois était de 10,2 % (en composition semestrielle). Dans ce cas, $k^* = 5{,}1$ millions, $k = 4$ millions et l'on déduit :

$$B_{fix} = 4 \times e^{-0{,}1 \times \frac{3}{12}} + 4 \times e^{-0{,}105 \times \frac{9}{12}} + 104 \times e^{-0{,}11 \times \frac{15}{12}} = 98{,}24 \text{ millions}$$

$$B_{var} = 5{,}1 \times e^{-0{,}1 \times \frac{3}{12}} + 100 \times e^{-0{,}1 \times \frac{3}{12}} = 102{,}51 \text{ millions}$$

La valeur du swap est donc :

$$98{,}24 - 102{,}51 = -4{,}27 \text{ millions}$$

Si la banque avait été dans la position symétrique recevant le variable et payant le fixe, la valeur du swap aurait été 4,27 millions. Le détail des calculs apparaît dans le tableau 7.5.

Comme nous l'avons déjà mentionné, un calcul plus précis supposerait de tenir compte des conventions en matière de décompte des jours.

Tableau 7.5 : Évaluation d'un swap comme portefeuille d'obligations (en millions de dollars)

Date	Cash Flow B_{fix}	Cash Flow B_{fl}	Facteur d'actualisation	Valeur actuelle pour B_{fix}	Valeur actuelle pour B_{fl}
0,25	4,0	105,100	0,9753	3,901	102,505
0,75	4,0		0,9243	3,697	
1,25	104,0		0,8715	90,640	
Total				98,238	102,505

Valorisation en termes de FRA

Les FRA ont été introduits au chapitre 4. Ce sont des accords pour l'application d'un taux d'intérêt défini, à un principal donné, pour une période future spécifiée. Nous avons montré qu'un FRA peut être vu comme un accord d'échange entre un taux déterminé et un taux de marché pour la période définie par le contrat. Cela montre qu'un swap n'est rien d'autre qu'un portefeuille de FRA. Le swap entre Intel et Microsoft, décrit dans le graphique 7.1, engage chacune des deux parties dans une série de six cash-flows. Considérons la position de Microsoft ; le premier échange de flux est connu à la date de négociation du swap et les cinq autres peuvent être analysés comme des FRA. Par exemple, l'opération du 5 mars 2008 est un FRA échangeant un taux fixe de 5 % contre le LIBOR 6 mois observé le 5 septembre 2007. Les autres échanges s'interprètent de la même façon.

Comme nous l'avons vu à la section 4.7, un FRA peut être évalué en supposant que les taux forward seront effectivement les taux spot futurs. On procède alors de la façon suivante :

1. Pour chaque taux LIBOR déterminant les cash-flows du swap, on calcule le taux forward correspondant.
2. On évalue chaque cash-flow en supposant que le taux LIBOR futur sera le taux forward observé aujourd'hui.
3. La valeur du swap est la somme de ces cash-flows actualisés avec la courbe LIBOR/swap.

■ **Exemple 7.3**

Considérons le swap de l'exemple 7.2. Les cash-flows qui seront échangés dans trois mois sont déjà connus. Un taux de 8 % sera échangé contre un taux de 10,2 %. La valeur de cet échange est donc :

$$0{,}5 \times 100 \times (0{,}08 - 0{,}102)\, e^{-0{,}1\times \frac{3}{12}} = -1{,}07$$

Pour calculer la valeur de l'échange dans neuf mois, il faut tout d'abord déterminer le taux forward correspondant à la période 3 mois9 mois, vu d'aujourd'hui. En utilisant l'équation (4.5), on obtient :

$$\frac{0{,}105 \times 0{,}75 - 0{,}10 \times 0{,}25}{0{,}5} = 0{,}1075$$

soit 10,75 % en continu. L'équation (4.4) donne un taux semestriel équivalent de 11,044 %. La valeur du FRA correspondant à l'échange de flux dans neuf mois est donc :

$$0{,}5 \times 100 \times (0{,}08 - 0{,}11044)\, e^{-0{,}105\times \frac{9}{12}} = -1{,}41$$

La même démarche appliquée à l'échange dans quinze mois donne un taux forward continu de 11,75 %, soit 12,102 % semestriels. La valeur du FRA correspondant est donc :

$$0{,}5 \times 100 \times (0{,}08 - 0{,}12102)\, e^{-0{,}11\times \frac{15}{12}} = -1{,}79$$

La valeur du swap est donc :

$$-1{,}07 - 1{,}41 - 1{,}79 = -4{,}27\text{millions}$$

qui, bien sûr, est identique à celle qui a été trouvée dans la section précédente. Les calculs sont résumés dans le tableau 7.6.

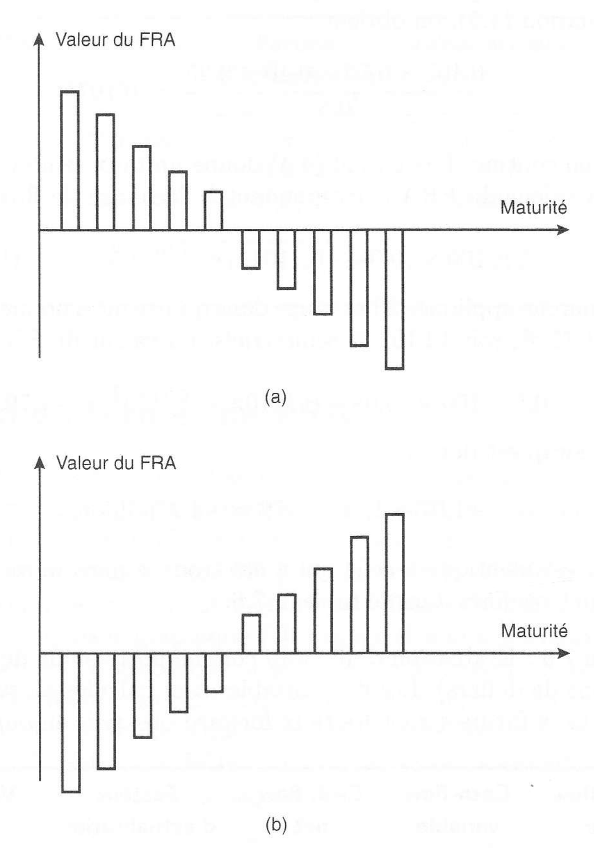
Tableau 7.6 : Evaluation d'un swap comme portefeuille de FRA (en millions de dollars). Les flux variables sont calculés en supposant que les taux futurs seront les taux forward observés aujourd'hui.

Date	Cash-flow fixe	Cash-flow variable	Cash-flow net	Facteur d'actualisation	Valeur actuelle nette
0,25	4,0	–5,100	–1,100	0,9753	–1,073
0,75	4,0	–5,522	–1,522	0,9243	–1,407
1,25	4,0	–6,051	–2,051	0,8715	–1,787
Total					–4,267

Précisons que, si la valeur d'un swap est nulle à la date de départ, les valeurs des FRA qui le composent ne le sont pas. C'est la somme de ces valeurs qui s'annule. Certains FRA auront donc une valeur positive et d'autres une valeur négative. Pour le swap du graphique 7.4 entre Microsoft et Intel, la valeur de chaque FRA est négative si le taux

forward correspondant est supérieur à 5,015 %, et positive si ce taux est inférieur à 5,015 %.

Considérons une structure par termes des taux ZC croissante au moment où le swap est conclu. Les taux forward sont donc aussi croissants avec l'éloignement dans le temps. Comme la somme de la valeur des FRA est nulle, le taux forward doit être inférieur à 5,015 % pour les maturités proches, et supérieur à cette valeur pour les maturités éloignées. Si la structure par termes est décroissante, la relation est inversée. Le graphique 7.8 résume ces deux situations.



Graphique 7.8 : Valeur des FRA composant le swap en fonction de la maturité. Dans (a), la structure par termes est croissante et le taux fixe est reçu, ou la structure par termes est décroissante et le taux variable est reçu. Dans (b), la structure par termes est croissante et le taux variable est reçu, ou la structure par termes est décroissante et le taux fixe est reçu.

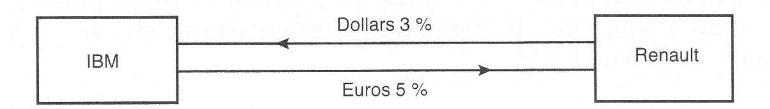
7.8 Les swaps de devises

Sous sa forme la plus simple, un swap de devises implique l'échange d'un principal et d'intérêts dans une devise contre un principal et des intérêts dans une autre. Un

swap de devises nécessite de spécifier le principal dans chacune des deux devises. Ces sommes sont échangées au début et à la fin de la durée de vie du swap. En général, ces montants sont choisis de façon à être équivalents au début du contrat.

Illustration

Considérons un swap de devises hypothétique à 5 ans entre IBM et Renault, débutant le 1er février 2008. IBM paie un intérêt de 5 % par an en euros à Renault et reçoit 3 % en dollars de Renault. Les principaux sont respectivement égaux à 20 millions de dollars et 20 millions d'euros. Les intérêts sont payés une fois par an. Ce swap est décrit dans le graphique 7.9.



Graphique 7.9 : Swap de devises.

À la date initiale, les principaux s'échangent dans le sens inverse des flèches apparaissant sur le graphique. Par contre, les intérêts pendant la durée de vie du swap et l'échange final de principal vont dans le sens des flèches. Par conséquent, au démarrage, IBM paie 20 millions de dollars à Renault et Renault paie 20 millions d'euros à IBM. Chaque année, IBM reçoit 0,6 million de dollars (3 % de 20 millions) et paie 1 million d'euros (5 % de 20 millions). À la fin du swap, IBM paie un principal de 20 millions d'euros et reçoit 20 millions de dollars. Ces cash-flows sont résumés dans le tableau 7.7.

Tableau 7.7 : Flux du swap de devises pour IBM

Dates	Flux en dollars (millions)	Flux en euros (millions)
1er février 2008	–20,0	20,0
1er février 2009	0,6	–1,0
1er février 2010	0,6	–1,0
1er février 2011	0,6	–1,0
1er février 2012	0,6	–1,0
1er février 2013	20,6	–21,0

Utilisation d'un swap de devises pour transformer actifs et emprunts

Un swap comme celui que nous venons de décrire peut être utilisé pour transformer un emprunt dans une devise en un emprunt dans une autre devise. Supposons qu'IBM puisse émettre 20 millions d'obligations en dollars au taux de 3 %. Le swap a pour effet de transformer cet emprunt en un emprunt de 20 millions en euros au taux de 5 %. L'échange initial a pour résultat de convertir les 20 millions de dollars de l'emprunt en 20 millions d'euros. Les échanges suivants correspondent au paiement des intérêts et au remboursement du principal en euros.

Un swap peut aussi être utilisé pour transformer la nature des actifs. Supposons qu'IBM puisse investir 20 millions d'euros en France à 5 % par an pour les cinq prochaines années mais pense que le dollar va se renforcer contre l'euro pendant ce temps. Le swap a pour effet de transformer l'investissement en euros à 5 % en un investissement en dollars à 3 %.

L'avantage comparatif

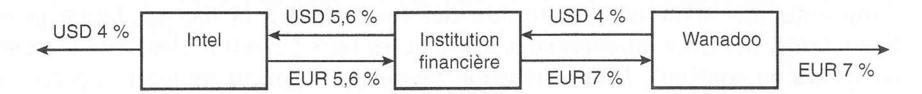
Les swaps de devises peuvent, comme les swaps de taux, être motivés par un argument d'avantage comparatif. Pour illustrer ce point, considérons un autre exemple hypothétique. Les coûts d'emprunt à taux fixe pour cinq ans en euros et en dollars pour Intel et Orange sont donnés dans le tableau 7.8. Ces données suggèrent que les taux euro sont plus élevés que les taux US. De même, Intel peut emprunter à des taux moins élevés dans les deux devises. Le point intéressant du tableau 7.8 est que le spread entre les deux entreprises n'est pas le même sur l'euro et sur le dollar. Orange paie 2 % de plus en dollars, mais seulement 1 % de plus en euros.

Tableau 7.8 : Taux d'emprunt permettant un swap

	USD	EUR
Intel	4 %	6 %
Orange	6 %	7 %

Cette situation est analogue à celle du tableau 7.4. Orange a un avantage comparatif pour les emprunts en euros et Intel pour les emprunts en dollars. Supposons donc qu'Intel souhaite emprunter 20 millions d'euros et Orange 20 millions de dollars et que le taux de change soit de 1 € pour 1 USD. En fait, chacune des deux entreprises va emprunter sur le marché sur lequel elle a un avantage comparatif, et les deux vont conclure un swap qui transformera l'emprunt d'Intel en un emprunt en euros et celui d'Orange en un emprunt en dollars. Par analogie avec les swaps de taux des sections précédentes, on s'attend à ce que le gain total du swap soit de 1 %, qui est la différence entre les spreads sur les deux marchés.

Le graphique 7.10 illustre une façon d'organiser le swap avec une institution financière comme intermédiaire. Intel emprunte des dollars et Orange des euros. L'effet du swap est de transformer la dette en dollars à 4 % d'Intel en une dette en euros à 5,6 %, et la dette d'Orange en euros à 7 % en une dette en dollars à 5,6 %.



Graphique 7.10 : Swap dont l'origine est l'avantage comparatif.

Le résultat de ce swap est qu'Intel a gagné 40 points de base par rapport à un emprunt direct en euros, Orange a gagné 40 points de base par rapport à un emprunt direct en dollars, et l'institution financière perd 1,4 % sur l'euro mais gagne 1,6 % sur le dollar. En négligeant ici la différence entre les deux devises, le profit est de 20 points de base. Le total des gains pour l'ensemble des parties est, comme on pouvait s'y attendre, de 1 %, différence des spreads entre les deux entreprises sur les deux devises.

Chaque année, l'institution financière gagne 320 000 USD (1,6 % × 20 millions) et perd 280 000 € (1,4 % × 20 millions). Elle peut cependant éviter le risque de change en achetant à terme les 280 000 € pour chaque année de la vie du swap, de façon à fixer son profit en dollars.

7.9 L'évaluation des swaps de devises

Comme les swaps de taux, les swaps de devises peuvent être évalués sous la forme de portefeuilles d'obligations ou en considérant qu'il s'agit d'un portefeuille de contrats forward.

L'évaluation comme portefeuille d'obligations

En l'absence de risque de défaut, un swap de devises peut être traité comme un portefeuille d'obligations, comme dans les swaps de taux. Considérons la position d'IBM dans le tableau 7.7 quelque temps après l'échange initial du principal. IBM possède une obligation en dollars rapportant 3 % et a une position de vente à découvert sur une obligation en euros dont le taux de coupon est 5 %. Notons V_{swap} la valeur en dollars du swap si la devise étrangère est payée et la devise domestique reçue (USD pour IBM). On peut alors écrire :

$$V_{swap} = B_D - S_0 B_F$$

où B_F est la valeur, en devise étrangère, de l'obligation libellée en devise étrangère sous-jacente au swap, et B_D est la valeur en dollars de l'obligation domestique correspondante. S_0 est le taux de change spot (en nombre d'unités monétaires domestiques

par unité monétaire étrangère). En utilisant les taux LIBOR de chacune des deux devises, on peut évaluer les obligations et donc le swap. La valeur du swap est l'opposé de la précédente si la devise étrangère est reçue et la devise domestique payée.

■ **Exemple 7.4**

Supposons une structure par termes des taux plate à la fois au Japon et aux États-Unis. Les taux japonais sont à 4 % et les taux US à 9 % (les deux taux sont composés en continu). Une institution financière a conclu un swap à paiements annuels par lequel elle reçoit 5 % en yens et paie 8 % en dollars. Les principaux sont de 10 millions de dollars et de 1,2 milliard de yens. Le swap a encore une durée de vie de trois ans et le taux de change actuel est de 110 JPY pour 1 USD. Dans ce cas,

$$B_D = 0{,}8 \times e^{-0{,}09\times 1} + 0{,}8 \times e^{-0{,}09\times 2} + 10{,}8 \times e^{-0{,}09\times 3} = 9{,}644 \text{ millions d'USD}$$

$$B_F = 60 \times e^{-0{,}04\times 1} + 60 \times e^{-0{,}04\times 2} + 1260 \times e^{-0{,}04\times 3} = 1230{,}55 \text{ millions de JPY}$$

La valeur du swap est donc :

$$\frac{1230{,}55}{110} - 9{,}6439 = 1{,}5430 \text{ million d'USD}$$

La décomposition en contrats forward

Une alternative pour évaluer un swap de devises consiste à le décomposer en une série de contrats forward. Si l'on reste sur l'exemple du tableau 7.7, IBM a accepté de recevoir 0,6 million de dollars en échange du paiement de 1 million d'euros. De plus, à la fin du contrat, IBM a accepté de recevoir 20 millions de dollars et de payer 20 millions d'euros. Chacun de ces échanges est un contrat forward. À la section 5.7, nous avons vu que ces contrats forward peuvent être évalués en supposant que le prix forward aujourd'hui sera le prix spot à l'échéance. Cette démarche fournit un moyen simple d'évaluer les contrats forward et donc le swap.

■ **Exemple 7.5**

Considérons à nouveau l'exemple 7.4. Le taux de change est de 110 JPY pour 1 USD, ou encore 0,009091 USD pour 1 JPY. Comme la différence entre les taux d'intérêt est, dans cet exemple, de 5 %, l'équation (5.9) nous donne le prix forward du dollar à 1, 2 et 3 ans :

$$0{,}009091 \times e^{0{,}05\times 1} = 0{,}009557$$
$$0{,}009091 \times e^{0{,}05\times 2} = 0{,}010047$$
$$0{,}009091 \times e^{0{,}05\times 3} = 0{,}010562$$

L'échange des intérêts suppose la réception de 60 millions de JPY et le paiement de 0,8 million d'USD. Le taux sans risque est de 9 % par an en dollars. Par l'équation (5.4), nous déduisons la valeur des trois contrats forward sous la forme :

$$(60 \times 0{,}009091 - 0{,}8) \times e^{-0{,}09\times 1} = -0{,}2071$$
$$(60 \times 0{,}010047 - 0{,}8) \times e^{-0{,}09\times 2} = -0{,}1647$$
$$(60 \times 0{,}010562 - 0{,}8) \times e^{-0{,}09\times 3} = -0{,}1269$$

L'échange final du principal consiste à recevoir 1 200 millions de JPY contre le paiement de 10 millions d'USD. La valeur de ce contrat forward est, selon l'équation (5.4) :

$$(1200 \times 0{,}010562 - 10) \times e^{-0{,}09\times 3} = 2{,}0416$$

La valeur du swap est donc –0,2071 – 0,1647 – 0,1269 + 2,0416 = 1,543 million d'USD, c'est-à-dire le résultat déjà trouvé dans l'exemple précédent.

La valeur d'un swap de devises est normalement nulle au moment où le contrat est conclu. Si les deux principaux sont strictement équivalents à la date de départ, la valeur du swap est nulle tout de suite après cette date à laquelle a lieu le premier échange de principal. Cependant, comme dans le cas des swaps de taux, cela ne signifie pas que chacun des contrats forward qui composent le swap a une valeur nulle. On peut montrer que, quand les taux sur les deux devises sont très différents, le payeur de la devise à taux plus faible est dans une position dans laquelle les contrats forward de courte maturité ont une valeur positive et ceux de maturité plus longue ont une valeur négative, en particulier le contrat correspondant à l'échange final de principal. Le payeur de la devise à taux d'intérêt plus élevé est dans une position symétrique.

Pour le payeur de la devise à taux faible, le swap aura tendance à avoir une valeur négative pendant une grande partie de sa durée de vie. En effet, dès que les premiers échanges à valeur positive ont été réalisés, les suivants ont une valeur négative, en particulier l'échange du principal. La situation est symétrique pour le payeur de la devise à taux d'intérêt élevé. Cette remarque est importante dès qu'il s'agit de prendre en compte le risque de crédit.

L'un des cas les plus curieux sur le marché des swaps est celui de Hammersmith et Fulham (voir encadré 7.2). Il montre que, au-delà des risques de marché et de crédit, les banques qui contractent des swaps peuvent aussi supporter des risques légaux.

Encadré 7.2 L'histoire de Hammersmith et Fulham

Entre 1987 et 1989, l'antenne londonienne de Hammersmith et Fulham a contracté plus de 600 swaps de taux pour un montant avoisinant les six milliards de livres sterling. Les transactions ont été réalisées de manière spéculative plutôt que pour couvrir des positions. Les deux employés responsables de ces prises de position semblaient n'avoir qu'une compréhension approximative des risques qu'ils prenaient et du fonctionnement du marché.

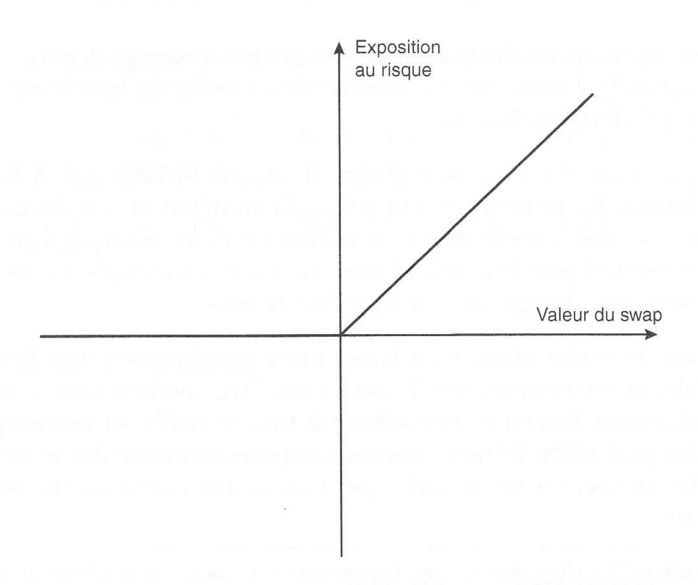
En 1989, suite aux mouvements des taux britanniques, Hammersmith et Fulham perdit plusieurs centaines de millions de livres. Pour les banques contreparties, ces opérations avaient donc une valeur de plusieurs centaines de millions, mais elles s'inquiétaient du risque de crédit. En effet, pour elles, il s'agissait d'opérations de couverture, mais, si Hammersmith et Fulham faisait défaut, elles devraient honorer leurs engagements vis-à-vis de leurs autres partenaires et subiraient une perte importante.

Ce qui arriva fut un peu différent d'une situation de défaut. L'auditeur de Hammersmith et Fulham demanda à ce que ces transactions soient annulées en arguant du fait que l'entreprise n'avait pas le droit de conclure ces transactions. Les tribunaux furent de cet avis. En appel, le cas vint devant la Chambre des Lords, c'est-à-dire l'équivalent de la cour suprême ou de la cour de cassation, qui confirma la première décision. Il va sans dire que les contreparties furent très dépitées de l'annulation de ces contrats par les tribunaux.

7.10 Le risque de crédit

Les swaps sont des contrats bilatéraux entre deux entreprises ou institutions financières et, de ce fait, ne sont pas exempts de risque de crédit. Considérons une institution financière qui a conclu deux contrats de swap avec deux entreprises, de façon que sa position nette soit nulle (voir graphiques 7.4, 7.5 ou 7.7). Si aucune des deux contreparties ne fait défaut, la position est sans risque. La baisse de valeur d'un des deux contrats est compensée par l'augmentation de valeur de l'autre. Cependant, la probabilité n'est pas nulle qu'une des deux contreparties connaisse des difficultés et fasse défaut. L'institution financière doit honorer ses engagements avec l'autre contrepartie. Supposons que, quelques mois après le début du contrat, la position de l'institution vis-à-vis de Microsoft ait une valeur positive et que Microsoft fasse défaut. L'institution est susceptible de perdre toute la valeur du contrat, alors qu'au même moment, la position vis-à-vis d'Intel a une valeur négative. Pour couvrir la position, il faudrait trouver une troisième contrepartie susceptible de « remplacer » Microsoft. Mais dans ce cas, elle devrait payer à ce remplaçant la valeur qu'avait le contrat avant le défaut de Microsoft.

Une entreprise engagée dans un swap ne supporte un risque de crédit que quand la valeur du swap est positive pour elle. Que se passe-t-il lorsque la valeur est négative et que la contrepartie connaît des difficultés ? En théorie, l'entreprise devrait faire un gain en s'affranchissant de son engagement. En pratique, la société en difficulté cherchera à revendre son contrat à un tiers de façon que la valeur positive du contrat ne soit pas perdue. Le scénario le plus réaliste, pour résumer, est que si la contrepartie fait défaut alors que le contrat a une valeur positive, l'entreprise subira une perte, mais si la valeur est négative, il n'y aura pas d'effet à cause du mécanisme de cession que nous venons d'évoquer. Le graphique 7.11 illustre ce point.



Graphique 7.11 : Exposition au risque de crédit dans un swap.

Les pertes potentielles en cas de défaut sur un swap sont cependant bien moins importantes que celles sur un emprunt de même principal. En effet, la valeur du swap est bien inférieure à celle de l'emprunt correspondant (en particulier puisque le principal n'a pas été prêté). Les pertes potentielles sur un swap de devises sont plus importantes que celles sur un swap de taux car les principaux, dans deux devises différentes, sont échangés en fin de vie du swap.

Dans certains cas, si deux contrats se compensent pour un intermédiaire, il est possible de prédire lequel des deux a une valeur positive, comme nous l'avons vu sur le swap du graphique 7.10. Les taux euro étant plus élevés que les taux US, le swap avec Intel a une valeur qui devient négative, alors que celui avec Orange a une valeur qui devient positive. Le risque de crédit se situe alors essentiellement sur cette dernière entreprise.

Dans tout contrat, il est important de distinguer le risque de crédit du risque de marché. Le risque de crédit a pour origine une probabilité de défaut non nulle de la part des contreparties. Le risque de marché vient de la possibilité que les taux de change ou d'intérêt évoluent de façon que la valeur du contrat devienne négative pour l'entreprise. Le risque de marché peut être géré, voire éliminé par d'autres contrats, alors que les risques de crédit sont moins faciles à transférer.

Résumé

Les deux types de swaps les plus courants sont les swaps de taux et les swaps de devises. Dans un swap de taux, une des parties s'engage à payer à l'autre un taux fixe, sur un principal donné, pendant un nombre d'années spécifié. En retour, l'autre partie s'engage à payer un taux variable sur le même principal pendant la même

période. Dans un swap de devises, l'une des parties s'engage à payer à l'autre un intérêt sur un principal dans une devise et reçoit en retour un intérêt sur un principal exprimé dans une devise différente.

Dans un swap de taux, il n'y a pas en général d'échange de principal. À l'inverse, dans un swap de devises, les principaux sont échangés au début et à la fin du contrat. La partie qui paie l'intérêt dans la devise étrangère reçoit le principal dans cette devise au début du contrat et paie le principal dans la devise domestique à cette même date. À la fin du swap, les échanges se font dans l'autre sens.

Un swap de taux peut être utilisé pour transformer un emprunt à taux fixe en emprunt à taux variable, et réciproquement. Il peut aussi être employé pour transformer un investissement à taux fixe en investissement à taux variable, et réciproquement. Un swap de devises peut servir à transformer un emprunt dans une devise en un emprunt dans une autre devise, ou un investissement dans une devise en un investissement dans une autre.

Il y a deux façons d'évaluer les swaps. La première consiste à analyser le swap comme une position longue sur une obligation, combinée avec une position courte sur une autre obligation. La seconde revient à considérer le swap comme un portefeuille de contrats forward (FRA).

Quand une institution financière est intermédiaire dans un swap avec deux positions qui se compensent, elle s'expose à un risque de crédit. Si une contrepartie fait défaut alors que le contrat avec cette dernière a une valeur positive pour l'institution, il en résulte une perte car l'institution doit quand même faire face à ses engagements vis-à-vis de l'autre contrepartie. Nous reviendrons plus en détail sur le marché des swaps au chapitre 30.

Références complémentaires

BAZ J. et M. PASCUTTI, « Alternative Swap Contracts Analysis and Pricing », *Journal of Derivatives*, hiver 1996, 7-21.

BROWN K. C. et D. J. SMITH, *Interest Rate and Currency Swaps : A Tutorial*, Association for Investment Management and Research, 1996.

COOPER I. et A. MELLO, « The Default Risk in Interest Rate Swaps », *Journal of Finance*, 46, 2 (1991), 597-620.

DATTATREYA R. E. et K. HOTTA, *Advanced Interest Rate and Currency Swaps : State-of-the Art : Products, Strategies and Risk Management Applications*, Irwin, Chicago, 1993.

FLAVELL R., *Swaps and Other Instruments*, Chichester, Wiley, 2002.

GUPTA A. et M. G. SUBRAHMANYAM, « An Empirical Examination of the Convexity Bias in the Pricing of Interest Rate Swaps », *Journal of Financial Economics*, 55, 2 (2000), 239-279.

LITZENBERGER R. H., « Swaps, Plain and Fanciful », *Journal of Finance*, 47, n° 3 (1992), 831-50.

MINTON B. A., « An Empirical Examination of the Basic Valuation Models for Interest Rate Swaps », *Journal of Financial Economics*, 44, 2 (1997), 251-277.

SUN T. S., S. SUNDARESAN et C. WANG, « Interest Rate Swaps : An Empirical Investigation », *Journal of Financial Economics*, 34, 1 (1993), 77-99.

TITMAN S., « Interest Rate Swaps and Corporate Financing Choices », *Journal of Finance*, 47, 4 (1992), 1503-1516.

Problèmes et exercices

7.1 Les entreprises A et B se voient offrir les taux annuels suivants pour des emprunts à taux fixe et à taux variable sur 20 millions d'euros pour cinq ans.

	Taux fixe	**Taux variable**
Entreprise A	6,0 %	LIBOR + 10
Entreprise B	6,7 %	LIBOR + 40

L'entreprise A cherche à emprunter à taux variable et l'entreprise B à taux fixe. Construisez un swap avec un intermédiaire qui gagnera 10 points de base, de façon que le swap soit aussi attractif pour A et B.

7.2 Un swap sur un principal de 100 millions a encore une durée de vie de 10 mois. Selon les termes du contrat, un taux LIBOR 6 mois est échangé contre un taux fixe de 6 % par an (en semestriel). Le milieu de fourchette des taux (continus) de swap offerts et demandés est identique pour toutes les maturités et vaut 5 %. Le LIBOR 6 mois était il y a deux mois à 4,8 %. Quelle est la valeur du swap aujourd'hui pour la partie qui paie le taux variable ? Quelle est sa valeur pour la partie qui paie le taux fixe ?

7.3 L'entreprise X cherche à emprunter des USD à taux fixe, alors que l'entreprise Y veut emprunter des JPY à taux fixe. Au taux de change d'aujourd'hui, le principal des emprunts est identique. Les taux qui leur sont proposés (on supposera que les différences fiscales ont déjà été intégrées) sont les suivants :

	JPY	**USD**
Entreprise X	2,50 %	4,8 %
Entreprise Y	3,25 %	5,0 %

Construisez un swap qui laissera 25 points de base de profit à l'intermédiaire. Arrangez-vous pour que ce swap soit également attractif pour X et Y, et pour que le risque de change soit uniquement supporté par l'intermédiaire.

7.4 Expliquez ce qu'est un swap de taux. Quelle est la relation entre les taux de swap et les taux actuariels au pair ?

7.5 Un swap de devises a encore 15 mois de durée de vie. Il implique l'échange des intérêts à 7 % sur 20 millions de livres sterling (GBP) et des intérêts au taux de 5 % sur 30 millions d'USD. La structure par termes des taux est plate aux États-Unis et au Royaume-Uni. Si le swap était négocié aujourd'hui, les taux seraient respectivement 4 % en USD et 5,5 % en GBP. Tous les taux sont exprimés en composition annuelle. Le taux de change est aujourd'hui de 1,65 USD par GBP. Quelle est la valeur du swap pour la partie qui paie le GBP ? Et pour la partie qui paie l'USD ?

7.6 Expliquez la différence entre risque de crédit et risque de marché sur un contrat financier.

7.7 Expliquez dans quelle mesure un intermédiaire est exposé au risque de crédit lorsqu'il négocie des positions qui se compensent avec deux contreparties différentes.

7.8 Les entreprises X et Y se voient offrir les taux annuels suivants pour des emprunts à taux fixe et à taux variable sur 5 millions d'euros à 10 ans.

	Taux fixe	Taux variable
Entreprise X	6,0 %	LIBOR
Entreprise Y	6,8 %	LIBOR

L'entreprise Y cherche à emprunter à taux fixe et l'entreprise X à taux variable. Construisez un swap dans lequel l'intermédiaire réalise un profit de 20 points de base, et qui soit également attractif pour X et Y.

7.9 Une institution financière a conclu un swap avec une entreprise X. Selon les termes du contrat, elle reçoit 5 % par an et paie le LIBOR 6 mois sur un principal de 10 millions de dollars pour 5 ans. Les paiements sont effectués tous les 6 mois. Supposons que X fasse défaut au sixième paiement (à la fin de l'année 3) quand le taux d'intérêt (en composition semestrielle) est de 8 % par an pour toutes les maturités. Quelle est la perte pour l'institution financière ? Le LIBOR 6 mois était de 9 % au milieu de la troisième année.

7.10 Une institution financière a contracté un swap d'une durée de 10 ans avec une entreprise Y. Selon les termes du contrat, elle reçoit 3 % par an en francs suisses (CHF) et paie 8 % d'intérêts en USD. Les paiements ont lieu une fois par an. Les principaux sont respectivement de 7 millions d'USD et de 10 millions de CHF. Supposons que Y fasse faillite à la fin de la sixième année quand le taux de change est de 0,8 USD par CHF. Quel est le coût pour l'institution financière ? Vous supposerez qu'à la fin de l'année 6, le taux est de 3 % pour toutes les maturités en CHF et de 8 % par an pour toutes les maturités en USD. Tous les taux sont exprimés en composition annuelle.

7.11 Deux entreprises A et B se voient proposer les taux suivants (ajustés pour les différences de fiscalité) :

	A	B
USD (taux variable)	LIBOR + 50	LIBOR + 100
Dollar canadien (taux fixe)	5 %	6,5 %

Supposons que A cherche à emprunter en USD à taux variable et que B souhaite emprunter en dollars canadiens à taux fixe. Une institution monte un swap dans lequel elle retirera 50 points de base de profit. Si le swap est également attractif pour les deux, quel taux vont-elles payer en définitive ?

7.12 Après couverture du risque de change, l'institution financière qui est intermédiaire dans le swap du graphique 7.10 retire-t-elle un profit plus important ou plus faible que 20 points de base ? Justifiez votre réponse.

7.13 « Les entreprises dont le risque de crédit est élevé sont celles qui ne peuvent accéder directement au marché des emprunts à taux fixe. Ce sont celles qui sont le plus susceptibles de payer le fixe et recevoir le variable dans un swap de taux. » Supposez que cette affirmation soit exacte. Pensez-vous que cela augmente ou diminue le risque du portefeuille de swaps d'une institution financière ? Vous supposerez que le défaut est plus probable quand les taux d'intérêt sont élevés.

7.14 Pourquoi la perte espérée en cas de défaut dans un swap est-elle plus faible que celle qui est encourue dans le cas d'un prêt lorsque le principal est identique ?

7.15 Une banque considère que ses actifs et ses passifs ne sont pas correctement ajustés car elle rémunère des dépôts à taux variable et prête à taux fixe. Comment des swaps pourraient-ils couvrir ce risque ?

7.16 Expliquez comment évaluer un swap qui permet d'échanger un taux variable dans une devise contre un taux fixe dans une autre.

7.17 La courbe des taux (continus) ZC LIBOR est plate à 5 % jusqu'à la maturité de 1,5 an. Les taux de swap pour les maturités de 2 et 3 ans sont 5,4 % et 5,6 % en composition semestrielle. Estimez la courbe des taux ZC LIBOR pour les maturités 2 ans, 2,5 et 3 ans. Le taux de swap à 2,5 ans est supposé égal à la moyenne des taux de swap à 2 et 3 ans.

Questions complémentaires

7.18 Le taux ZC LIBOR à un an est 10 %. Une banque cote des swaps pour lesquels le taux fixe est échangé contre le LIBOR 12 mois avec des paiements annuels. Les taux de swap à 2 et 3 ans (en composition annuelle) sont de 11 % et 12 %. Estimez les taux ZC à 2 et 3 ans.

7.19 L'entreprise X, basée au Royaume-Uni, voudrait emprunter 50 millions d'USD à taux fixe pour 5 ans. Elle n'a pu réaliser cet emprunt ; par contre, elle peut emprunter en GBP à 12 %. L'entreprise Y, basée aux Etats-Unis, voudrait elle emprunter l'équivalent de 50 millions d'USD en GBP à taux

fixe pour 5 ans. Elle n'a pu réaliser cet emprunt mais peut par contre emprunter en USD à 10,5 %. Les obligations du Trésor US à 5 ans ont un taux actuariel de 9,5 %, alors que les obligations de l'État britannique à 5 ans ont un taux actuariel de 10,5 %. Proposez un swap qui laisserait 50 points de base de profit par an à l'intermédiaire.

7.20 Selon les termes d'un swap de taux, une institution financière s'est engagée à payer 10 % par an et à recevoir en retour le LIBOR 3 mois sur un principal de 100 millions de dollars avec des paiements trimestriels. Le swap a une durée de vie résiduelle de 14 mois. Le taux de swap pour ce type de contrat est actuellement de 12 % pour toutes les maturités. Le LIBOR 3 mois était à 11,8 % il y a un mois. Tous les taux sont composés trimestriellement. Quelle est la valeur du swap ?

7.21 On suppose que la structure par termes des taux est plate aux Etats-Unis et en Australie aux niveaux respectifs de 7 % et 9 %. Le dollar australien (AUD) vaut actuellement 0,62 USD. Selon les termes d'un contrat de swap, une institution financière paye 8 % par an en AUD et reçoit 4 % par an en USD. Les principaux sont 12 millions d'USD et 20 millions d'AUD. Les paiements sont annuels et l'un d'eux vient d'avoir lieu alors qu'il reste deux ans jusqu'au terme du contrat. Quelle est la valeur du swap pour l'institution ? Vous supposerez que tous les taux sont exprimés en continu.

7.22 L'entreprise A, un industriel britannique, cherche à emprunter des USD à taux fixe, et l'entreprise B, une multinationale américaine, souhaite emprunter des GBP à taux fixe. Les taux suivants leur ont été proposés :

	GBP	USD
Entreprise A	11,0 %	7,0 %
Entreprise B	10,6 %	6,2 %

Construisez un swap qui laissera 10 points de base de profit à l'intermédiaire et qui produira un gain de 15 points de base pour chacune des deux parties.

Chapitre 8

Le fonctionnement des marchés d'options

En complément du chapitre 1 dans lequel les options ont été introduites, ce chapitre traite essentiellement des options portant sur des actions. Il expose également les principes de fonctionnement des marchés organisés, la terminologie utilisée, la cotation des contrats, les calculs de marges, etc. Les chapitres suivants abordent l'étude des portefeuilles contenant des options, l'évaluation de ces dernières, ainsi que les stratégies de couverture des portefeuilles d'options. Ce chapitre introduit les options portant sur les devises, les indices et les futures ; leur étude approfondie fera l'objet du chapitre 14.

Les options sont fondamentalement différentes des contrats forward ou futures. Une option donne à son détenteur le droit de faire quelque chose, mais pas l'obligation d'exercer ce droit, alors que, dans un contrat forward ou futures, les deux parties sont engagées l'une envers l'autre. Il ne coûte rien (exception faite de l'appel de marge) de prendre part à un contrat forward ou futures, tandis que l'achat d'une option nécessite un paiement à l'avance.

8.1 Les types d'options

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 1, il y a deux types basiques d'options. Une option d'achat (un *call*) donne à son détenteur le droit d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée et à un prix convenu. Une option de vente (un *put*) donne le droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future et à un prix convenu. La date maximale à laquelle le droit peut être exercé est la date d'échéance. Le prix spécifié est appelé prix d'exercice (*strike price*).

Les options peuvent être qualifiées d'américaines ou d'européennes, sans qu'il y ait aucun lien avec une quelconque situation géographique. Si l'exercice peut survenir à tout moment jusqu'à la date d'échéance, l'option est dite américaine ; si l'option ne peut être exercée qu'à la date d'échéance, elle est dite européenne. La plupart des options négociées sur les marchés organisés sont de type américain. Les options européennes sont plus faciles à analyser et, dans un certain nombre de cas, les propriétés des options américaines sont déduites de celles des options européennes.

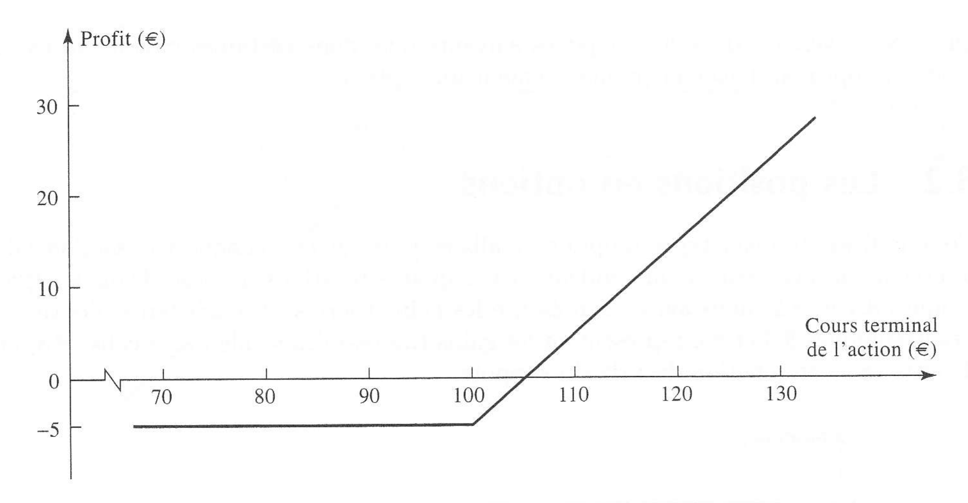
Les calls

Considérons un investisseur qui achète un call européen sur AGF avec un prix d'exercice de 100 €, lui donnant le droit d'acquérir 100 titres. Supposons que le cours de l'action soit de 98 € et la date d'échéance dans 4 mois. Le prix de l'option, appelé premium, est de 5 € pour une action (le premium est toujours défini pour une unité de sous-jacent). Le coût initial du contrat est donc de 500 €. Comme l'option est supposée européenne, l'investisseur ne peut l'exercer qu'à l'échéance. Si, à cette date, le cours de l'action est inférieur à 100 €, l'investisseur décidera de ne pas exercer (il serait stupide d'acheter l'action à 100 € alors qu'elle peut être acquise pour un prix inférieur sur le marché). Dans cette situation, l'investisseur a perdu la totalité de sa mise initiale, à savoir 500 €. Si le cours de l'action est supérieur à 100 €, l'option sera exercée ; si, par exemple, le cours est de 115 €, l'investisseur peut, en exerçant son droit, acheter 100 titres à 100 € l'unité. S'il revend les titres immédiatement, il réalise un gain de 15 € par action, soit 1 500 €, en négligeant les coûts de transaction. En tenant compte de la mise initiale, le profit net est de 1 000 €.

Le graphique 8.1 montre l'évolution du profit net en fonction du prix du sous-jacent, L'actualisation est négligée dans ce calcul de profit. On peut noter que, même en exerçant, on peut réaliser une perte nette. Dans cet exemple, c'est le cas si le prix final de l'action se situe entre 100 € et 105 €. Il est cependant optimal d'exercer dans cette zone car la perte sera inférieure à 500 €. De manière générale, les options d'achat doivent toujours être exercées si le prix du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice à la date d'échéance.

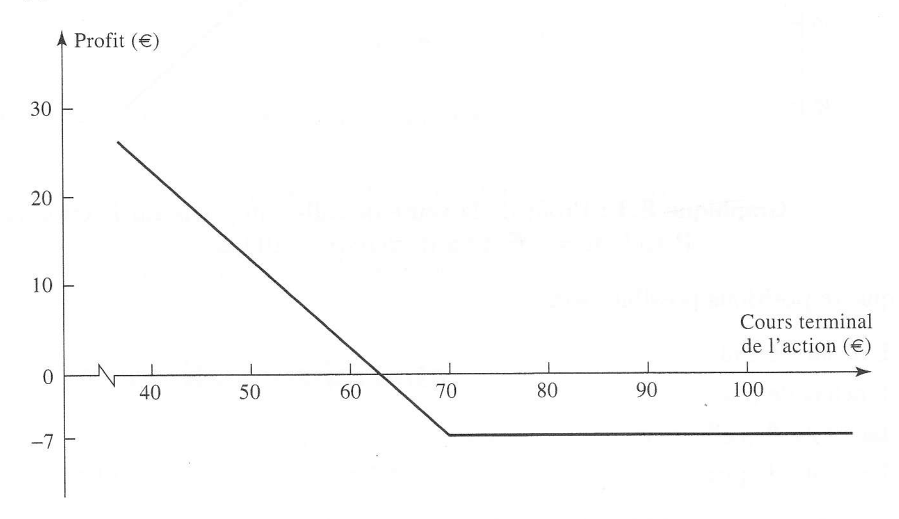
Les puts

Alors que l'acheteur d'un call espère la hausse du prix du support, l'acheteur d'un put mise sur une baisse. Considérons l'acheteur d'un put européen portant sur 100 actions Sanofi-Aventis à un prix d'exercice de 70 € alors que le cours de l'action est de 65 € et l'échéance dans 3 mois. Le premium est de 7 €. L'investissement initial est donc de 700 €. Ces options seront exercées à l'échéance si le cours à cette date est inférieur à 70 €. S'il est, par exemple, de 55 €, l'investisseur achètera 100 actions à ce prix sur le marché et, selon les termes du contrat, les vendra au prix de 70 €, dégageant un profit de 15 € par action, soit 1 500 € au total. En déduisant la mise initiale de 700 €, le profit net s'élève à 800 €. Ici encore, le profit n'est pas garanti puisque, si le cours de l'action termine au-delà de 70 €, l'investissement initial est perdu en totalité. Le



Graphique 8.1 : Profit d'un achat de calls sur l'action AGF. Premium = 5 €, prix d'exercice = 100 €.

graphique 8.2 montre l'évolution du profit net d'un achat de puts en fonction du prix du support.



Graphique 8.2 : Profit d'un achat de puts sur l'action Sanofi-Aventis. Premium = 7 €, prix d'exercice = 70 €.

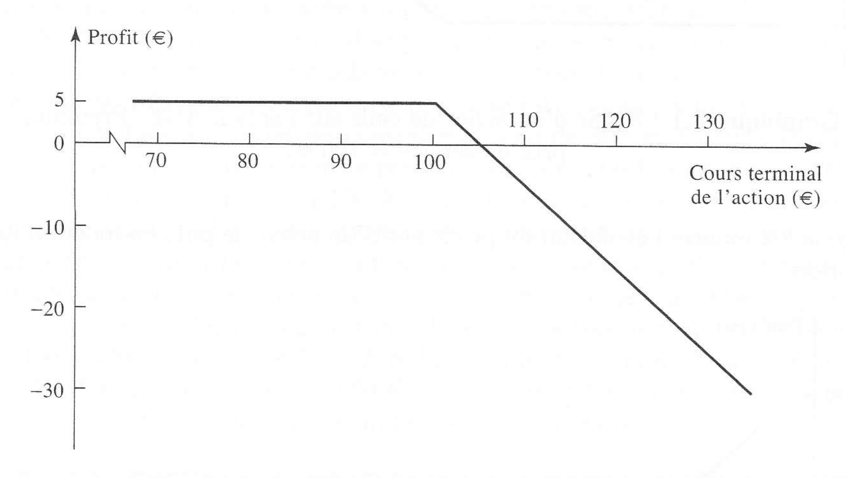
L'exercice prématuré

Comme nous l'avons mentionné plus haut, la plupart des options négociées sur les marchés organisés sont américaines. Dans les exemples précédents, si les options avaient été américaines, l'investisseur aurait pu éventuellement les exercer avant l'éché-

ance. Nous verrons dans les chapitres suivants que, dans certaines circonstances, il peut être optimal d'exercer prématurément une option.

8.2 Les positions en options

Comme il existe deux types d'options (calls et puts) et que chaque transaction fait intervenir un acheteur et un vendeur, il y a quatre positions de base. Dans les graphiques 8.1 et 8.2, nous avions représenté les gains (pertes) des acheteurs d'options. Les graphiques 8.3 et 8.4 représentent les gains (pertes) des vendeurs de calls (8.3) et de puts (8.4) en fonction du prix du support.



Graphique 8.3 : Profit de la vente de calls européens sur l'action AGF. Premium = 5 €, prix d'exercice = 100 €.

Les quatre positions possibles sont :

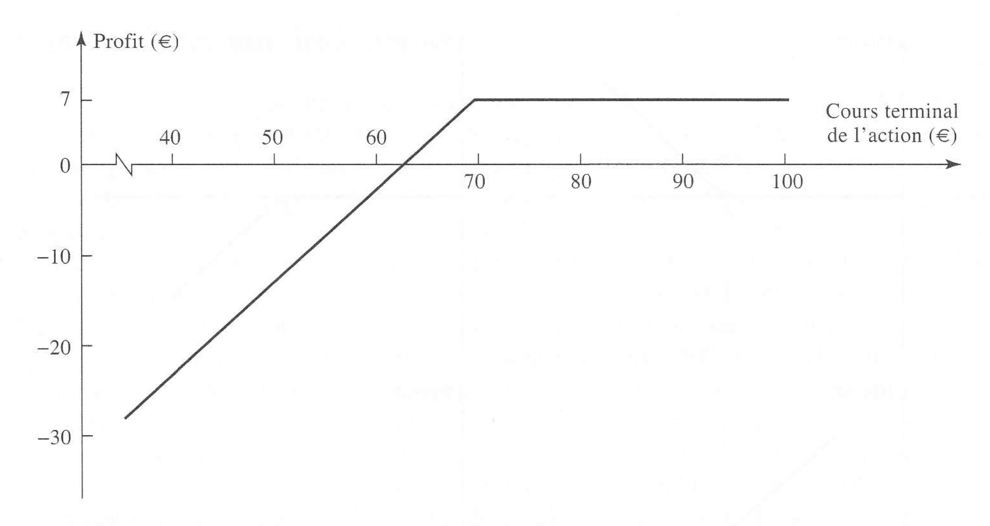
1. L'achat de call.
2. L'achat de put.
3. La vente de call.
4. La vente de put.

On peut aisément caractériser le payoff terminal de chacune des quatre positions. En notant K le prix d'exercice et S_T le prix du sous-jacent à la date d'échéance T, le payoff d'un achat de call s'écrit :

$$\max(S_T - K; 0)$$

Cette formulation traduit le fait que l'exercice de l'option a lieu seulement si $S_T > K$. Si $S_T < K$, l'option est abandonnée et le payoff est nul. Le payoff du vendeur du call est l'opposé de celui de l'acheteur ; il est égal à :

$$-\max(S_T - K\,;\,0) = \min(K - S_T\,;\,0)$$



Graphique 8.4 : Profit de la vente de puts européens sur l'action Sanofi-Aventis. Premium = 7 €, prix d'exercice = 70 €.

Le payoff de l'acheteur d'un put s'écrit :

$$\max(K - S_T\,;\,0)$$

Celui du vendeur du put est l'opposé du précédent, soit :

$$-\max(K - S_T\,;\,0) = \min(S_T - K\,;\,0)$$

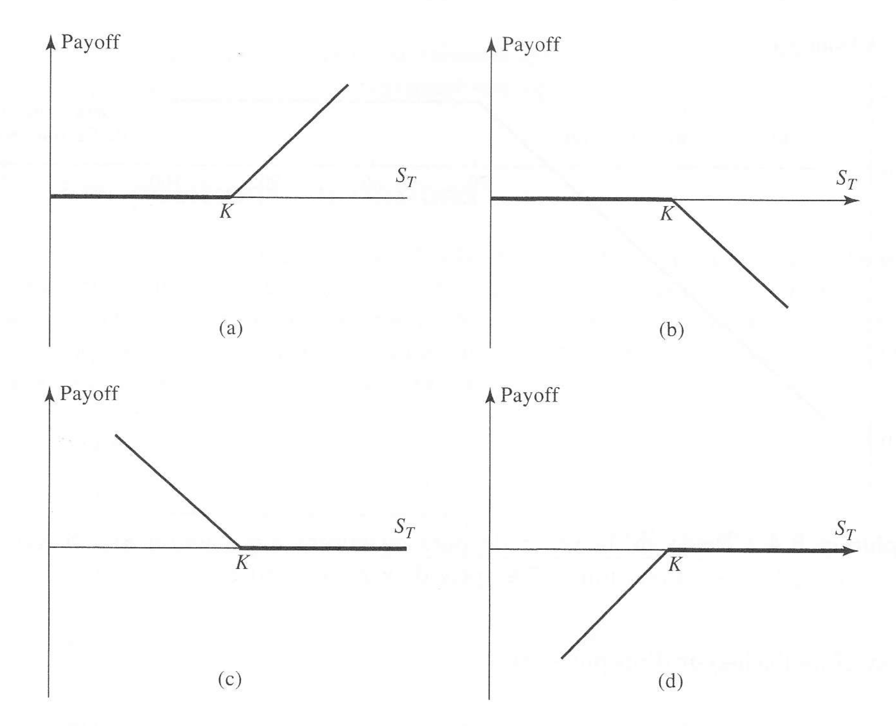
Le graphique 8.5 résume ces différentes situations.

8.3 Les actifs sous-jacents

Cette section fournit une première approche des options portant sur les actions, les devises, les indices boursiers et les contrats futures.

Les options sur actions

La plupart des transactions d'options sur actions se font sur des marchés organisés. Aux États-Unis, les marchés organisés d'options sont le Chicago Board Options Exchange (www.cboe.com), le Philadelphia Stock Exchange (www.phlx.com), l'American Stock Exchange (www.amex.com), le Pacific Exchange (www.pacifex.com) et l'International Securities Exchange (www.iseoptions.com). Plus de 1 000 actions sont supports de contrats d'options sur ces marchés. Un contrat donne le droit d'acheter ou de vendre 100 actions au prix d'exercice spécifié. Cette quotité semble raisonnable



Graphique 8.5 : Payoffs des positions en options à l'échéance : (a) achat de call ; (b) vente de call ; (c) achat de put ; (d) vente de put. K = prix d'exercice, S_T = prix de l'action à l'échéance.

car les actions s'échangent le plus souvent par multiples de 100. En France, les options sur actions sont cotées sur le MONEP, marché des options négociables de Paris (www.monep.fr). La quantité de titres sous-jacents par contrat dépend du prix de ce sous-jacent. En effet, si l'action support cote 0,5 €, les contrats d'options porteront sur un nombre plus élevé de titres supports que si l'action cote 150 €.

Les options sur devises

La plupart des transactions d'options sur devises se font maintenant de gré à gré, mais il y a quelques marchés organisés. Le principal marché d'options sur devises est le Philadelphia Stock Exchange. Y sont négociées aussi bien des options américaines qu'européennes sur une large gamme de devises. Par exemple, sur la livre sterling, un contrat d'option donne le droit d'acheter ou de vendre 31 250 £ ; pour le yen japonais, le contrat autorise l'achat ou la vente de 6,25 millions de yens. Les options sur devises sont décrites plus en détail au chapitre 14.

Les options sur indices

De nombreuses options sur indices sont négociées à travers le monde à la fois sur les marchés de gré à gré et sur les marchés organisés. Aux États-Unis, les contrats les plus actifs sont ceux qui ont pour sous-jacent le S&P500 (SPX), le S&P100 (OEX), le Nasdaq 100 (NDX) et le Dow Jones Industrial Average (DJX). Tous ces contrats d'options sont traités sur le Chicago Board Options Exchange. Sur le MONEP, les options sur indices portent en particulier sur l'indice CAC 40. La plupart de ces options sont européennes à l'exception du contrat sur le S&P100 qui est américain. Un contrat donne le droit d'acheter ou de vendre n fois l'indice au prix d'exercice spécifié. Par exemple, $n = 100$ pour les options sur le S&P500 et $n = 10$ pour certaines options sur le CAC 40. Le dénouement a toujours lieu en cash plutôt qu'en livrant le portefeuille correspondant à l'indice. Considérons par exemple un call sur le CAC 40 avec un prix d'exercice de 5 500. Supposons qu'à la date d'exercice, l'indice vaille 5 600. Le vendeur du contrat paie alors à l'acheteur $(5\,600 - 5\,500) \times 10 = 1\,000$ €. Ce règlement est fondé sur la valeur de l'indice à la clôture du jour où l'acheteur a décidé d'exercer. De ce fait, comme on peut s'y attendre, les détenteurs attendent généralement la fin de la journée avant de se décider à exercer une option. Ces options sur indices sont analysées en détail au chapitre 14.

Les options sur futures

Lorsqu'un marché organisé cote des contrats futures, il cote aussi souvent des options portant sur ces contrats futures. En règle générale, l'échéance d'une option portant sur un contrat futures se situe peu avant la date d'échéance du futures sous-jacent. Quand un call est exercé par le détenteur de l'option, ce dernier se retrouve en position longue (achat) sur le contrat futures et reçoit du vendeur un montant égal à la différence entre le prix futures et le prix d'exercice. Symétriquement, lorsqu'un put est exercé par le détenteur de l'option, ce dernier se retrouve en position courte (vente) sur le contrat futures et reçoit du vendeur un montant égal à la différence entre le prix d'exercice et le prix futures. Les options sur contrats futures sont analysées plus précisément au chapitre 14.

8.4 Définition des contrats d'options sur actions

Dans la suite de ce chapitre, nous traitons presque exclusivement de contrats d'options sur actions échangés sur des marchés organisés. Les spécifications précises des contrats – date d'échéance, prix d'exercice, conditions particulières lors des paiements de dividendes, limitations des positions, etc. – sont définies par le marché sur lequel sont traités ces contrats, mais les principes qui sous-tendent la fixation de ces spécifications sont d'application très générale.

Dates d'échéance

Une des spécifications d'un contrat est le mois d'échéance. Par exemple, un call IBM janvier est une option d'achat sur l'action IBM qui expire en janvier. Sur le marché américain, l'échéance survient le samedi qui suit le troisième vendredi du mois d'échéance, ce vendredi étant le dernier jour pendant lequel les options peuvent s'échanger sur le marché.

Les options sur actions fonctionnent sur des cycles avec des échéances mensuelles, trimestrielles, voire semestrielles pour des options longues. Un cycle janvier d'échéances trimestrielles comporte quatre échéances : janvier, avril, juillet, octobre. De même, le cycle février compte les échéances février, mai, août, novembre. Enfin, le cycle mars est constitué des échéances mars, juin, septembre, décembre. Lorsque la date d'échéance du mois courant n'a pas encore été atteinte, les options se négocient sur quatre échéances : le mois courant, le mois à venir et les deux mois suivants du cycle. Lorsque la date d'échéance du mois courant est passée, les options traitées ont pour échéances : le mois suivant, le mois précédant le prochain mois du cycle, ainsi que les deux mois suivants du cycle. Par exemple, IBM fonctionne sur un cycle janvier. Au début du mois de janvier sont traitées les échéances janvier, février, avril et juillet. À la fin du mois de janvier, on traite les échéances février, mars, avril et juillet ; au début du mois de mai, ce sont mai, juin, juillet et octobre qui sont échangés, et ainsi de suite.

Sur le MONEP, depuis septembre 2004, les options sur actions sont négociées et peuvent être exercées jusqu'au dernier jour de Bourse du mois d'échéance correspondant au troisième vendredi du mois d'échéance à 17 h 30. Les options courtes, américaines, fonctionnent sur les cycles d'échéances mars, juin, septembre, décembre. Trois échéances trimestrielles sont en général cotées, mais ce nombre peut aller jusqu'à cinq pour un sous-ensemble de supports défini par les autorités de marché. Quand un contrat est arrivé à échéance, un autre prend le relais.

Des options à échéance éloignée, appelées simplement options longues sur le MONEP, ou LEAPS (*Long-term Equity Anticipation Securities*) sur le marché US, sont aussi traitées sur certaines actions. Leur durée de vie peut aller jusqu'à deux ou trois ans selon le marché.

Les prix d'exercice

Les principes régissant la définition des prix d'exercice par les autorités de marché sont les mêmes partout. Évidemment, des détails techniques peuvent être différents, par exemple le nombre de prix d'exercice cotés simultanément, l'écart entre deux prix d'exercice successifs et, bien sûr, la devise de cotation, relative au pays considéré.

Les autorités de marché choisissent en principe les prix d'exercice de façon que les différences entre ceux-ci soient 2,5 $, 5 $ ou 10 $ selon le niveau de prix du sous-jacent. Habituellement, l'écart est de 2,5 $ lorsque le cours de l'action sous-jacente est compris entre 5 $ et 25 $, 5 $ pour un cours du sous-jacent compris entre 25 $

et 200 $, et 10 $ pour les titres valant plus de 200 $. Comme nous allons le voir, des opérations sur titres ou l'annonce de dividendes peuvent conduire à l'établissement de prix d'exercice ne respectant pas les règles qui viennent d'être énoncées.

Lorsqu'une nouvelle échéance est introduite, les autorités de marché ouvrent des contrats d'options aux deux ou trois prix d'exercice les plus proches du cours de l'action. Lorsque ce dernier sort de l'intervalle défini par les prix d'exercice extrêmes, un nouveau contrat est ouvert avec un nouveau prix d'exercice. À titre d'exemple, supposons qu'une action cote 84 $ quand l'échéance octobre commence à être cotée. Des calls et des puts de prix d'exercice 80 $, 85 $, 90 $ sont tout d'abord proposés. Si le cours passe à 90 $, un nouveau contrat de prix d'exercice 95 $ est ouvert à la cotation ; si le cours chute en deçà de 80 $, c'est un contrat à prix d'exercice 75 $ qui débute, et ainsi de suite. Comme nous l'avons indiqué précédemment, à quelques détails près, les principes d'ouverture de nouveaux contrats sont identiques sur tous les marchés. L'objectif est de toujours coter des contrats avec des prix d'exercice les plus proches du cours du support. Une asymétrie peut cependant exister. Sur le MONEP, si l'indice CAC 40 est à 4 960, les autorités de marché ouvrent, pour les échéances trimestrielles et semestrielles, des contrats de calls avec des prix d'exercice de 5 000, 5 100 et 5 200 et des contrats de puts à 5 000, 4 900 et 4 800. Comme sur le marché américain, quand la valeur du sous-jacent se modifie, de nouveaux contrats avec des prix d'exercice sont ouverts de façon à toujours avoir au moins un contrat dont le prix d'exercice est proche de la valeur du sous-jacent et deux prix d'exercice supérieurs (inférieurs) pour les calls (puts). Concernant les options sur actions, les écarts entre prix d'exercice varient de 0,1 € pour les prix d'exercice inférieurs à 1 € jusqu'à 40 € pour les prix d'exercice supérieurs à 200 €.

Terminologie

Pour chaque actif et à chaque date, de nombreux contrats d'options différents sont échangés. Considérons une action support de contrats d'options négociés sur quatre échéances, avec cinq prix d'exercice différents. En tenant compte du type d'option (calls et puts), on a donc 40 contrats différents. Toutes les options du même type (call ou put) sur un même support définissent une *classe* d'options. Par exemple, les calls sur IBM constituent une classe, et les puts sur IBM une autre classe. Une *série* d'options est constituée des options d'une même classe qui ont le même prix d'exercice et une date d'échéance identique. En d'autres termes, une série d'options définit un contrat particulier. Les calls IBM-50-octobre constituent une série d'options ; il s'agit des options d'achat sur IBM de prix d'exercice 50 et d'échéance octobre.

Les options sont classées *dans la monnaie* (ou *en dedans*), *à la monnaie* (on dit aussi *à parité*) ou *en dehors de la monnaie* (ou plus simplement *en dehors*). Si S désigne le prix de l'action et K le prix d'exercice, un call est dans la monnaie si $S > K$, à la monnaie si $S = K$ et en dehors si $S < K$. Un put est dans la monnaie si $S < K$, à la monnaie si $S = K$ et en dehors si $S > K$. Il est clair qu'une option fera l'objet d'un exercice si et seulement si elle est dans la monnaie. En l'absence de coûts de transaction, une option dans la monnaie sera toujours exercée à la date d'échéance, si elle n'a pas été exercée plus tôt.

La valeur intrinsèque d'une option se définit comme le maximum de 0 et du flux qu'engendrerait un exercice immédiat. Pour un call, la valeur intrinsèque est donc définie par $\max(S - K\,;\,0)$. Pour un put, elle est égale à $\max(K - S\,;\,0)$. En conséquence, une option est dans la monnaie lorsque sa valeur intrinsèque est strictement positive.

Une option américaine dans la monnaie ne peut valoir moins que sa valeur intrinsèque puisque le détenteur peut obtenir cette valeur en exerçant immédiatement. Le plus souvent, il est préférable pour le détenteur d'une option américaine d'attendre plutôt que d'exercer immédiatement. L'option possède dans ce cas une valeur-temps, encore appelée valeur spéculative. La valeur totale d'une option peut être obtenue par la somme de sa valeur intrinsèque et de sa valeur-temps.

Options Flex

Le Chicago Board Options Exchange offre des options Flex (pour « flexible ») sur actions et sur indices. Ce sont des options aux caractéristiques non standardisées. Ce sont par exemple les prix d'exercice ou les échéances qui sont différents de ceux qui sont proposés pour les produits standardisés. Dans certains cas, ces options peuvent être européennes, alors que celles qui sont cotées sur le marché organisé sont américaines. Les options Flex sont en fait une tentative des marchés organisés pour reprendre des parts de marché aux marchés de gré à gré. Les autorités de marché exigent cependant un volume minimal (par exemple, 100 contrats) pour maintenir la négociation d'options Flex.

Dividendes et opérations sur titres

Les premières options négociées de gré à gré étaient protégées contre le paiement de dividendes. Lorsque la société annonçait un dividende, le prix d'exercice des options était diminué du montant du dividende le jour du détachement. Les options négociables échangées sur les marchés organisés ne sont pas, par contre, protégées contre le paiement du dividende. En d'autres termes, quand le dividende est détaché, il n'y a pas d'ajustement des caractéristiques du contrat. Toutefois, un montant de dividende particulièrement important peut entraîner une exception à cette règle (voir encadré 8.1).

Encadré 8.1 L'important versement de dividendes du Groupe Gucci

Lorsqu'une somme particulièrement importante est versée en dividendes (représentant plus de 10 % de la valeur des actions), un comité de l'Options Clearing Corporation (OCC) du CBOE (Chicago Board Options Exchange) peut décider d'effectuer des ajustements des caractéristiques des contrats d'options échangés sur le marché.

Le 28 mai 2003, Gucci Group NV (GUC) déclara le détachement d'un dividende de 13,5 € par action, ce qui fut approuvé par l'assemblée générale des actionnaires du 16 juillet 2003. Ce dividende représentait 16 % de la valeur de cotation des actions au moment de l'annonce. Le comité de l'OCC décida alors d'ajuster les caractéristiques des contrats d'options comme suit : l'exercice de l'option déclencherait la livraison de 100 actions, auxquelles devraient s'ajouter 100 × 13,50 = 1 350 € de liquidité. Le détenteur d'un call devait alors payer 100 fois le prix d'exercice pour obtenir 1 350 € en plus des 100 actions. À l'inverse, le détenteur d'un put recevrait 100 fois le prix d'exercice en échange de la livraison de 100 actions et d'un versement de 1 350 €. Ces ajustements ont donc eu pour effet de réduire le prix d'exercice de 13,50 €.

Les ajustements dus au versement d'un important dividende ne sont pas systématiques. Par exemple, le Deutsche Terminbörse (DTB, marché à terme d'instruments financiers allemand) préféra ne pas ajuster les caractéristiques des options concernant Daimler-Benz lorsque cette dernière surprit le marché, le 10 mars 1998, avec un dividende représentant 12 % du cours de son action.

Les options négociables sur les marchés organisés sont, par contre, ajustées pour les opérations sur titres. Une division des titres (*stock split*) survient quand chaque action (appelée ancienne) est transformée en plusieurs actions (appelées nouvelles). Par exemple, dans une opération de division 3 pour 1, chaque action ancienne est remplacée par trois nouvelles. Comme une division de titres ne change pas la valeur de la société, ni sa capacité à faire des profits, on ne peut s'attendre à ce que cette opération modifie la richesse des actionnaires. Toutes choses égales par ailleurs, le prix de l'action devrait donc être divisé par trois. Plus généralement, une division n pour m devrait diviser le prix de l'action par $\frac{n}{m}$. Les spécifications des contrats d'options sont donc ajustées pour refléter le changement attendu du prix de l'action. Après une division n pour m, le prix d'exercice est multiplié par $\frac{m}{n}$ et le nombre de titres correspondant à un contrat d'option est multiplié par $\frac{n}{m}$. Si le prix baisse dans les proportions attendues, la valeur totale du contrat est inchangée, aussi bien pour l'acheteur que pour le vendeur.

■ **Exemple 8.1**

Considérons un contrat de call donnant le droit d'acheter 100 actions d'une société à 30 € par action. La firme réalise une division 2 pour 1. Les termes du contrat sont alors modifiés, et le détenteur du contrat a alors le droit d'acheter 200 actions à 15 € par action.

Les contrats d'options sont aussi ajustés pour les dividendes en titres (*stock dividend*). Cela consiste pour une firme à émettre de nouvelles actions qui sont distribuées aux actionnaires existants. Par exemple, un dividende en titres de 20 % signifie que chaque détenteur de 5 titres en reçoit un sixième. Comme la division des titres, la présente opération n'a pas d'effet sur la capacité de la firme à réaliser des bénéfices. Le prix

de l'action devrait donc baisser. L'exemple que nous venons de donner est équivalent à une division de titres 6 pour 5. Toutes choses égales par ailleurs, le prix de l'action devrait être multiplié par $\frac{5}{6}$. Les termes des contrats d'options sont alors ajustés de façon à refléter la baisse attendue du prix de l'action ; cet ajustement prend la même forme que celui qui est décrit pour les divisions de titres.

■ **Exemple 8.2**

Considérons un put donnant le droit de vendre 100 titres d'une société à 15 € le titre. Supposons que la compagnie annonce un dividende en titres de 25 % ; cela équivaut à une division de titres 5 pour 4. Les termes du contrat sont modifiés de façon que le détenteur de l'option ait le droit de vendre 125 titres au prix de 12 € par titre.

Des ajustements sont aussi réalisés lors de l'émission de droits de souscription. L'idée de base consiste à calculer le prix théorique des droits et à réduire le prix d'exercice des options en proportion.

Les limites des positions et d'exercice

Le Chicago Board Options Exchange impose en général des limites sur la quantité de contrats qui peuvent être achetés ou vendus. La limite porte sur la quantité détenue sur un côté du marché, c'est-à-dire que les achats de calls et les ventes de puts sont du même côté puisque l'exercice de ces contrats conduit à l'achat d'actions. De la même façon, l'achat de puts et la vente de calls se situent du même côté du marché. La limite d'exercice est égale à la limite de position. Elle définit le nombre maximal de contrats qui peuvent être exercés par un individu (ou un groupe d'individus opérant ensemble) pendant une période de cinq jours consécutifs. Les limites de position sur les contrats ayant pour sous-jacent les actions les plus importantes et les plus liquides sont de 75 000 contrats. Sur les titres dont la capitalisation est moins importante, les limites sont de 60 000, 31 500, 22 500 ou 13 500 contrats.

Ces limites ont pour objet principal d'empêcher que des individus ou des groupes d'individus manipulent le marché. Toutefois, les avis sont partagés sur la pertinence de ces limites.

8.5 La diffusion des cotations

De nombreux journaux diffusent les cotations d'options. Dans le *Wall Street Journal*, les cotations d'options se situent dans la rubrique « Listed Options » de la section « Money and Investing ». Les journaux français *Les Echos* et *La Tribune* fournissent de même les cotations du MONEP. La première partie du tableau 8.1 montre un extrait des cotations d'options sur le CAC 40 telles qu'elles apparaissaient dans *Les Echos* du 15 janvier 2004. Les cotations sont celles de la veille (14 janvier 2004). Le

nom de l'indice figure dans la première ligne ainsi que les valeurs, plus haut, plus bas et dernier, du support.

Le type d'option (call-put), l'échéance et le prix d'exercice apparaissent dans la première colonne ; C 30 jan 3 700 signifie qu'il s'agit d'un call dont l'échéance est le 30 janvier 2004 avec un prix d'exercice de 3 700. Les quatre colonnes suivantes contiennent les cotations d'options, plus haut, plus bas, clôture et compensation.

Le prix coté correspond à celui d'une option donnant le droit d'acheter ou de vendre une fois le sous-jacent. C'est la règle générale, mais comme nous l'avons déjà mentionné, un contrat d'options sur actions peut porter sur 10, 50 ou 100 actions, selon le titre ou le marché considéré. Par conséquent, le véritable coût d'un contrat est le produit de la cotation indiquée par le nombre de titres sous-jacents que donne le droit d'acheter ou de vendre le contrat d'option considéré.

On peut remarquer que de nombreuses options ont un prix faible, même après multiplication par le nombre contractuel d'unités de sous-jacent. Il n'est pas nécessaire que les investisseurs soient très fortunés pour opérer sur les marchés d'options.

Tableau 8.1 : Cotations d'options du journal *Les Echos*, 15 janvier 2004.

Intitulé	+ haut	+ bas	Clôture	Compensation
CAC 40	3617,52	3567,49	3612,55	
C 30 jan 3 700	15,60	9,10	15,60	11,24
C 30 jan 3 650	31,50	20,00	31,00	31,00
C 30 jan 3 600	56,70	39,00	55,00	41,46
P 30 jan 3 500	23,00	16,00	16,00	22,96
P 30 jan 3 650	81,20	69,00	70,00	90,34

Tableau 8.2 : Intitulé, compensation, volume, capitaux échangés et position ouverte sur quelques calls ACCOR.

Intitulé	Compensation	Volume	Capitaux (K€)	Position ouverte
C 30 jan 37	1,53	320	4 620	610
C 30 jan 38	1,09	200	2 000	2 537
C 30 jan 39	0,73	0	0	30
C 30 jan 40	0,50	219	1 095	7 300

Le *Wall Street Journal* fournit aussi le volume total négocié sur les calls, les puts, la position ouverte, et ce pour chaque lieu de cotation. Pour le MONEP, ces statistiques se trouvent sur le site www.monep.fr ; un exemple apparaît dans le tableau 8.2. Le volume est en fait le nombre total de contrats échangés ce jour. La position ouverte est le nombre de contrats en vie. Ce nombre change chaque jour puisque les options

sont des contrats qui peuvent être créés à tout moment, il suffit qu'un acheteur et un vendeur soient prêts à les échanger.

8.6 Les transactions

Traditionnellement, les Bourses devaient proposer un lieu suffisamment vaste pour que les opérateurs puissent se rencontrer et échanger les options. Ceci a bien changé ; l'Eurex, le principal marché européen d'actifs dérivés, est complètement électronique, si bien que les traders n'ont même pas besoin de se rencontrer pour échanger[1]. L'International Securities Exchange (www.iseoptions.com) a lancé le premier marché d'actions entièrement électronique aux États-Unis en mai 2000. Le Chicago Board Options Exchange a CBOEdirect, et le CME a GLOBEX. Ces deux derniers sont des systèmes électroniques, mais ils fonctionnent en parfait accord avec leur marché traditionnel.

Les market-makers

La plupart des marchés organisés ont recours aux services de market-makers pour faciliter les échanges. Un market-maker pour une option donnée est un opérateur qui répond aux demandes de prix en affichant un prix d'achat et un prix de vente pour l'option. Le prix *bid* est le prix auquel le market-maker est prêt à acheter et le prix offert, *ask*, est le prix auquel il est prêt à vendre. Quand ces deux prix sont affichés, le market-maker ne sait pas si le trader qui a demandé ces prix est acheteur ou vendeur de l'option. Le prix de vente (ask) exigé par le market-maker est toujours supérieur au prix (bid) auquel il est prêt à acheter. L'écart entre ces deux prix est appelé écart de prix achat-vente, mais plus couramment *bid-ask spread* ou *bid-offer spread*. Les autorités de marché fixent en général une limite supérieure au bid-ask spread de façon à favoriser la liquidité.

L'existence de market-makers assure que les ordres d'achat et de vente arrivant sur le marché trouveront une contrepartie et pourront être exécutés sans délai. Les market-makers ont donc pour fonction de fournir de la liquidité au marché. Ce service est rémunéré par le bid-ask spread. Certaines des techniques de couverture décrites dans les chapitres ultérieurs sont couramment utilisées par les market-makers.

Dénouement des positions

Un investisseur qui achète une option peut déboucler sa position en passant un ordre de vente sur le même contrat. De même, un investisseur qui vend une option peut annuler sa position en achetant un contrat d'option de mêmes caractéristiques. Lorsqu'une transaction a lieu sur un contrat, si aucun des deux investisseurs n'est en train d'annuler une position prise précédemment, la position ouverte sur ce contrat

1. Ce marché entièrement électronique est établi à Chicago.

augmente d'une unité. Si les deux contreparties sont en train d'annuler une position précédemment prise, la position ouverte diminue d'une unité. On peut donc bien dire que la position ouverte est une mesure du nombre de contrats « vivants » à un instant donné.

8.7 Coûts de transaction

Les ordres d'achat et de vente qui peuvent être placés sur le marché d'options auprès des intermédiaires (brokers) sont du même type que ceux qui concernent le marché des futures (voir section 2.7). Un ordre à tout prix est destiné à être exécuté immédiatement ; un ordre à cours limité définit le cours le moins favorable auquel l'ordre peut être exécuté, etc.

Pour un investisseur final, les frais peuvent varier d'un intermédiaire à l'autre. Ceux qu'on appelle les discount-brokers proposent en général des tarifs plus avantageux que les intermédiaires classiques. Les commissions se décomposent généralement en coût fixe et coût proportionnel. Le tableau 8.2 illustre la structure des commissions demandées par un discount-broker. Par exemple, l'achat de huit contrats quand l'option cote 3 € coûterait 20 € +(0,02 × 2 400 €) = 68 € en commissions.

Tableau 8.3 : Structure des commissions d'un discount-broker

Montant de la transaction	**Commission***
< 2 500 €	20 € + 2 % du montant échangé
de 2 500 € à 10 000 €	45 € + 1 % du montant échangé
> 10 000 €	120 € + 0,25 % du montant échangé

*La commission maximale est de 30 € par contrat pour les cinq premiers, plus 20 € par contrat pour les suivants. La commission minimale est de 30 € par contrat pour le premier et de 2 € pour les suivants.

Lorsqu'une position en options est dénouée en prenant la position symétrique, les frais sont à nouveau payés. Si l'option est exercée, les commissions sont identiques à celles que paierait le client s'il opérait sur le marché de l'action sous-jacente, c'est-à-dire 1 % à 2 % de la valeur des actions.

Considérons un investisseur qui achète un call avec un prix d'exercice de 50 € alors que l'action cote 50 €. L'option vaut 4,5 € et chaque contrat porte sur 100 titres, c'est-à-dire que le contrat coûte 450 €. En utilisant le tableau 8.2, l'achat d'un contrat coûte toujours 30 € (puisque la commission minimale est de ce montant pour le premier contrat). Supposons maintenant que le cours de l'action augmente et que l'option soit exercée quand le cours de l'action atteint 60 €. Si l'investisseur paye 1,5 % de frais sur les actions, la commission payée à l'exercice de l'option est :

$$0{,}015 \times 60 \times 100 = 90 \text{ €}$$

La commission totale est donc de 120 € pour l'achat-vente, et le profit net de l'investisseur s'écrit :

$$1\ 000 - 450 - 120 = 430\ €$$

Il faut cependant noter que revendre l'option pour 10 €, au lieu d'exercer, aurait économisé 60 € de commissions (la commission payée en revendant l'option aurait encore été de 30 € dans notre exemple). En général, la structure des frais incite l'investisseur à revendre les options plutôt qu'à les exercer.

Un coût implicite existe cependant sur les marchés d'options (et sur le marché des actions), à savoir le bid-ask spread. Supposons que, dans l'exemple précédent, le prix bid soit de 4 € alors que le prix ask est de 4,5 € au moment où l'option est achetée. On peut considérer que son prix « correct » se situe à mi-chemin entre le bid et le ask, soit 4,25 €. Le coût pour l'acheteur ou le vendeur peut être considéré comme égal à la valeur absolue de la différence entre le prix correct et le prix d'achat ou de vente, c'est-à-dire 0,25 €, soit 25 € par contrat.

8.8 Les appels de marge

Aux États-Unis, quand des actions sont achetées, elles sont payées soit au comptant, soit en empruntant une partie par l'intermédiaire d'un compte de deposit (on parle alors de « buying on margin »). Le dépôt initial correspond en général à 50 % de la valeur des actions. Par la suite, ce compte doit être crédité d'au moins 25 % de la valeur des titres. Ce compte fonctionne de la même façon que celui qui est utilisé pour les contrats futures (voir chapitre 2).

Lorsque des options sont achetées, qu'il s'agisse de puts ou de calls, le paiement est immédiat si leur date d'échéance est inférieure ou égale à 9 mois. Il n'y a donc pas de risque de défaut futur de l'acheteur puisque ses flux de trésorerie seront positifs ou nuls. Les options dont l'échéance est supérieure à 9 mois peuvent être acquises avec un appel de marge d'au moins 25 % de la valeur de l'option.

Un vendeur d'options, sur un marché organisé, doit maintenir des fonds sur un compte de deposit ou de marge. L'intermédiaire du client et l'autorité de marché veulent tous les deux s'assurer par ce biais que l'investisseur ne fera pas défaut si l'option est exercée par l'acheteur. En effet, la structure des contrats fait que les flux de trésorerie du vendeur de l'option sont négatifs ou nuls à la date d'exercice. Le montant de la marge peut être variable selon le marché et selon le type de position.

Dans la suite, nous décrivons le système d'appel de marge du CBOE, qui est plus simple que celui du MONEP mais qui a les mêmes objectifs. Le système du MONEP nécessite l'utilisation d'un modèle théorique d'évaluation qui sera abordé dans les chapitres suivants.

La vente d'options nues

Une option nue est une option qui n'est pas couverte par une position sur l'action en sens opposé. La marge initiale, appelée deposit, sur la vente d'un call nu est le maximum des deux montants suivants :

1. 100 % du montant de la vente plus 20 % de la valeur des actions sous-jacentes moins éventuellement le montant duquel l'option est en dehors de la monnaie.
2. 100 % du montant de la vente plus 10 % de la valeur des actions sous-jacentes.

Pour la vente d'un put nu, la marge initiale est le maximum de :

1. 100 % du montant de la vente plus 20 % de la valeur des actions sous-jacentes moins éventuellement le montant duquel l'option est en dehors de la monnaie.
2. 100 % du montant des ventes plus 10 % du prix d'exercice.

Les 20 % sont remplacés par 15 % lorsqu'il s'agit d'options sur un indice largement diversifié, car un indice de ce type est en général moins volatil qu'une action isolée.

Exemple 8.3

Un investisseur vend quatre calls nus cotés 5 \$, chacun portant sur 100 unités de l'action sous-jacente. Le prix d'exercice est 40 \$ et le prix de l'action 38 \$. Comme l'option est en dehors de la monnaie de 2 \$, le deposit est égal au maximum de :

$$400 \times (5 + 0{,}2 \times 38 - 2) = 4\ 240\ \$$$

et :

$$400 \times (5 + 0{,}1 \times 38) = 3\ 520\ \$$$

C'est donc 4 240 \$ que le vendeur devra déposer. Si l'option avait été un put, elle serait dans la monnaie de 2 \$ et le deposit serait égal à :

$$400 \times (5 + 0{,}2 \times 38) = 5\ 040\ \$$$

Dans les deux cas, les 2 000 \$ de premium font partie du deposit.

Le même calcul est fait chaque jour avec les nouveaux prix d'options à la place du montant de premium utilisé dans le calcul précédent et les nouveaux cours de support. Des fonds peuvent être retirés du compte de deposit par le client lorsque le dépôt requis diminue. À l'inverse, un appel de marge est réalisé lorsque le dépôt requis augmente. Sur le marché français, le principe est le même mais la méthodologie est différente. Les autorités de marché calculent la valeur théorique qu'aurait l'option (par un modèle d'évaluation) le lendemain si le mouvement le plus défavorable était observé sur le support. Les appels de marge sont réalisés sur cette base. Il s'agit en quelque sorte d'avoir toujours vingt-quatre heures d'avance pour pouvoir déboucler les positions sans dommage si le vendeur ne peut plus faire face aux appels de marge.

Les autres règles

Dans le chapitre 10, nous examinerons les stratégies utilisant des options telles que les calls couverts, les protective puts, les spreads, les combinaisons, les straddles et les

strangles. Le CBOE a des règles bien spécifiques pour la détermination des deposits lorsque de telles stratégies sont établies. Elles sont décrites dans le *CBOE Margin Manual* disponible sur le site internet du CBOE (www.cboe.com).

Pour prendre un exemple de détermination de deposit, considérons un investisseur qui vend un call couvert. Ce type de stratégie correspond à la vente de calls et à l'achat simultané d'actions sous-jacentes. C'est donc bien moins risqué que la vente de calls nue puisque le pire qui pourrait arriver serait la vente des actions à un prix inférieur au prix de marché (du fait de l'exercice de l'option par l'acheteur). Par conséquent, les calls couverts ne requièrent pas de deposit. Toutefois, l'investisseur peut emprunter un montant égal à $0{,}5 \times \min(S, K)$, à la place du montant correspondant, traditionnellement 50 % de la valeur de l'action.

8.9 La chambre de compensation

La chambre de compensation (CC) joue, sur un marché d'options, le même rôle que sur un marché de contrats futures (voir chapitre 2). Elle a pour objet de garantir que les vendeurs d'options pourront faire face à leurs obligations. Elle enregistre donc toutes les positions. Elle comporte un nombre limité de membres, et toutes les transactions passent par l'un de ses membres. Si un courtier n'est pas lui-même membre de la chambre de compensation, il doit passer par un membre de cette chambre pour l'enregistrement et le suivi des transactions. Les membres doivent satisfaire des conditions minimales en termes de capitaux propres et contribuent à un fonds spécial destiné à se substituer à un membre qui fait défaut.

Le vendeur d'une option doit alimenter un compte de deposit chez son courtier[2]. Ce dernier alimente lui-même un compte de deposit auprès d'un membre de la CC qui enregistre la transaction. De même, ce membre a un compte de deposit auprès de la CC.

L'exercice d'une option

Lorsqu'un client informe son courtier de sa volonté d'exercer une option, celui-ci avertit à son tour le membre de la CC qui enregistre ses transactions. Ce dernier place alors un ordre d'exercice auprès de la CC. Celle-ci choisit aléatoirement un vendeur. Si l'option est un call, l'investisseur choisi doit vendre l'action au prix d'exercice du contrat. Si c'est un put, il doit acheter l'action à ce prix. On dit que le vendeur d'option est assigné. Quand une option est exercée, la position ouverte diminue d'une unité. À la date d'échéance, tous les contrats dans la monnaie devraient être exercés, sauf si les coûts de transaction sont si élevés qu'ils annulent le flux engendré par l'exercice.

2. Les appels de marge décrits dans la section précédente représentent les exigences minimales définies par la CC. Un courtier peut majorer les appels de marge auprès de ses clients, mais il ne peut les minorer. Certains courtiers n'autorisent même pas leurs clients à vendre des options si celles-ci ne sont pas intégralement couvertes.

Les courtiers exercent donc automatiquement ces options quand c'est dans l'intérêt des clients.

8.10 Warrants, bons de souscription, stock-options et obligations convertibles

D'ordinaire, quand un call sur action est exercé, le vendeur de l'option acquiert les actions sur le marché secondaire et les revend au prix d'exercice à l'investisseur détenteur du call. La société dont les actions sont supports des contrats n'intervient en aucune manière. Les warrants, bons de souscription et stock-options fonctionnent différemment. Ces titres sont vendus ou cédés par la société elle-même. Quand ils sont exercés, l'entreprise émet de nouvelles actions et les vend au prix d'exercice. Ceci entraîne une augmentation du nombre de titres en circulation.

Les warrants et bons de souscription sont souvent émis en même temps qu'un emprunt obligataire ou lors d'une augmentation de capital, pour rendre ces opérations plus attractives. En général, ces titres ont une durée de vie de plusieurs années et sont cotés séparément de l'obligation ou de l'action à laquelle ils étaient attachés au moment de l'émission.

Les stock-options sont des options d'achat émises par la société pour les cadres dirigeants afin qu'ils agissent dans l'intérêt des actionnaires (voir encadré 8.2). Il y a eu récemment une controverse pour savoir si les stock-options devaient être considérées comme une charge du compte de résultat des sociétés. Les comptables arguent du fait qu'il n'y a aucune façon fiable de le faire. Les experts en produits dérivés répliquent que les stock-options peuvent être évaluées au moins aussi précisément que les autres produits dans la comptabilité financière. L'évaluation des warrants et des stock-options est présentée au chapitre 13.

Une obligation convertible est une obligation pouvant être convertie en actions pendant certaines périodes, à une parité déterminée. Il s'agit donc d'une obligation contenant une option d'achat sur les actions de la société émettrice. Ces obligations ont en commun avec les bons de souscription et les stock-options que l'exercice entraîne une augmentation du nombre d'actions en circulation. Les obligations convertibles sont analysées de manière plus détaillée au chapitre 21.

Encadré 8.2 Les stock-options

Les stock-options sont devenues très populaires pour compléter la rémunération des dirigeants et des autres employés dans les années 1990 et au début des années 2000. Dans le cas général, un dirigeant reçoit un certain nombre d'options d'achat portant sur les actions de la société pour laquelle il travaille.

Ces options sont à la monnaie au moment de leur attribution. Elles peuvent avoir une durée de vie de 10 ans ou plus, mais un délai empêche leur exercice avant une période d'acquisition des droits (*vesting period*) de 5 ans au maximum. Si le dirigeant quitte l'entreprise pendant la période d'acquisition des droits, les options sont perdues. Par contre, s'il la quitte après cette période, les options dans la monnaie sont exercées immédiatement, les autres sont perdues. Les stock-options ne peuvent jamais être vendues à qui que ce soit.

Une des raisons expliquant le succès des stock-options est liée à leur traitement comptable. Aux États-Unis, conformément à la norme APB25 du référentiel US GAAP, le coût de compensation enregistré comme une charge du compte de résultat était habituellement la valeur intrinsèque. Mais la plupart des stock-options étant à la monnaie lors de leur émission, leur valeur intrinsèque est nulle. La norme FAS 123, apparue en 1995, encourage les entreprises, sans les contraindre, à comptabiliser la valeur de marché de ces options ou, à défaut, à la signaler en annexe. Au début, très peu de sociétés choisirent cette solution volontairement, mais les choses changèrent au début des années 2000 avec la publicité faite autour de ces stock-options.

Selon les normes françaises, aucun retraitement comptable n'est prévu. Mais les normes comptables internationales ont évolué et l'application des normes IAS/IFRS nécessite depuis 2005 l'enregistrement de la valeur de marché des stock-options. Les stock-options sont généralement exercées avant leur date d'échéance et, par conséquent, bien plus tôt que n'importe quelle option d'achat négociable. La raison en est qu'elles ne peuvent être vendues par leur propriétaire. Si un dirigeant souhaite obtenir des liquidités grâce à ces stock-options, il n'a d'autre choix que d'exercer les options et de vendre les titres ainsi obtenus. Aussi l'évaluation des stock-options n'est-elle pas aussi simple que celle des options traditionnelles : elle nécessite de pouvoir modéliser le comportement d'exercice anticipé des dirigeants.

8.11 Les marchés de gré à gré (OTC)

La majeure partie de ce chapitre était consacrée aux marchés organisés, mais les marchés OTC se sont considérablement développés depuis le début des années 1980 pour être aujourd'hui plus importants que les marchés organisés en termes de volumes de transactions. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 1, les institutions financières et les trésoriers d'entreprise négocient par téléphone sur les marchés OTC. Il y a en fait une large gamme de sous-jacents sur ces marchés. En particulier les devises et les taux font l'objet de volumes importants. L'inconvénient essentiel d'un marché OTC réside dans le défaut possible du vendeur de l'option. L'acheteur s'expose à ce risque. Pour le diminuer, les opérateurs de ce marché conviennent d'un ensemble de règles, comme la présentation de garanties par le vendeur (introduites dans la section 2.4).

Les contrats négociés sur le marché OTC sont souvent structurés de façon à répondre à des besoins précis de la clientèle. Cela peut se traduire par des dates d'échéance, des prix d'exercice ou des tailles de contrats inhabituels. Dans d'autres cas, c'est la définition même des flux engendrés par l'option qui n'est pas standard. On parle alors d'options exotiques. Le chapitre 22 en donne un certain nombre d'exemples.

Résumé

Il existe deux types d'options, calls et puts. Un call (put) donne le droit à son détenteur d'acheter (de vendre) l'actif sous-jacent à un prix fixé, à une date spécifiée. Il y a quatre positions élémentaires sur les marchés d'options : l'achat de call, l'achat de put, la vente de call, la vente de put. Les actifs sous-jacents les plus courants sont les actions, les indices, les devises et les contrats futures.

Les autorités de marché standardisent les contrats traités, en particulier en ce qui concerne la taille, la date d'échéance et le prix d'exercice. Des variations sont cependant observables d'un marché à l'autre et d'un titre à l'autre en ce qui concerne la taille des contrats, car celle-ci dépend aussi du cours du sous-jacent.

À un même instant sont cotées des options pour diverses échéances, leur nombre variant de trois à cinq dans le cas général. De même, plusieurs séries de prix d'exercice différents font l'objet de négociations simultanées ; l'intervalle entre prix d'exercice successifs est variable, selon le prix du sous-jacent. Quand une série d'options est ouverte, le prix d'exercice est en général proche du cours du support.

Un contrat n'est normalement pas ajusté pour le paiement de dividendes. Cependant, il l'est en cas d'opérations sur titres. L'objectif est alors de maintenir inchangé l'engagement des deux parties.

La plupart des marchés d'options fonctionnent avec des market-makers. Ceux-ci cotent des prix d'achat (bid) et de vente (ask) afin d'améliorer la liquidité du marché et d'assurer la réalisation des transactions sans délai. Ils réalisent eux-mêmes un profit par la différence entre prix ask et prix bid. Les autorités de marché spécifient les bornes supérieures du bid-ask spread.

Les vendeurs d'options doivent maintenir des fonds chez leur courtier pour faire face à leurs obligations. Si le courtier n'est pas un membre de la chambre de compensation, il doit avoir un compte auprès d'un membre, qui lui-même en a un auprès de la CC. Celle-ci est responsable de l'enregistrement de l'ensemble des ordres, des assignations, etc.

Un volume important de transactions en options n'est pas réalisé sur les marchés organisés, mais par téléphone sur le marché OTC. L'avantage est que les produits négociés sur ce marché peuvent être structurés sur mesure par une institution financière, pour un trésorier d'entreprise par exemple.

Références complémentaires

Arzac E. R., « PERCs, DECs and Other Mandatory Convertibles », *Journal of Applied Corporate Finance*, 10, 1 (1997), 54-63.

Core J. E. et W. R. Guay, « Stock Option Plan for Non-executive Employees », *Journal of Financial Ecoonomics*, 61, 2 (2001), 253-287.

Cox J. C. et M. Rubinstein, *Options Markets*, Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall, 1985.

Hull J. C. et A. White, « How to Value Employee Stock Options », *Financial Analysts Journal*, 60, 1 (janvier/février 2004), 114-119.

Rubinstein M., « On the Accounting Valuation of Employee Stock Options », *Journal of Derivatives*, 3, 1 (automne 1995), 8-24.

Problèmes et exercices

8.1 Un investisseur achète un put européen sur une action pour 3 €. Le cours de l'action est de 42 € et le prix d'exercice de 40 €. Dans quels cas l'investisseur réalise-t-il un gain ? Dans quel cas l'option sera-t-elle exercée ? Réalisez un schéma montrant les variations des gains de l'investisseur en fonction du cours de l'action à la date d'échéance de l'option.

8.2 Un investisseur vend un call européen sur une action pour 4 €. Le cours de l'action est de 47 € et le prix d'exercice de 50 €. Dans quels cas l'investisseur réalise-t-il un gain ? Dans quel cas l'option sera-t-elle exercée ? Réalisez un schéma montrant les variations des gains de l'investisseur en fonction du cours de l'action à la date d'échéance de l'option.

8.3 Un investisseur vend un call européen de prix d'exercice K et de date d'échéance T et achète un put de même prix d'exercice et de même échéance. Décrivez la position de l'investisseur.

8.4 Expliquez pourquoi les intermédiaires exigent un deposit quand les clients vendent des options, alors qu'ils n'en font rien quand le client achète une option.

8.5 Quelles sont les échéances cotées le 1[er] avril et le 30 mai pour une option qui appartient au cycle février, mai, août, novembre ?

8.6 Une entreprise annonce une division de titres 2 pour 1. Comment est modifié un call de prix d'exercice 60 $?

8.7 En quoi une stock-option est-elle différente d'une option sur action traditionnelle, de type américain, négociée sur un marché organisé ou de gré à gré ?

8.8 Un trésorier d'entreprise construit une couverture qui fait intervenir des options de change. Quels sont les avantages et inconvénients à utiliser :

a. Un marché organisé.

b. Un marché OTC.

8.9 Considérons un call européen coûtant 5 €, permettant d'acheter une action 100 € et détenu jusqu'à son échéance. Dans quels cas son détenteur réalise-t-il un gain ? Dans quel cas l'option sera-t-elle exercée ? Réalisez un schéma montrant de quelle manière le gain d'une position longue dans l'option dépend du cours de l'action à l'échéance de l'option.

8.10 Considérons un put européen coûtant 8 €, permettant de vendre une action 60 € et détenu jusqu'à son échéance. Dans quels cas le vendeur du put réalise-t-il un gain ? Dans quel cas l'option sera-t-elle exercée ? Réalisez un schéma montrant de quelle manière le gain d'une position courte dans l'option dépend du cours de l'action à l'échéance de l'option.

8.11 Décrivez la valeur à l'échéance du portefeuille suivant : une nouvelle position longue sur un forward portant sur un actif et une position longue sur un put européen portant sur le même actif, de même échéance que le forward, de prix d'exercice égal à la valeur du forward au moment de la constitution du portefeuille. Montrez que le put européen a la même valeur qu'un call européen portant sur le même actif, de même échéance et de même prix d'exercice.

8.12 Un trader achète un call de prix d'exercice 45 € et un put de prix d'exercice 40 €. Les deux options ont la même date d'échéance. Le call vaut 3 € et le put 4 €. Réalisez un schéma montrant les variations du gain du trader en fonction de la valeur de l'actif sous-jacent.

8.13 Expliquez pourquoi une option américaine vaut toujours au moins autant qu'une option européenne de mêmes caractéristiques.

8.14 Expliquez pourquoi la valeur d'une option américaine est toujours supérieure ou égale à sa valeur intrinsèque.

8.15 Expliquez précisément la différence entre un achat et une vente d'option.

8.16 Le trésorier d'une entreprise tente de choisir entre options et contrats forward pour couvrir le risque de change de son entreprise. Expliquez les avantages et inconvénients relatifs de ces deux solutions.

8.17 Considérons un call donnant le droit d'acheter 500 actions au prix d'exercice de 40 $ et d'échéance 4 mois. Expliquez comment sont modifiés les termes du contrat si :

a. Un dividende en actions de 10 % est payé.

b. Un dividende en cash de 10 % du cours de l'action est payé.

c. Une division de titres 4 pour 1 est annoncée.

8.18 « Si la plupart des calls sur une action sont dans la monnaie, il est probable que c'est dû à la hausse rapide du cours de l'action dans les derniers mois. » Commentez cette affirmation.

8.19 Quel est l'effet d'un dividende non anticipé sur (a) le prix d'un call, (b) le prix d'un put ?

8.20 Les options sur General Motors sont sur un cycle mars, juin, septembre, décembre... Quelles options sont traitées le (a) 1er mars, (b) 30 juin, (c) 5 août ?

8.21 Expliquez pourquoi le bid-ask spread représente réellement un coût pour les investisseurs en options.

8.22 Un investisseur vend cinq calls nus. Le premium est de 3,5 $, le prix d'exercice est de 60 $ et le prix de l'action de 57 $. Quel est le deposit initial ?

Questions complémentaires

8.23 Une action cote 40 €. Le premium d'un put européen d'échéance 1 an sur cette action est 7 € avec un prix d'exercice à 30 €, et le premium d'un call de même échéance et de prix d'exercice 50 € est 5 €. Supposons que l'investisseur achète 100 actions, vende un call et achète un put. Représentez graphiquement l'évolution de la valeur de la position pendant l'année à venir. Comment votre réponse est-elle modifiée si l'investisseur achète 100 actions, vend deux contrats de calls et achète deux contrats de puts ?

8.24 « Si une société ne fait pas mieux que ses concurrents mais que le marché est à la hausse, les dirigeants s'enrichissent par les stock-options qu'ils détiennent. Cela n'a pas de sens. » Commentez ce point de vue. Pouvez-vous proposer des incitations autres que les stock-options pour tenir compte de cette remarque ?

8.25 Utilisez DerivaGem pour calculer la valeur d'un put américain sur une action ne payant pas de dividendes quand l'action cote 30 €, le prix d'exercice est 32 €, le taux sans risque 5 %, la volatilité 30 % et la durée de vie 1,5 an. Choisissez comme type d'option « binomiale américaine » et 50 périodes.

a. Quelle est la valeur intrinsèque de l'option ?

b. Quelle est la valeur-temps de l'option ?

c. Que signifierait une valeur-temps nulle ? Quelle est la valeur d'une option dont la valeur-temps est nulle ?

d. En utilisant une méthode d'essai-erreur, déterminez le cours de l'action pour lequel la valeur-temps du put est nulle.

8.26 Le 20 juillet 2004, Microsoft surprit le marché en annonçant le versement d'un dividende de 3 $. La date de détachement du dividende était le 17 novembre 2004 et la date de paiement le 2 décembre 2004. Le cours de l'action à l'époque était d'environ 28 $. L'entreprise modifia les caractéristiques des stock-options de ses employés afin d'ajuster le prix d'exercice de la façon suivante :

$$\text{Prix d'exercice avant dividende} \times \frac{\text{Cours de clôture} - 3{,}00\ \$}{\text{Cours de clôture}}$$

Le nombre d'actions couvert par chaque stock-option en vie fut ajusté par :

$$\text{Nombre d'actions avant dividende} \times \frac{\text{Cours de clôture}}{\text{Cours de clôture} - 3{,}00\ \$}$$

Le « cours de clôture » correspond au cours de clôture de l'action Microsoft sur le Nasdaq le dernier jour de cotation précédant la date de détachement du dividende. Évaluez cet ajustement. Comparez-le avec le système utilisé par les marchés pour ajuster les dividendes extraordinaires (voir encadré 8.1).

Chapitre 9

Les propriétés des options sur actions

Dans ce chapitre, nous analysons les facteurs influençant le prix des options sur actions. Nous utilisons de nombreux arguments d'arbitrage pour explorer les relations liant les prix des options européennes, les prix des options américaines et le prix de l'action sous-jacente. La plus importante de ces relations est la parité call-put, qui établit le lien entre le prix d'une option d'achat européenne (un call européen) et le prix d'une option de vente européenne (un put européen).

Ce chapitre examine les conditions d'exercice prématuré des options américaines. Nous montrons qu'il n'est jamais optimal d'exercer, avant l'échéance, un call américain sur une action ne versant pas de dividendes. Par contre, l'exercice prématuré d'un put américain sur une telle action peut se révéler optimal.

9.1 Les facteurs influençant le prix des options

Il existe six facteurs influençant le prix des options sur actions :

1. Le cours de l'action, S_0.

2. Le prix d'exercice, K.

3. Le temps restant à courir jusqu'à l'échéance, T, mesuré usuellement en années.

4. La volatilité du prix de l'action, σ.

5. Le taux d'intérêt sans risque annuel, r.

6. Les dividendes prévus durant la durée de vie de l'option.

Dans cette section, nous nous intéressons à ce qu'il advient du prix des options lorsque l'un de ces facteurs change tandis que les autres restent constants. Les résultats sont résumés dans le tableau 9.1.

Les graphiques 9.1 et 9.2 montrent comment les prix d'une option d'achat et d'une option de vente européennes dépendent des cinq premiers facteurs dans le cas où $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 5$ %, $\sigma = 30$ % et $T = 1$, et qu'il n'y a pas de versement de dividendes. Dans ce cas, le prix du call est de 7,116 € et le prix du put est de 4,677 €.

Prix de l'action et prix d'exercice

Si une option d'achat est exercée à une date future, le flux engendré, appelé « payoff », est égal à la différence entre le cours de l'action et le prix d'exercice. Par conséquent, la valeur d'un call augmente lorsque le cours de l'action croît. Elle est faible quand le prix d'exercice est élevé. Pour une option de vente, le payoff à l'exercice est égal à la différence entre le prix d'exercice et le cours de l'action. La valeur de ce type d'option diminue si le prix de l'action s'accroît. Elle augmente, au contraire, lorsque le prix d'exercice est plus élevé. Les graphiques 9.1a, b, c, d illustrent la façon dont les valeurs d'un call et d'un put dépendent du cours des actions et du prix d'exercice.

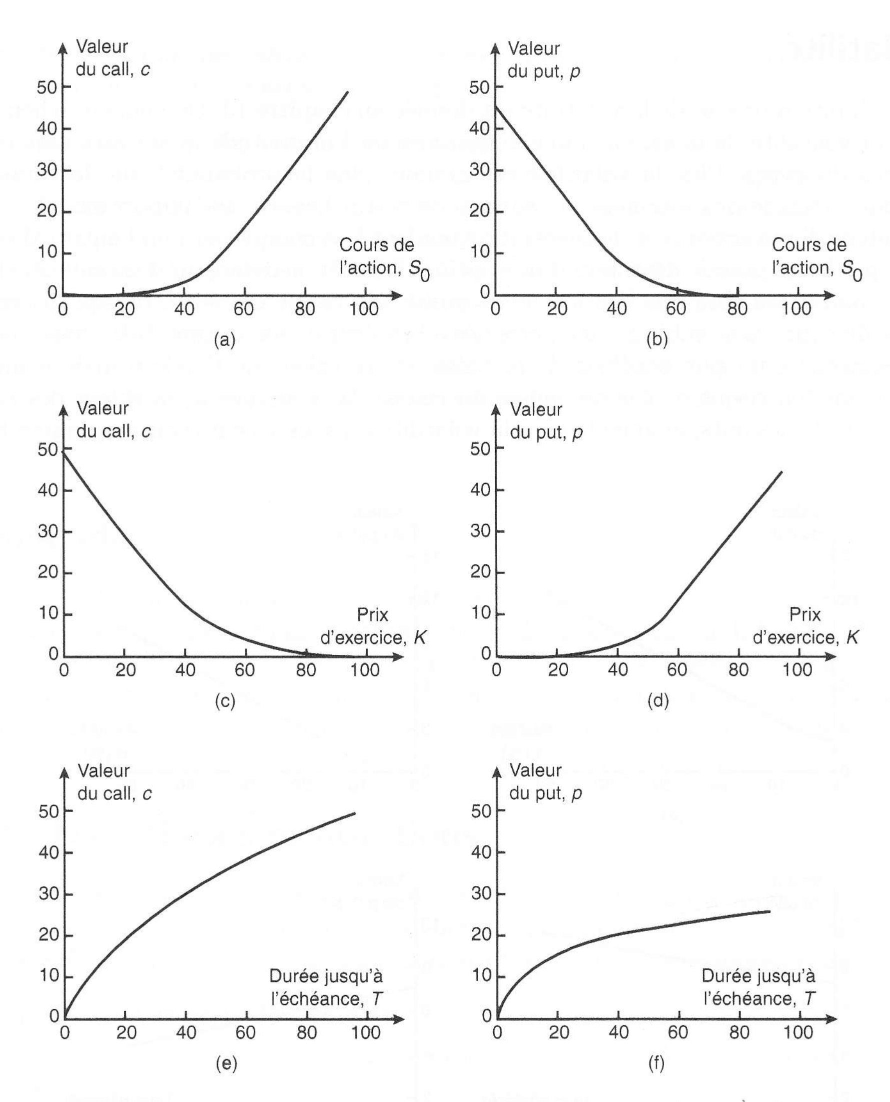
Tableau 9.1 : Résumé des effets de l'augmentation d'une des variables (lorsque les autres restent fixes)* sur le prix des options sur actions

Variable	Call européen	Put européen	Call américain	Put américain
Cours actuel de l'action	+	−	+	−
Prix d'exercice	−	+	−	+
La date d'échéance	?	?	+	+
Volatilité	+	+	+	+
Taux d'intérêt sans risque	+	−	+	−
Dividendes	−	+	−	+

* « + »signifie qu'une croissance de la variable provoque une augmentation de la valeur de l'option ; « − » signifie qu'une augmentation de la variable entraîne une baisse de la valeur de l'option ; « ? » signifie que la relation est incertaine.

Date d'échéance

Étudions à présent les effets de la date d'échéance de l'option. Les options d'achat américaines, aussi bien que les options de vente américaines, voient leur valeur s'accroître lorsque la date de maturité s'éloigne, c'est-à-dire quand la durée restant à courir jusqu'à l'échéance augmente. Considérons deux options qui diffèrent seulement par la date d'échéance. Le propriétaire de l'option à durée de vie plus longue profite de toutes les opportunités d'exercice ouvertes aux propriétaires des options à durée de vie plus courte, et plus encore. La valeur de l'option à échéance longue est donc toujours supérieure à celle de l'option à échéance plus courte. Les graphiques 9.1e et 9.1f illustrent de quelle manière la valeur des options d'achat et de vente dépend de la date d'échéance.

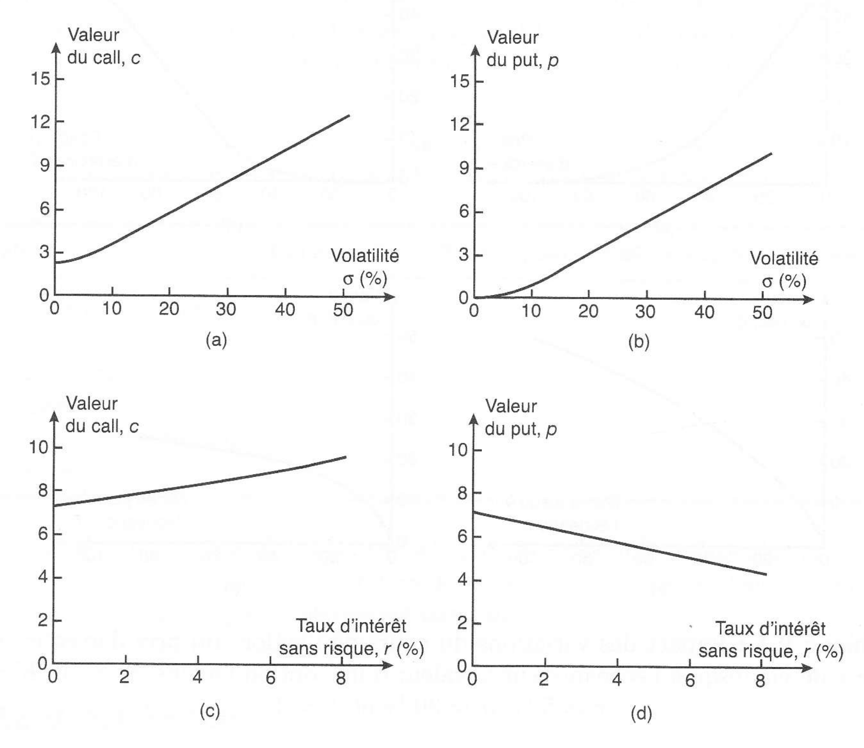


Graphique 9.1 : Impact des variations du cours de l'action, du prix d'exercice et de la durée de vie jusqu'à l'échéance sur la valeur d'une option lorsque $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 5$ %, $\sigma = 30$ % et $T = 1$.

Bien que la valeur des calls européens, comme celle des puts, augmente généralement avec l'échéance, ce n'est pas toujours le cas. Soient en effet deux calls européens portant sur une même action : l'un a une date d'échéance à 1 mois, l'autre à 2 mois. Supposons qu'un important dividende soit attendu dans six semaines. Le détachement de ce dividende provoquera une baisse du cours de l'action. Ce fait est intégré dans la valeur de l'option à échéance 2 mois, mais pas dans celle à échéance 1 mois qui n'est pas concernée par le détachement du dividende. Ainsi, l'option à courte échéance peut valoir davantage que celle à échéance longue.

Volatilité

Une définition précise de la volatilité est donnée au chapitre 13. De manière schématique, la volatilité de la valeur d'une action mesure l'incertitude quant aux variations futures du cours. Plus la volatilité est grande, plus la probabilité que le cours de l'action atteigne des sommets, ou subisse de fortes baisses, est importante. Pour le détenteur d'une action, ces deux résultats tendent à se compenser l'un l'autre. Mais ce n'est pas le cas pour le détenteur d'une option. En effet, le détenteur d'un call bénéficie d'une hausse du cours de l'action, mais limite son risque de perte, puisqu'en cas de chute du cours, il ne subit qu'une perte liée à la valeur de son option. Réciproquement, le détenteur d'un put bénéficie de la baisse de la valeur de l'action, mais il limite également son risque en cas de hausse du cours. Par conséquent, la valeur des calls, comme celle des puts, augmente avec la volatilité du sous-jacent (voir graphiques 9.2a et b).



Graphique 9.2 : Impact des variations de la volatilité σ et du taux d'intérêt sans risque sur la valeur d'une option lorsque $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 5\%$, $\sigma = 30$ % et $T = 1$.

Taux d'intérêt sans risque

Le taux d'intérêt sans risque affecte la valeur de l'option d'une façon moins évidente. Lorsque les taux d'intérêt augmentent, l'espérance de rendement des actions, attendu par les investisseurs, tend à s'élever également. Mais la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs reçus par les détenteurs d'options diminue. L'impact combiné de ces

deux effets entraîne une baisse de la valeur des options de vente et un accroissement de la valeur des options d'achat (voir graphiques 9.2c, d).

Il est important de souligner que nous envisageons ici une variation des taux d'intérêt tandis que toutes les autres variables demeurent inchangées. Nous supposons notamment que les taux d'intérêt varient alors que le cours des actions reste identique. En réalité, lorsque les taux d'intérêt augmentent (diminuent), le cours des actions a tendance à diminuer (augmenter). L'effet net issu de l'augmentation du taux d'intérêt et de la diminution de la valeur de l'action l'accompagnant peut être une baisse de la valeur de l'option d'achat et une hausse de la valeur de l'option de vente. Réciproquement, l'effet net d'une diminution du taux d'intérêt et d'une augmentation du cours de l'action peut être une hausse de la valeur du call et une baisse de la valeur du put.

Dividendes

Les dividendes entraînent une baisse du cours de l'action à la date de détachement. L'annonce de ce dernier est une « mauvaise nouvelle »pour la valeur de l'option d'achat et, au contraire, une bonne nouvelle pour celle de l'option de vente. Par conséquent, la valeur d'un call est une fonction décroissante du montant de dividende anticipé et, réciproquement, la valeur d'un put est une fonction croissante du dividende.

9.2 Hypothèses et notations

Les hypothèses de ce chapitre sont analogues à celles qui ont été formulées au chapitre 5, dans le cadre de l'évaluation des contrats à terme. Pour les principaux acteurs du marché, tels que les grandes banques d'investissement, nous supposons que :

1. Il n'y a pas de coûts de transaction.
2. Tous les gains d'opérations (nets de pertes) font l'objet du même taux d'imposition.
3. L'emprunt et le placement sont possibles au taux d'intérêt sans risque unique.

Nous supposons de même que ces acteurs du marché sont prêts à tirer profit de toute opportunité d'arbitrage éventuelle. Comme nous l'avons expliqué aux chapitres 1 et 5, cela signifie aussi que les opportunités d'arbitrage disparaissent très rapidement. Par rapport à ce qui suit, il est alors raisonnable de supposer que de telles opportunités sont absentes.

Nous utiliserons les notations suivantes :

S_0 : cours de l'action à la date 0

K : prix d'exercice de l'option

T : temps restant à courir jusqu'à l'échéance de l'option

S_T : cours de l'action à la date d'échéance

r : taux d'intérêt sans risque annuel, capitalisé en continu, pour un investissement d'une durée T

C : valeur d'un call américain sur une action

P : valeur d'un put américain sur une action

c : valeur d'un call européen sur une action

p : valeur d'un put européen sur une action

Notons que r est le taux d'intérêt nominal, non le taux d'intérêt réel. Nous pouvons, de ce fait, également supposer que $r > 0$; sinon, un investissement sans risque ne procurerait aucun avantage par rapport à des liquidités.

9.3 Bornes supérieures et inférieures pour la valeur des options

Cette section est consacrée à l'étude des bornes supérieures et inférieures de la valeur des options. Ces limites ne dépendent pas des hypothèses formulées à la section 9.1 (à l'exception de $r > 0$). Si la valeur d'une option est au-dessus de sa borne supérieure ou en deçà de sa borne inférieure, il y a alors une opportunité de gain immédiat pour les arbitragistes.

Les bornes supérieures

Une option d'achat américaine ou européenne donne, à son détenteur, le droit d'acheter une action à un certain prix. Quoi qu'il arrive, l'option ne peut jamais valoir plus que l'action qu'elle permet d'obtenir. Par conséquent, le cours de l'action constitue la borne supérieure de la valeur de l'option :

$$c = S_0 \text{ et } C = S_0$$

Si ces relations n'étaient pas vérifiées, un arbitragiste pourrait facilement réaliser un profit sans risque en achetant l'action et en vendant le call.

Une option de vente américaine ou européenne donne, à son détenteur, le droit de vendre une action au prix K. Quoi qu'il advienne du cours de l'action, l'option ne peut jamais valoir plus que la somme K qu'elle permet d'obtenir. Par conséquent :

$$p = K \text{ et } P = K$$

Pour les options européennes, nous savons qu'à la maturité, l'option ne peut valoir plus que K. Aussi, à la date d'aujourd'hui, sa valeur ne peut être supérieure à la valeur actuelle de K :

$$p = Ke^{-rT}$$

Si cette inégalité n'était pas vérifiée, un arbitragiste pourrait réaliser un profit sans risque en vendant l'option et en plaçant la somme ainsi obtenue au taux sans risque.

Les bornes inférieures des prix de calls européens sur des actions ne versant pas de dividendes

Une des bornes inférieures de la valeur d'un call européen sur une action ne versant pas de dividendes est :

$$S_0 - Ke^{-rT}$$

Avant de présenter un raisonnement formel, considérons un exemple numérique.

Soit $S_0 = 20$ €, $K = 18$ €, $r = 10$ % et $T = 1$. Dans ce cas, on a :

$$S_0 - Ke^{-rT} = 20 - 18e^{-0,1} = 3,71$$

soit 3,71 €. Supposons que la valeur du call soit de 3,00 €, c'est-à-dire moins que le minimum théorique de 3,71 €. Un arbitragiste peut acheter le call et vendre l'action à découvert pour encaisser un gain net de 20,00 € – 3,00 € = 17,00 €. S'ils sont investis à 10 % pendant un an, ces 17,00 € permettent d'obtenir $17e^{0,1} = 18,79$ €. Au bout d'une année, l'option arrive à échéance. Si le cours de l'action vient à dépasser 18,00 €, l'arbitragiste exercera l'option afin d'acheter l'action à 18,00 €, dénouera sa vente à découvert et encaissera un profit de :

$$18,79 - 18,00 = 0,79 \text{ €}$$

Si le cours de l'action devient inférieur à 18,00 €, l'action sera achetée sur le marché et la position de vente à découvert sera dénouée. L'arbitragiste dégagera alors un profit supérieur. Par exemple, si le cours de l'action est de 17,00 €, le gain de l'arbitragiste est de :

$$18,79 - 17,00 = 1,79 \text{ €}$$

Pour le modèle plus général, considérons les portefeuilles suivants :

Portefeuille A : une option d'achat européenne et un montant de liquidités égal à Ke^{-rT}

Portefeuille B : une action

Dans le portefeuille A, la trésorerie disponible, si elle est investie au taux sans risque, fructifiera jusqu'à atteindre le montant K à la date T. Si $S_T > K$, l'option d'achat est exercée à l'échéance. Elle permet ainsi d'acheter, avec le montant K, une action de valeur S_T. La valeur du portefeuille A est donc égale à S_T dans ce cas. Si, au contraire, $S_T < K$, le call ne vaut plus rien à l'échéance et la valeur du portefeuille est alors égale à K. Pour résumer, à la date T, la valeur du portefeuille A est de :

$$\max(S_T, K)$$

Le portefeuille B vaut S_T à la date T. Par conséquent, à l'échéance de l'option, la valeur du portefeuille A est toujours supérieure ou égale à celle du portefeuille B. Il en découle qu'en cas d'absence d'opportunité d'arbitrage, cela est également vérifié à la date d'aujourd'hui. Ainsi :

$$c + Ke^{-rT} = S_0$$

ou :

$$c = S_0 - Ke^{-rT}$$

Puisque, dans le pire des cas, un call arrivé à échéance n'est pas exercé et ne vaut rien, sa valeur ne peut pas être négative. Ce qui signifie que $c = 0$, et par conséquent :

$$c = \max(S_0 - Ke^{-rT} ; 0) \tag{9.1}$$

■ **Exemple 9.1**

Soit une option d'achat européenne portant sur une action sans versement de dividendes, cette dernière cotant 51 € ; le prix d'exercice de l'option est de 50 €, l'échéance est à six mois, et le taux sans risque est de 12 % par an. Notre notation indique donc : $S_0 = 51$ €, $K = 50$ €, $r = 12$ % et $T = 0{,}5$. En utilisant l'équation (9.1), la borne inférieure de la valeur de l'option est $S_0 - Ke^{-rT}$, soit :

$$51 - 50e^{-0{,}12 \times 0{,}5} = 3{,}91 \text{ €}$$

Les bornes inférieures des prix de puts européens sur des actions ne versant pas de dividendes

Une des bornes inférieures de la valeur d'un put européen sur une action ne versant pas de dividendes est donnée par :

$$Ke^{-rT} - S_0$$

Comme nous l'avons fait précédemment, nous illustrons le raisonnement par un exemple avant de présenter le modèle général.

Supposons que $S_0 = 37$ €, $K = 40$ €, $r = 5$ % et $T = 0{,}5$. Dans ce cas :

$$Ke^{-rT} - S_0 = 40e^{-0{,}05 \times 0{,}5} - 37 = 2{,}01 \text{ €}$$

Considérons le cas où la valeur du put est de 1,00 €, c'est-à-dire moins que le minimum théorique de 2,01 €. Un arbitragiste peut emprunter 38,00 € pour six mois pour acheter à la fois le put et l'action sous-jacente. Au bout des six mois, l'arbitragiste devra rembourser son emprunt avec les intérêts, soit $39e^{0{,}05 \times 0{,}5} = 38{,}96$ €. Si le cours de l'action est alors inférieur à 40,00 €, l'arbitragiste exercera l'option afin de vendre l'action à 40,00 €, rembourser l'emprunt et dégager un gain de :

$$40{,}00 - 38{,}96 = 1{,}04 \text{ €}$$

Si, par contre, le cours de l'action est supérieur à 40,00 €, l'arbitragiste n'exerce pas son option, vend l'action et rembourse l'emprunt avec un gain plus important encore. Par exemple, si le cours de l'action est de 42,00 €, l'arbitragiste encaissera :

$$42{,}00 - 38{,}96 = 3{,}04 \text{ €}$$

Pour le modèle général, considérons les portefeuilles suivants :

Portefeuille C : une option de vente européenne et une action sous-jacente

Portefeuille D : un montant de liquidités égal à Ke^{-rT}

Si $S_T < K$, l'option du portefeuille C est exercée à l'échéance et la valeur du portefeuille devient égale à K. Si $S_T > K$, l'option de vente ne vaut plus rien à l'échéance et la valeur du portefeuille est égale à S_T. Ainsi, la valeur du portefeuille C peut être définie de la façon suivante :

$$\max(S_T; K)$$

à la date T. Si l'on suppose que la trésorerie disponible est investie au taux sans risque, la valeur du portefeuille D est égale à K à la date T. Par conséquent, à l'échéance, la valeur du portefeuille C est supérieure ou égale à celle du portefeuille D, quoi qu'il arrive. Il en découle qu'en cas d'absence d'opportunités d'arbitrage, le portefeuille C a une valeur égale ou supérieure à celle du portefeuille D à la date d'aujourd'hui. Ainsi :

$$p + S_0 = Ke^{-rT}$$

ou encore :

$$p = Ke^{-rT} - S_0$$

Puisque, dans le pire des cas, un put arrivé à échéance n'est pas exercé et ne vaut rien, sa valeur ne peut pas être négative. Ce qui se traduit par :

$$p = \max(Ke^{-rT} - S_0\ ; 0) \tag{9.2}$$

■ **Exemple 9.2**

Soit un put européen portant sur une action ne versant pas de dividendes, cette dernière est cotée 38 €, le prix d'exercice de l'option est de 40 €, l'échéance est à trois mois et le taux sans risque est de 10 %. On a donc : $S_0 = 38$ €, $K = 40$ €, $r = 0{,}10$ et $T = 0{,}25$. En utilisant l'équation (9.2), la borne inférieure de la valeur de l'option est $Ke^{-rT} - S_0$, soit :

$$40e^{-0{,}1\times 0{,}25} - 38 = 1{,}01 \text{ €}$$

9.4 La parité call-put

Nous allons maintenant présenter une des relations les plus importantes liant p et c. Reprenons les deux portefeuilles utilisés dans la section précédente :

Portefeuille A : une option d'achat européenne et une trésorerie égale à Ke^{-rT}

Portefeuille C : une option de vente européenne et une action sous-jacente

La valeur en date T des deux portefeuilles est égale à :

$$\max(S_T; K)$$

Puisque les options sont européennes, elles ne peuvent être exercées avant la date d'échéance. Les portefeuilles doivent par conséquent avoir la même valeur aujourd'hui, ce qui s'écrit :

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 \tag{9.3}$$

Cette égalité est connue sous le nom de « relation de parité call-put ». Elle exprime le fait que la valeur d'un call (put) européen, caractérisé par un certain prix d'exercice

et une date d'échéance, peut être déduite de la valeur d'un put (call) européen doté des mêmes caractéristiques (en termes de prix d'exercice, date d'échéance, action sous-jacente, etc.).

Si l'équation (9.3) n'est pas vérifiée, il y a alors des opportunités d'arbitrage. Supposons par exemple que le prix de l'action soit de 31 €, le prix d'exercice de 30 €, le taux d'intérêt sans risque de 10 %, le prix du call européen à 3 mois de 3 € et le prix du put européen à 3 mois de 2,25 €. Dans ce cas, nous obtenons :

$$c + Ke^{-rT} = 3 + 30e^{-0,1\times 3/12} = 32,26\ €$$

$$p + S_0 = 2,25 + 31 = 33,25\ €$$

Le portefeuille C est surévalué par rapport au portefeuille A. La stratégie d'arbitrage adaptée, dans ce cas, consiste à acheter les titres du portefeuille A et à vendre à découvert ceux du portefeuille C. Cette stratégie implique d'acheter le call et de se porter vendeur à la fois du put et de l'action sous-jacente. Ceci génère un flux monétaire en date 0 égal à :

$$-3 + 2,25 + 31 = 30,25\ €$$

En investissant ce montant au taux d'intérêt sans risque, la somme obtenue devient $30,25e^{0,1\ \times\ 0,25} = 31,02$ € au bout de trois mois. Si, à la date d'échéance, l'action est cotée plus de 30 €, l'option d'achat pourra être exercée. Si, au contraire, l'action cote moins de 30 €, c'est l'option de vente qui sera exercée. Quel que soit le cas, l'investisseur finit donc par acheter l'action pour 30 €. En effet, en cas de hausse du cours de l'action, l'investisseur dénoue sa position de vente à découvert de l'action en l'achetant 30 € grâce au call. En cas de baisse du cours de l'action, l'investisseur doit respecter ses obligations de vendeur de put et acheter, au détenteur de son option, une action pour 30 €, qu'il utilise pour clore sa position de vente à découvert de l'action. Son gain net est alors de :

$$31,02\ € - 30,00\ € = 1,02\ €$$

Pour considérer la situation réciproque, supposons que le prix du call soit de 3 € et le prix du put de 1 €. Dans ce cas :

$$c + Ke^{-rT} = 3 + 30e^{-0,1\times 3/12} = 32,26\ €$$

$$p + S_0 = 1 + 31 = 32,00\ €$$

C'est le portefeuille A qui est, cette fois, surévalué par rapport au portefeuille C. Un arbitragiste peut vendre à découvert les titres du portefeuille A et acheter ceux du portefeuille C pour s'assurer un gain. La stratégie consiste à se porter vendeur d'un call et à acquérir ensemble le put et l'action pour un investissement initial de :

$$31\ € + 1\ € - 3\ € = 29\ €$$

L'investissement est financé par un emprunt au taux sans risque. Au bout de trois mois, l'investisseur devra rembourser $29e^{0,1\times 0,25} = 29,73$ €. Comme nous l'avons expliqué précédemment, l'une des deux options sera exercée en fonction du cours de

l'action. Dans les deux cas, les positions détenues par l'investisseur le conduiront à vendre l'action 30 €. Son gain net sera alors de :

$$30{,}00\ € - 29{,}73\ € = 0{,}27\ €$$

Ces exemples sont illustrés dans le tableau 9.2. L'encadré 9.1 montre comment les options et la relation de parité call-put peuvent être utiles pour comprendre les positions respectives des actionnaires et des obligataires d'une entreprise.

Tableau 9.2 : Opportunités d'arbitrage quand la relation de parité call-put n'est pas respectée. Prix de l'action = 31 € ; taux sans risque = 10 % ; prix du call = 3 €. Le call et le put ont un prix d'exercice de 30 € et une maturité de 3 mois

Prix du put : 2,25 €	**Prix du put : 1 €**
Action en date 0	*Action en date 0*
Achat du call à 3 €	Vente du call à 3 €
Vente du put à 2,25 €	Achat du put à 1 €
Investir 30,25 € pour 3 mois	Emprunter 29 € pour 3 mois
Action dans 3 mois si $S > 30$	*Action dans 3 mois si $S > 30$*
Réception de 31,02 € (du placement)	Paiement de 29,73 € (remboursement)
Exercice du call et achat de l'action pour 30 €	Call exercé et vente de l'action pour 30 €
Profit net : 1,02 €	Profit net : 0,27 €
Action dans 3 mois si $S < 30$	*Action dans 3 mois si $S < 30$*
Réception de 31,02 € (du placement)	Paiement de 29,73 € (remboursement)
Put exercé et achat de l'action pour 30 €	Exercice du put et vente de l'action pour 30 €
Profit net : 1,02 €	Profit net : 0,27 €

Le cas des options américaines

La parité call-put a été établie pour les options européennes. Cependant, il est possible d'en tirer quelques résultats pour les options américaines. On peut ainsi démontrer (voir exercice 9.18) que :

$$S_0 - K \leqslant C - P \leqslant S_0 - Ke^{-rT} \tag{9.4}$$

Encadré 9.1 Relation de parité call-put et structure du capital

Les pionniers de l'évaluation des options ont été Fisher Black, Myron Scholes et Robert Merton. Au début des années 1970, ils ont montré que les options pouvaient être utilisées pour caractériser la structure du capital d'une entreprise. Aujourd'hui, ce modèle est largement utilisé pour évaluer le risque de crédit d'une société.

Pour en donner une illustration, considérons une entreprise dont les actifs sont financés par des actions et des obligations zéro-coupon. Supposons que ces dernières ont une échéance à 5 ans, à laquelle il faudra rembourser le principal, noté K. L'entreprise ne paie pas de dividendes. Si les actifs valent plus que K dans 5 ans, les actionnaires pourront rembourser les obligataires. Si ce n'est pas le cas, ils déclareront faillite et les obligataires deviendront propriétaires de la société.

De ce fait, si on note A la valeur des actifs à la date de maturité de la dette, on obtient une valeur des actions à cette date égale à $\max(A - K\ ; 0)$. Cette formulation montre que les actionnaires détiennent en fait un call sur la valeur de la société, dont le prix d'exercice est la valeur faciale de la dette. En ce qui concerne les obligataires, ils obtiennent $\max(A, K)$ qu'on peut écrire $K - \max(K - A\,; 0)$. Les obligataires ont donc donné aux actionnaires le droit de leur vendre la société pour un prix de K à l'échéance de la dette, et la valeur des obligations est égale à la valeur actuelle de K moins le prix d'un put européen de prix d'exercice K sur les actifs de la firme. Pour résumer, si on note c et p les prix des calls et puts évoqués, on a :

$$\text{Valeur des actions} = c$$
$$\text{Valeur des obligations} = VA(K) - p$$

où $VA(K)$ est la valeur actuelle du prix d'exercice. Si on note A_0 la valeur initiale des actifs, on a :

$$A_0 = c + VA(K) - p$$

Cette relation s'écrit aussi :

$$c + VA(K) = p + A_0$$

C'est la relation de parité call-put de l'équation (9.3) pour des options portant sur les actifs de la société.

■ **Exemple 9.3**

Soit un call américain portant sur une action ne versant pas de dividendes ; le prix d'exercice de l'option est de 20 €, l'échéance est à cinq mois et le premium est de 1,50 €. Si l'on suppose que l'action sous-jacente est cotée 19 € et que le taux d'intérêt sans risque est de 10 %, on obtient, par l'équation (9.4)

$$19 - 20 \leqslant C - P \leqslant 19 - 20e^{-0{,}1\times 5/12}$$

ou encore :

$$1 \geqslant P - C \geqslant 0{,}18$$

démontrant que la valeur de $P - C$ est comprise entre 0,18 € et 1 €. Sachant que C est égal à 1,50 €, P doit être compris entre 1,68 € et 2,50 €. Autrement dit, les bornes supérieures et inférieures de la valeur d'un put américain de même prix d'exercice et de même échéance que le call américain sont de 2,50 € et 1,68 €.

9.5 L'exercice anticipé d'une option d'achat sur action sans dividendes

Dans cette section, nous montrons qu'il n'est jamais optimal d'exercer, avant la date d'échéance, un call américain quand l'action sous-jacente ne verse pas de dividendes. Pour illustrer le caractère général de cette proposition, nous considérons l'exemple d'un call américain sur une action sans dividendes avec une échéance à un mois, un cours actuel de l'action à 50 € et un prix d'exercice à 40 €. L'option est largement dans la monnaie et l'investisseur qui la détient pourrait être tenté de l'exercer immédiatement. Cependant, si cet investisseur prévoit de conserver l'action plus d'un mois, ce n'est pas la meilleure stratégie. Il est préférable de conserver l'option et de ne l'exercer qu'à la fin du mois. En effet, dans ce cas, les 40 € de prix d'exercice ne sont versés qu'un mois plus tard, l'investisseur gagne donc les intérêts sur ces 40 € pour un mois. En outre, puisque l'action ne délivre aucun dividende, aucun revenu sur la détention de l'action n'est sacrifié. Le dernier avantage à privilégier l'attente vient de la probabilité (même infime) que le cours de l'action descende en dessous des 40 € dans l'intervalle de temps considéré. L'investisseur qui aura conservé son option sera alors très heureux de ne pas l'avoir exercée plus tôt !

Nous venons de montrer qu'il n'y a aucun avantage à exercer prématurément pour un investisseur qui prévoit de conserver l'action pour une durée au moins égale à la durée de vie restante de l'option (un mois ici). Mais qu'en est-il si l'investisseur estime que l'action est surévaluée et qu'il envisage d'exercer l'option afin de vendre l'action immédiatement ? Dans ce cas, l'investisseur a tout intérêt à vendre l'option plutôt que de l'exercer[1]. L'option est alors achetée par un autre investisseur qui souhaite détenir l'action. De tels investisseurs existent, sinon le cours de l'action ne serait pas de 50 €. Le prix obtenu par la vente de l'option est supérieur à sa valeur intrinsèque de 10 €, pour les raisons mentionnées auparavant.

Pour un raisonnement plus formel, nous pouvons utiliser l'équation (9.1) :

$$c \geqslant S_0 - Ke^{-rT}$$

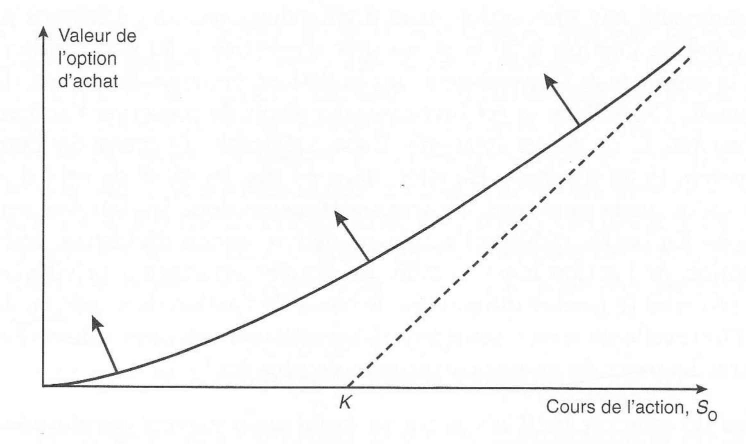
1. Une autre stratégie consisterait à conserver l'option et à vendre à découvert l'action afin de s'assurer un gain supérieur à 10 €. En effet, l'investisseur reçoit 50 € qu'il place pendant un mois, puis dans le pire des cas à l'échéance, si la valeur de l'action est supérieure à 40 €, il exerce l'option et paie le prix d'exercice de 40 € pour clore sa position de vente à découvert de l'action. Son gain est donc au minimum de 10 + les intérêts du placement.

Puisque les détenteurs d'options américaines disposent d'opportunités d'exercice plus avantageuses que les détenteurs d'options européennes équivalentes, la valeur des calls américains est supérieure ou égale à celle des calls européens : $C \geqslant c$, et par conséquent :

$$C \geqslant S_0 - Ke^{-rT}$$

Sachant que $r > 0$, il en découle que $C > S_0 - K$. S'il était optimal d'exercer plus tôt, C serait égal à $S_0 - K$. Nous pouvons donc en déduire qu'il n'est jamais optimal d'exercer par anticipation.

Le graphique 9.3 montre comment la valeur de l'option varie en fonction de S_0 et K. Il met en évidence que la valeur du call est toujours supérieure à sa valeur intrinsèque égale à $\max(S_0 - K, 0)$. Lorsque r,T ou la volatilité augmentent, la courbe représentant la valeur du call par rapport au cours de l'action se déplace en direction des flèches (c'est-à-dire en s'éloignant de sa valeur intrinsèque).



Graphique 9.3 : Variation de la valeur d'un call américain ou européen portant sur une action sans dividendes en fonction du cours de l'action, S_0.

En résumé, il y a deux raisons pour lesquelles un call américain portant sur une action ne délivrant pas de dividendes n'est pas exercé prématurément. L'une se rapporte à l'assurance qu'il procure. Détenir une option d'achat, plutôt que l'action sous-jacente, assure en effet à son propriétaire une protection contre une baisse du cours de l'action en dessous du prix d'exercice. Une fois que l'option est exercée et que le prix d'exercice a été échangé contre une action, cette assurance disparaît. L'autre raison concerne la valeur temps de la monnaie. Du point de vue du détenteur de l'option, plus le prix d'exercice est payé tard, mieux c'est. Ce raisonnement est valide tant que le taux sans risque est positif.

9.6 L'exercice anticipé d'une option de vente sur action sans dividendes

Il peut être optimal d'exercer prématurément un put américain portant sur une action ne versant pas de dividendes. En effet, à tout moment, un put devrait être exercé s'il est suffisamment dans la monnaie. À titre d'exemple, considérons une situation extrême avec un prix d'exercice à 10 € et un cours d'action virtuellement nul. En exerçant immédiatement, un investisseur encaisse un gain immédiat de 10 €. S'il attend, son gain peut devenir inférieur à 10 €, mais il ne peut pas devenir supérieur à 10 € puisque la valeur de l'action ne peut être négative. En outre, il est préférable de recevoir 10 € maintenant que plus tard. Ainsi, l'option devrait être exercée immédiatement.

À l'instar d'un call, un put peut être considéré comme une assurance. Lorsqu'il est détenu conjointement avec une action, il couvre son propriétaire contre une baisse du cours en deçà d'un certain seuil. Cependant, un put est différent d'un call dans le sens où il peut être optimal pour un investisseur d'abandonner l'assurance et d'exercer prématurément afin d'encaisser immédiatement le prix d'exercice. En général, l'exercice anticipé d'une option de vente devient d'autant plus intéressant que S_0 baisse, r augmente et que la volatilité diminue. De l'équation (9.2), on peut déduire que :

$$p \geqslant Ke^{-rT} - S_0$$

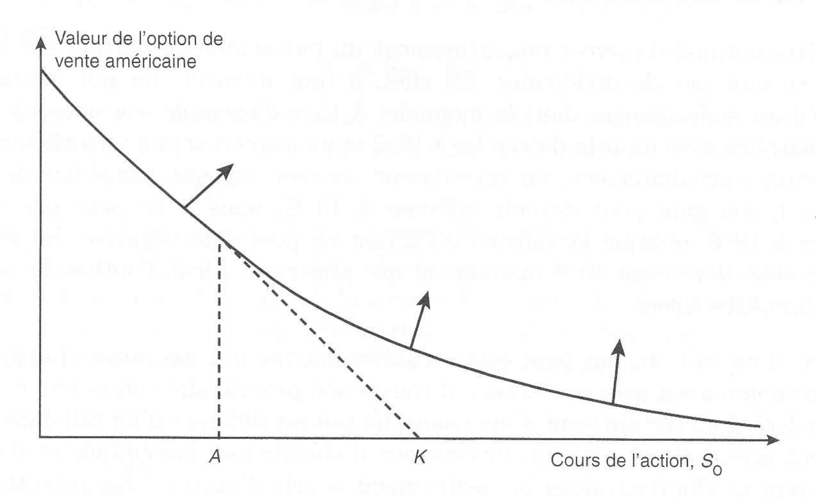
Pour un put américain de valeur P, la condition la plus forte

$$P \geqslant K - S_0$$

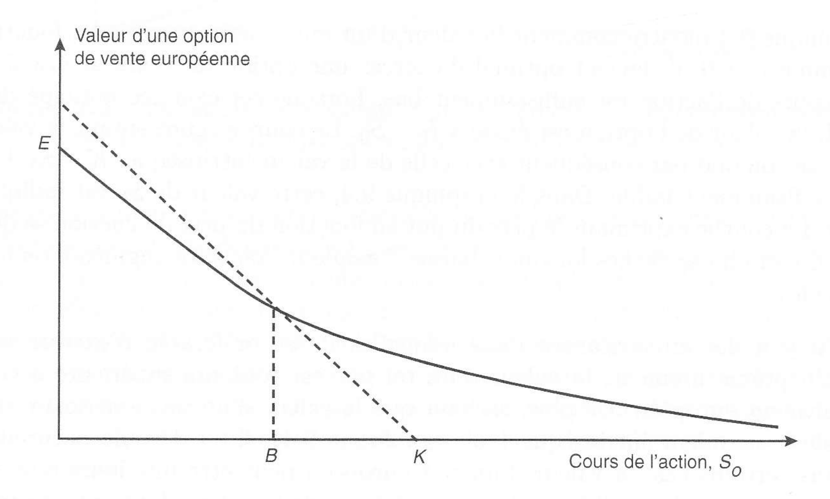
est toujours vérifiée puisqu'un exercice immédiat est toujours possible.

Le graphique 9.4 montre comment la valeur d'un put américain varie en fonction de S_0. Comme $r > 0$, il devient optimal d'exercer une option de vente américaine dès que le cours de l'action est suffisamment bas. Lorsque cet exercice anticipé devient optimal, la valeur de l'option est égale à $K - S_0$. La courbe représentant la valeur de l'option se confond par conséquent avec celle de la valeur intrinsèque, $K - S_0$, lorsque S_0 est suffisamment faible. Dans le graphique 9.4, cette valeur de S_0 est indiquée au point A. La courbe exprimant le prix du put en fonction du prix de l'action se déplace dans la direction des flèches lorsque r baisse, lorsque la volatilité augmente ou lorsque T augmente.

Puisqu'il y a des circonstances dans lesquelles il est préférable d'exercer un put américain prématurément, la valeur d'un tel put est toujours supérieure à celle de son équivalent européen. De plus, sachant que la valeur d'un put américain est parfois égale à sa valeur intrinsèque (voir graphique 9.4), il en découle naturellement que, dans certains cas, la valeur d'un put européen peut être inférieure à sa valeur intrinsèque. Le graphique 9.5 montre les variations de la valeur d'un put européen en fonction du cours de l'action sous-jacente. Notons que le point B du graphique 9.5, qui correspond à l'égalité entre la valeur de l'option et sa valeur intrinsèque, doit représenter une valeur de l'action supérieure à celle du point A du graphique 9.4. Le point E du graphique 9.5 correspond à $S_0 = 0$ et à la valeur de l'option européenne de vente égale à Ke^{-rT}.



Graphique 9.4 : Variation de la valeur d'une option de vente américaine en fonction du cours de l'action, S_0.



Graphique 9.5 : Variation de la valeur d'une option de vente européenne en fonction du cours de l'action, S_0.

9.7 L'effet des dividendes

Les résultats présentés jusque-là supposaient que les actions sous-jacentes aux contrats d'options ne payaient pas de dividendes. Dans cette section, nous examinons l'impact de l'existence de dividendes. En Europe, comme aux États-Unis, les options échangées sur les marchés ont une durée de vie moyenne de moins de huit mois. Leurs échéances sont, dans une large majorité, inférieures à un an. Les dividendes versés pendant ce laps de temps peuvent, en général, être estimés avec précision. Nous noterons D la valeur actuelle des dividendes payés durant la vie de l'option.

Les bornes inférieures des prix d'options d'achat et de vente

Les portefeuilles A et B sont maintenant définis de la façon suivante :

Portefeuille A : une option d'achat européenne et une trésorerie égale à $D + Ke^{-rT}$

Portefeuille B : une action

Un raisonnement analogue à celui qui a permis d'aboutir à l'équation (9.1) conduit à :

$$c \geqslant S_0 - D - Ke^{-rT} \tag{9.5}$$

Les portefeuilles C et D, quant à eux, sont définis par :

Portefeuille C : une option de vente européenne et une action

Portefeuille D : une trésorerie égale à $D + Ke^{-rT}$

Un raisonnement semblable à celui qui a conduit à l'équation (9.2) donne cette fois :

$$p \geqslant D + Ke^{-rT} - S_0 \tag{9.6}$$

L'exercice anticipé

Lorsqu'un dividende est attendu, l'exercice prématuré du call américain peut être optimal juste avant la date de détachement du dividende. Il n'est cependant pas optimal d'exercer à un autre moment. L'étude de ce point est approfondie au chapitre 13.

La parité call-put

En comparant la valeur de l'option à l'échéance des portefeuilles A et C tels que nous les avons redéfinis, l'équation (9.3) de parité call-put devient :

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0 \tag{9.7}$$

Le versement de dividendes modifie également l'équation (9.4) de la manière suivante (voir exercice 9.19) :

$$S_0 - D - K \leqslant C - P \leqslant S_0 - Ke^{-rT} \tag{9.8}$$

Résumé

Six facteurs influencent la valeur d'une option sur action : le cours de l'action sous-jacente, le prix d'exercice, la date d'échéance, la volatilité des prix de l'action, le taux d'intérêt sans risque et l'estimation du montant de dividendes versé durant la vie de l'option. La valeur d'une option d'achat augmente généralement lorsque le cours de l'action sous-jacente, la date d'échéance, la volatilité et le taux sans risque s'accroissent. Au contraire, cette valeur diminue si ce sont le prix d'exercice ou le dividende qui augmentent. De même, la valeur d'une option de vente augmente généralement lorsque le prix d'exercice, la date d'échéance, la volatilité des prix de l'action et le dividende augmentent. Au contraire, cette valeur diminue si ce sont le cours de l'action ou le taux sans risque qui augmentent.

Certaines relations d'arbitrage peuvent être établies sans faire aucune hypothèse sur la volatilité des actions sous-jacentes. Par exemple, la valeur d'une option d'achat doit toujours être inférieure au prix de l'action qu'elle permet d'obtenir. De la même façon, la valeur d'une option de vente doit toujours être inférieure au prix d'exercice de l'option elle-même.

Le prix d'une option d'achat portant sur une action ne versant pas de dividendes est au moins égal à :

$$\max(S_0 - Ke^{-rT} \,;\, 0)$$

où S_0 représente le cours de l'action, K le prix d'exercice, r le taux sans risque et T le temps restant à courir jusqu'à l'échéance. Le prix d'une option de vente portant sur une action ne versant pas de dividendes est au moins égal à :

$$\max(Ke^{-rT} - S_0 \,;\, 0)$$

Lorsqu'un dividende, de valeur actuelle D, est versé, la borne inférieure pour le prix d'une option d'achat est :

$$\max(S_0 - D - Ke^{-rT} \,;\, 0)$$

Et la borne inférieure du prix d'un put devient :

$$\max(Ke^{-rT} + D - S_0 \,;\, 0)$$

La parité call-put est une relation entre la valeur d'une option d'achat européenne sur action, c, et la valeur d'une option de vente européenne sur action, p. Pour une action ne versant pas de dividendes, elle s'écrit :

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0$$

Si l'action verse un dividende, la relation de la parité call-put est alors :

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0$$

La parité call-put n'est pas valable pour les options américaines. Cependant, il est possible d'utiliser un raisonnement par arbitrage pour déduire les bornes de la différence entre la valeur d'une option d'achat américaine et celle d'une option de vente américaine.

Au chapitre 13, nous reprendrons et approfondirons les analyses de ce chapitre en émettant des hypothèses spécifiques sur la distribution de probabilité des cours de l'action. Cette étude permettra de déduire une formule d'évaluation exacte pour les options européennes. Aux chapitres 11 et 17, nous verrons comment l'utilisation de procédures numériques permet d'évaluer les options américaines.

Références complémentaires

BLACK F. et M. SCHOLES, « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, 81, (mai/juin 1973), 637-59.

BROADIE M. et J. DETEMPLE, « American Option Valuation : New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods », *Review of Financial Studies*, 9, 4 (1996), 1211-50.

MERTON R. C., « The Relationship between Put and Call Prices : Comment », *Journal of Finance*, 28 (mars 1973), 183-84.

MERTON R. C., « Theory of Rational Option Pricing », *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (printemps 1973), 141-83.

STOLL H. R., « The Relationship between Put and Call Option Prices », *Journal of Finance*, 31 (mai 1969), 319-32.

Problèmes et exercices

9.1 Quels sont les six facteurs influençant la valeur d'une option ?

9.2 Quelle est la borne inférieure du prix d'un call à 4 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes et dont le cours est de 28 €, sachant que le prix d'exercice de l'option est de 25 € et le taux d'intérêt sans risque de 8 % par an ?

9.3 Quelle est la borne inférieure du prix d'un put européen à 1 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes et dont le cours est de 12 €, sachant que le prix d'exercice de l'option est de 15 € et le taux d'intérêt sans risque de 6 % par an ?

9.4 Donnez deux raisons pour lesquelles l'exercice anticipé d'un call américain sur une action ne versant pas de dividendes n'est pas optimal. La première a trait à l'actualisation des flux de trésorerie. La seconde est pertinente même si les taux d'intérêt sont nuls.

9.5 « L'exercice anticipé d'un put américain est un compromis entre la valeur temps de l'argent et la valeur de l'assurance que procure le put. » Expliquez cette affirmation.

9.6 Expliquez pourquoi la valeur d'un call américain est toujours supérieure ou égale à sa valeur intrinsèque. Est-ce la même chose pour un call européen ? Justifiez votre réponse.

9.7 Le prix d'une action est de 19 € et celui d'un call européen à 3 mois sur ce titre avec un prix d'exercice de 20 € est égal à 1 €. Le taux sans risque est de 4 % par an. Quel est le prix du put de mêmes caractéristiques que le call ? (On suppose que l'action ne paie pas de dividendes pendant les trois mois.)

9.8 Expliquez pourquoi les arguments justifiant la parité call-put pour des options européennes ne peuvent pas être utilisés pour obtenir le même résultat avec des options américaines.

9.9 Quelle est la borne inférieure du prix d'un call à 6 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes et dont le cours est à 80 €, sachant que le prix d'exercice de l'option est de 75 € et le taux d'intérêt sans risque de 10 % par an ?

9.10 Quelle est la borne inférieure du prix d'un put européen à 2 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes et dont le cours est à 58 €, sachant que le prix d'exercice de l'option est de 65 € et le taux d'intérêt sans risque de 5 % par an ?

9.11 Un call européen à 4 mois portant sur une action versant un dividende est actuellement coté 5 €. L'action est cotée 64 €, le prix d'exercice est de 60 € et un dividende de 0,80 € sera versé dans un mois. Le taux d'intérêt sans risque est de 12 % par an quelle que soit l'échéance. Quelles sont les opportunités dont pourrait profiter un arbitragiste ?

9.12 Un put européen à 1 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes est actuellement coté 2,50 €. L'action est cotée 47 €, le prix d'exercice est de 50 € et le taux d'intérêt sans risque est de 6 % par an. Quelles sont les opportunités dont pourrait profiter un arbitragiste ?

9.13 Expliquez, de façon intuitive, pourquoi l'exercice anticipé d'un put américain devient plus intéressant lorsque le taux sans risque augmente et que la volatilité baisse.

9.14 Un call européen qui expire dans 6 mois et dont le prix d'exercice est de 30 € est coté 2 €. La valeur de l'action sous-jacente est de 29 € et un dividende de 0,50 € est attendu dans deux mois, puis de nouveau dans cinq mois. La structure par termes des taux est plate avec un taux d'intérêt sans risque à 10 %. Quelle est la valeur d'un put européen dont l'échéance est de 6 mois et le prix d'exercice de 30 € ?

9.15 Expliquez avec minutie les opportunités d'arbitrage si la valeur de l'option de vente du problème précédent (9.14) est de 3 €.

9.16 Le prix d'un call américain sur une action ne versant pas de dividendes est de 4 €. Le cours de l'action est de 31 €, le prix d'exercice est de 30 €

et la date d'échéance dans 3 mois. Le taux d'intérêt sans risque est de 8 %. Déduisez-en les bornes supérieures et inférieures de la valeur du put américain de mêmes caractéristiques (action sous-jacente, prix d'exercice, date d'échéance).

9.17 Expliquez minutieusement les opportunités d'arbitrage si la valeur du put du problème précédent (9.16) est plus élevée que la borne supérieure qui a pu être déterminée.

9.18 Démontrez l'équation (9.4). (Conseil : pour la première partie de la relation, considérez (a) un portefeuille consistant en un call européen et une trésorerie égale à K, et (b) un portefeuille consistant en un put américain et une action.)

9.19 Démontrez l'équation (9.8). (Conseil : pour la première partie de la relation, considérez (a) un portefeuille consistant en un call européen et une trésorerie égale à $D + K$, et (b) un portefeuille consistant en un put américain et une action.)

9.20 Même si l'entreprise ne verse pas de dividendes, les stock-options délivrées aux dirigeants ont tendance à être exercées prématurément (voir l'encadré 8.3 concernant les stock-options). Donnez-en une raison possible.

9.21 Utilisez le logiciel DerivaGem pour vérifier si les graphiques 9.1 et 9.2 sont corrects.

Questions complémentaires

9.22 Un call et un put européens sur action ont tous deux un prix d'exercice de 20 € et une échéance à trois mois. Les deux sont vendus 3 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 10 % par an, le cours de l'action de 19 € et le versement d'un dividende de 1 € est prévu dans un mois. Identifiez les opportunités d'arbitrage offertes aux opérateurs.

9.23 Soient c_1, c_2 et c_3, les prix de trois calls européens ayant, respectivement, pour prix d'exercice K_1, K_2 et K_3, avec $K_3 > K_2 > K_1$ et $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$. Ces trois options ont la même date d'échéance. Montrez que : $c_2 = 0{,}5(c_1 + c_3)$.

9.24 (Indication : considérez un portefeuille qui comprend une position acheteur pour une option de prix d'exercice K_1 et une option de prix d'exercice K_3, ainsi qu'une position vendeur de deux options de prix d'exercice K_2.)

9.25 Quel est le résultat de la question précédente (9.23) pour des puts européens ?

9.26 Supposons que vous soyez le directeur et unique propriétaire d'une société très endettée. Toute la dette arrivera à échéance dans un an. Si, à ce moment-là, la valeur de la société est plus importante que la valeur faciale de la dette, vous rembourserez vos dettes. Si la valeur de la société est inférieure à la valeur de remboursement, vous déclarerez la faillite et les créanciers prendront possession de la société.

a. Exprimez votre position en termes d'options sur la valeur de la société.

b. Exprimez la position des créanciers en termes d'options sur la valeur de la société.

c. Que pouvez-vous faire pour augmenter la valeur de votre position ?

9.27 Soit une option ayant comme sous-jacent une action cotée 41 €, de prix d'exercice 40 € ; le taux sans risque est 6 %, la volatilité 35 % et la date d'échéance est dans un an. Supposons par ailleurs que le versement d'un dividende de 0,50 € soit prévu dans six mois.

a. Utilisez DerivaGem pour évaluer l'option en supposant que c'est un call européen.

b. Utilisez DerivaGem pour évaluer l'option en supposant que c'est un put européen.

c. Vérifiez que la parité call-put est validée.

d. Étudiez, en utilisant DerivaGem, ce qu'il advient du prix des options lorsque la date d'échéance devient très lointaine. Supposez pour cela qu'il n'y a pas de dividendes. Expliquez les résultats obtenus.

Chapitre 10

Les stratégies d'échanges impliquant des options

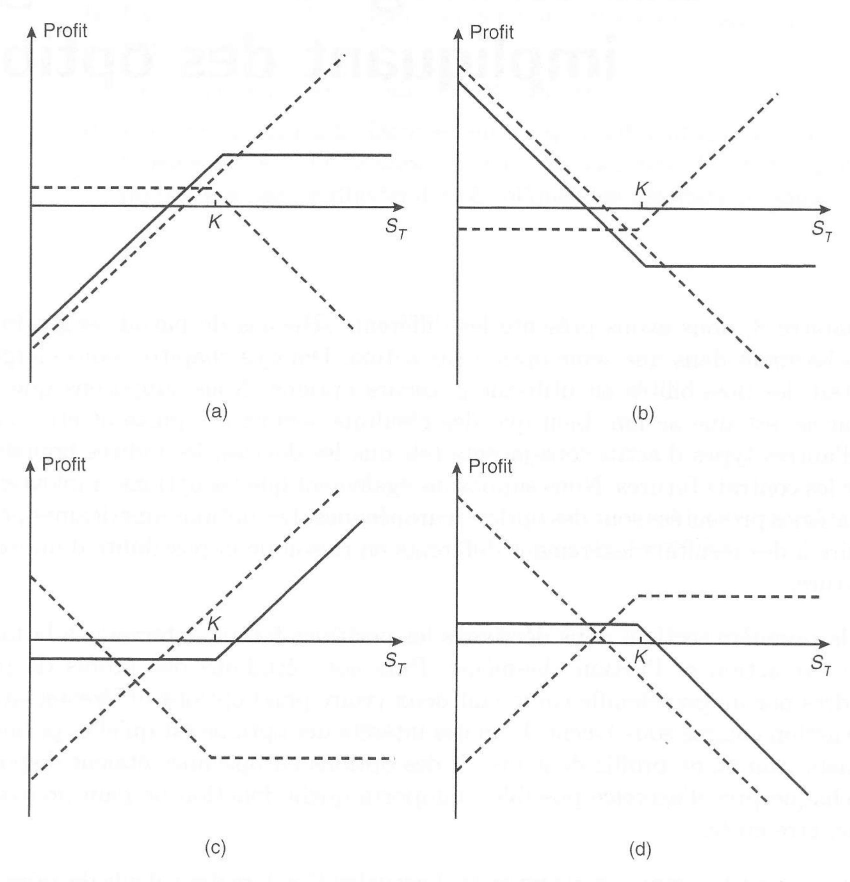
Au chapitre 8, nous avons présenté les différents schémas de payoffs engendrés par l'investissement dans une seule option sur action. Dans ce chapitre, nous élargissons l'éventail des possibilités en utilisant plusieurs options. Nous supposons que l'actif sous-jacent est une action, bien que des résultats semblables puissent être obtenus avec d'autres types d'actifs sous-jacents tels que les devises, les indices boursiers ou encore les contrats futures. Nous supposons également que les options employées dans les stratégies présentées sont des options européennes. Les options américaines peuvent conduire à des résultats légèrement différents en raison de la possibilité d'un exercice prématuré.

Dans la première section, nous décrivons les positions faisant intervenir à la fois une option sur action et l'action elle-même. Puis nous étudions des profils de payoffs engendrés par un portefeuille contenant deux (voire plus) options différentes ayant la même action comme sous-jacent. L'un des intérêts des options est qu'elles permettent une vaste gamme de profils de gains. Si des options européennes étaient disponibles pour chaque prix d'exercice possible, n'importe quelle fonction de gain pourrait, en théorie, être créée.

Dans un but pédagogique, nous ignorons l'actualisation lors des calculs de gains d'une stratégie. Le profit est alors évalué en faisant simplement la différence entre le payoff final et les coûts initiaux, et non en actualisant le payoff terminal dans ce calcul.

10.1 Les stratégies impliquant une option seule et une action

Il y a de nombreuses stratégies différentes impliquant une seule option et l'action sous-jacente. Les résultats auxquels elles conduisent sont illustrés dans le graphique 10.1. Dans ce graphique, et dans les suivants, la ligne en pointillé montre la relation entre le résultat et le cours de l'action pour chaque titre constituant le portefeuille, tandis que la ligne pleine illustre la relation entre le résultat final de la stratégie dans son ensemble et le cours de l'action.



Graphique 10.1 : Profils de gains : (a) position longue sur une action et position courte sur une option d'achat ; (b) position courte sur une action et position longue sur une option d'achat ; (c) position longue sur une option de vente et position longue sur une action ; (d) position courte sur une option de vente et position courte sur une action.

Dans le graphique 10.1a, le portefeuille consiste en une position longue (acheteur) sur une action et une position courte (vendeur) sur un call. Cette stratégie, très répandue, porte le nom de vente de call couvert ou *covered call*. En effet, la possession de l'action couvre, c'est-à-dire protège, l'investisseur du résultat de sa position courte

sur l'option d'achat et devient particulièrement utile si le cours de l'action augmente brutalement. Le graphique 10.1b montre une position courte sur une action, combinée avec une position longue sur une option d'achat. C'est la stratégie symétrique de la précédente. Le graphique 10.1c suppose l'achat simultané d'un put et de l'action sous-jacente. Ce portefeuille est parfois qualifié de *protective put*. Dans le graphique 10.1d, une position courte sur une option de vente est combinée avec une position courte sur l'action. Le résultat est symétrique à celui de la stratégie précédente.

Les profils de gains des graphiques 10.1a, b, c et d ont la même forme générale que ceux présentés au chapitre 8 pour, respectivement, les positions courtes sur l'option de vente, longues sur l'option de vente, longues sur l'option d'achat, et courtes sur l'option d'achat. La parité call-put donne une explication à cette ressemblance. Cette relation s'écrit (voir chapitre 9) :

$$p + S_0 = c + Ke^{-rT} + D \qquad (10.1)$$

où p désigne la valeur du put européen, S_0 le cours actuel de l'action, c la valeur du call européen, K le prix d'exercice des deux options, r le taux d'intérêt sans risque, T le temps restant à courir jusqu'à l'échéance des deux options, et D la valeur actuelle des dividendes éventuellement versés durant la vie des options.

L'équation (10.1) montre qu'une position longue sur un put combinée avec une position longue sur une action est l'équivalent d'une position longue sur un call combinée avec des liquidités d'un montant égal à $Ke^{-rT} + D$. Cela explique pourquoi le profil de gain du graphique 10.1c est identique à celui qui découle d'une simple position longue sur un call. La position du graphique 10.1d est symétrique de celle du graphique 10.1c et conduit par conséquent au profil de gain résultant d'une unique position courte sur un call.

L'équation (10.1) peut être réarrangée ainsi :

$$S_0 - c = Ke^{-rT} + D - p$$

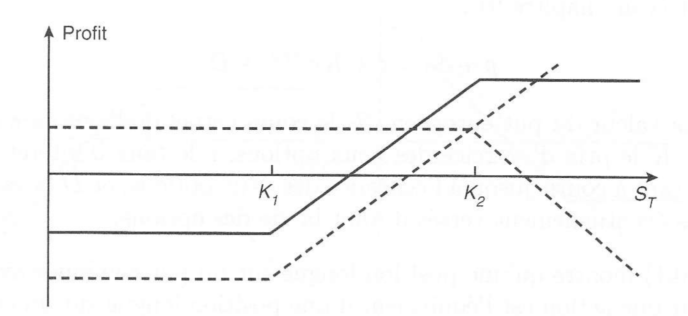
En d'autres termes, une position longue sur une action combinée avec une position courte sur un call est équivalente à une position courte sur un put, plus un montant de liquidités égal à $Ke^{-rT} + D$. Cette égalité explique pourquoi le profil de gain du graphique 10.1a est identique à celui qui résulte d'une simple position courte sur un put. La position du graphique 10.1b est symétrique de celle du graphique 10.1a et conduit par conséquent à un profil de gain analogue à celui d'une position longue sur un put.

10.2 Les spreads

Une stratégie de spread implique de prendre une position dans deux options au moins, du même type (c'est-à-dire deux options d'achat ou deux options de vente, ou davantage). Bien que le terme spread soit employé dans divers contextes, il n'a rien à voir ici avec les écarts de taux du marché obligataire.

Les bull spreads

L'un des spreads les plus populaires est le *bull spread* ou « spread haussier » (mais cette dernière expression est plus rarement utilisée). Il est constitué de l'achat d'un call à un prix d'exercice donné et de la vente d'un call à un prix d'exercice supérieur, les deux portant sur le même sous-jacent. Les deux options ont aussi la même date d'échéance. Cette stratégie est illustrée dans le graphique 10.2. Le résultat global de la stratégie bull spread est représenté par la ligne continue. Puisque la valeur d'un call diminue lorsque le prix d'exercice augmente, la valeur de l'option vendue est inférieure à celle de l'option achetée. Un bull spread, créé à partir de deux calls, nécessite donc un investissement initial.



Graphique 10.2 : Bull spread créé avec deux options d'achat.

Supposons que K_1 soit le prix d'exercice du call acheté, K_2 le prix d'exercice du call vendu et S_T la valeur de l'action à date d'échéance de l'option. Le tableau 10.1 présente le flux total engendré par une stratégie de bull spread dans les différents cas qui peuvent se présenter. Si le cours de l'action est supérieur au prix d'exercice, le flux obtenu est la différence entre les deux prix d'exercice, égale à $K_2 - K_1$. Si le cours de l'action à la date d'échéance se situe entre les deux prix d'exercice, le flux sera alors de $S_T - K_1$. Si, enfin, le cours de l'action est descendu trop bas à la date d'échéance, le flux sera nul. Le profit présenté dans le graphique 10.2 est calculé en soustrayant l'investissement initial. Cela explique la différence entre le calcul des flux dans le tableau 10.1 et leur représentation dans le graphique 10.2.

Tableau 10.1 : Revenus d'une stratégie de bull spread

Valeur de l'action	Revenus de la position longue sur l'option d'achat	Revenus de la position courte sur l'option d'achat	Revenus totaux
$S_T \geqslant K_2$	$S_T - K_1$	$K_2 - S_T$	$K_2 - K_1$
$K_1 < S_T < K_2$	$S_T - K_1$	0	$S_T - K_1$
$S_T \leqslant K_1$	0	0	0

Une stratégie de bull spread limite, pour l'investisseur, aussi bien les avantages en cas de hausse que les risques en cas de baisse. Dans cette stratégie, l'investisseur possède un call avec un prix d'exercice égal à K_1 et choisit d'abandonner une partie de ses gains potentiels en vendant un call de prix d'exercice K_2 ($K_2 > K_1$). En contrepartie de ce renoncement à une partie du gain potentiel, l'investisseur reçoit le prix de l'option de prix d'exercice K_2. Trois types de bull spreads peuvent être distingués :

1. Ceux où, à l'origine, les deux calls sont en dehors de la monnaie.
2. Ceux où, à l'origine, l'un des calls est dans la monnaie, l'autre en dehors.
3. Ceux où, à l'origine, les deux calls sont dans la monnaie.

La stratégie de bull spread la plus agressive correspond au type 1. Son coût de mise en œuvre est très faible et elle a une faible probabilité de fournir un gain élevé, limité à $K_2 - K_1$. Plus nous nous déplaçons du type 1 au type 2 et du type 2 au type 3, plus le spread devient défensif.

Exemple 10.1

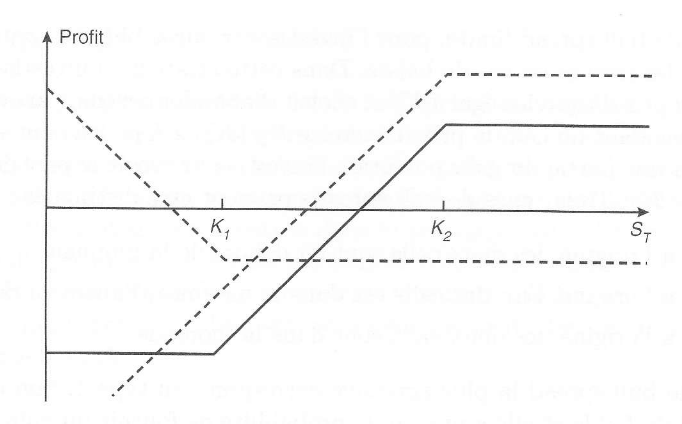
Un investisseur achète pour 3 € un call de prix d'exercice 30 € et vend pour 1 € un call de prix d'exercice 35 €. Le flux à l'échéance de ce bull spread est de 5 € si le cours de l'action atteint au moins 35 € et il est nul si le cours de l'action descend en dessous de 30 €. Si le cours de l'action se situe entre 30 € et 35 € à l'échéance, le flux représentera le montant duquel le cours de l'action dépassera 30 €. Le coût de cette stratégie est de 3 € − 1 € = 2 €. Les revenus nets se présentent ainsi :

Cours de l'action	Revenu
$S_T \leqslant 30$	-2
$30 < S_T < 35$	$S_T - 32$
$S_T \geqslant 35$	3

Un bull spread peut également être créé en achetant un put avec un prix d'exercice bas et en vendant un put à un prix d'exercice plus élevé. Le graphique 10.3 présente cette combinaison. À la différence des bull spreads construits à partir d'options d'achat, ceux qui sont créés à partir d'options de vente engendrent un flux initial positif (en ignorant les dépôts de garantie) et un flux final négatif ou nul.

Les bear spreads

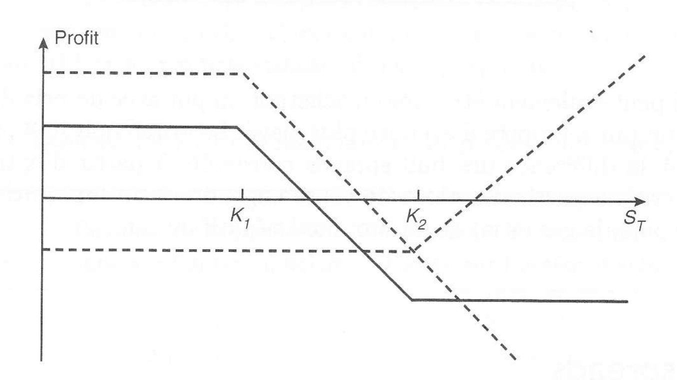
Un investisseur qui crée un bull spread espère une augmentation du cours de l'action. Au contraire, un investisseur qui crée un *bear spread* ou « spread baissier » espère,



Graphique 10.3 : Bull spread créé en utilisant deux options de vente.

quant à lui, une baisse de la valeur de l'action. Comme un bull spread, un bear spread peut être composé en achetant un call avec un certain prix d'exercice et en vendant un autre call à un prix d'exercice différent. Cependant, dans le cas du bear spread, le prix d'exercice de l'option achetée est supérieur au prix d'exercice de l'option vendue. Dans le graphique 10.4, le résultat de cette stratégie est exprimé par la ligne continue. Un bear spread créé à l'aide de deux options d'achat engendre un flux initial positif (en ignorant le dépôt de garantie) parce que le prix de l'option vendue est supérieur au prix de l'option achetée.

En supposant que les prix d'exercice sont K_1 et K_2, avec $K_1 < K_2$, le tableau 10.2 montre le flux réalisé à l'échéance par un bear spread dans les différents cas possibles. Si le cours de l'action est supérieur à K_2, le flux est négatif, égal à $-(K_2 - K_1)$. Si le cours de l'action est inférieur à K_1, le flux est nul. Enfin, si le cours de l'action est compris entre K_1 et K_2, le flux est égal à $-(S_T - K_1)$. Le résultat global est calculé en prenant en compte le flux initial. Cela explique la différence entre le calcul des flux dans le tableau 10.2 et leur représentation dans le graphique 10.4.



Graphique 10.4 : Bear spread créé en utilisant deux options d'achat.

Tableau 10.2 : Revenus d'une stratégie de bear spread

Valeur de l'action	Revenus de la position longue sur le call	Revenus de la position courte sur le call	Revenus totaux
$S_T \geqslant K_2$	$S_T - K_2$	$K_1 - S_T$	$-(K_2 - K_1)$
$K_1 < S_T < K_2$	0	$K_1 - S_T$	$0 - (S_T - K_1)$
$S_T \leqslant K_1$	0	0	0

■ **Exemple 10.2**

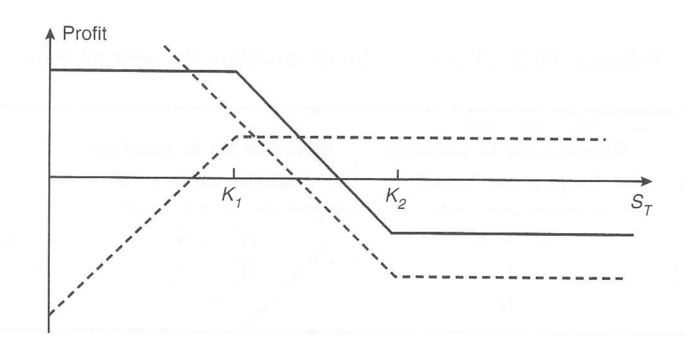
Un investisseur achète pour 1 € une option d'achat de prix d'exercice 35 € et vend pour 3 € une option d'achat de prix d'exercice 30 €. Le flux à l'échéance de ce bear spread est de –5 € si le cours de l'action atteint au moins 35 €, et il est nul si le cours de l'action descend en dessous de 30 €. Si le cours de l'action se situe entre 30 € et 35 € à l'échéance, le revenu est égal à $-(S_T - 30)$. Cette stratégie rapporte initialement 3 € -1 € $= 2$ €. Les revenus globaux sont donc définis ainsi :

Cours de l'action	Revenu
$S_T \leqslant 30$	2
$30 < S_T < 35$	$32 - S_T$
$S_T \geqslant 35$	-3

Comme un bull spread, une stratégie de bear spread limite aussi bien les gains potentiels de l'investisseur que son risque de perte. Les bear spreads peuvent également être créés en utilisant des options de vente à la place d'options d'achat. L'investisseur achète un put avec un prix d'exercice élevé et vend un put dont le prix d'exercice est inférieur. Ce montage est illustré dans le graphique 10.5. Les bear spreads créés à partir d'options de vente nécessitent un investissement initial. En effet, l'investisseur achète un put avec un certain prix d'exercice et choisit d'abandonner une partie de ses gains potentiels en vendant un put au prix d'exercice inférieur. En contrepartie de son renoncement à des gains potentiels, l'investisseur perçoit la valeur de l'option vendue.

Les box spreads

Un box spread est la combinaison d'un bull spread fondé sur des calls de prix d'exercice K_1 et K_2 et d'un bear spread fondé sur des puts de même prix d'exercice que les calls. Le tableau 10.3 donne les flux terminaux engendrés par cette stratégie. Ils sont toujours égaux à $K_2 - K_1$. La valeur initiale d'un box spread est donc toujours égale



Graphique 10.5 : Bear spread créé en utilisant deux options de vente.

à la valeur actuelle de la différence $K_2 - K_1$. Si ce n'était pas le cas, cela révélerait une opportunité d'arbitrage. Si, par exemple, le prix est plus faible, il faut acheter cette stratégie. Cela revient à acheter un call de prix d'exercice K_1, acheter un put de prix d'exercice K_2, vendre un call de prix d'exercice K_2, et enfin acheter un put de prix d'exercice K_1. Si le prix de la stratégie est plus élevé que le prix théorique, on adopte la stratégie symétrique.

Tableau 10.3 : Revenus d'une stratégie de box spread

Valeur de l'action	Revenus du bull spread	Revenus du bear spread	Revenus totaux
$S_T \geqslant K_2$	$K_2 - K_1$	0	$K_2 - K_1$
$K_1 < S_T < K_2$	$S_T - K_1$	$K_2 - S_T$	$K_2 - K_1$
$S_T \leqslant K_1$	0	$K_2 - K_1$	$K_2 - K_1$

Il est important de noter qu'un arbitrage de ce type ne fonctionne qu'avec des options européennes. Or, la plupart des options négociées sur les marchés sont américaines. Comme le montre l'encadré 10.1, des traders inexpérimentés qui traitent des options américaines comme des options européennes vont au-devant de surprises désagréables.

Encadré 10.1 Comment perdre de l'argent avec des box spreads

Supposons qu'une action cote 50 € avec une volatilité de 30 %. Aucun dividende n'est attendu et le taux sans risque est de 8 %. Un trader vous offre l'opportunité de vendre sur le MONEP un box spread à 2 mois, au prix de 5,1 € avec des prix d'exercice de 55 € et 60 €. Profitez-vous de cette occasion ?

Cette transaction est attractive puisque la valeur terminale est à coup sûr 5 € dans deux mois. Vous encaissez 5,1 € immédiatement, et vous les placez au taux sans risque, ce qui vous permettra sans difficulté de payer les 5 € dans deux mois. En fait, la valeur théorique du box spread devrait être égale à : $5 \times e^{-0,08 \times 2/12} = 4,93$ €.

Malheureusement, il y a un truc ! Ces options sont américaines et la valeur théorique que nous venons de calculer fait l'hypothèse qu'elles sont européennes. Les « vrais » prix théoriques, tenant compte du caractère américain, sont donnés dans le tableau 10.4. Le bull spread vaut en fait 0,96 – 0,26 = 0,70 €. Il n'y a pas de différence ici entre options américaines et européennes car il s'agit de calls et le sous-jacent ne paie pas de dividendes (voir chapitre 9).

Le bear spread vaut 4,23 € si les options sont européennes, mais 10,00 – 5,44 = 4,56 € si les options sont américaines (vous pouvez vérifier en utilisant DerivaGem). En conséquence, la valeur du box spread américain est égale à 0,70 + 4,56 = 5,26 €. Le vendre à 5,1 € n'est donc pas une bonne affaire. Vous pourriez d'ailleurs vous en rendre compte très vite car le put de prix d'exercice 60 € que vous avez vendu serait exercé immédiatement par l'acheteur !

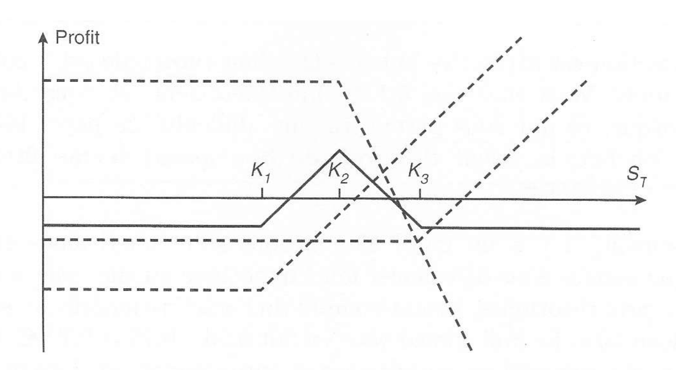
Tableau 10.4 : Valeurs d'options européennes et américaines sur une action ne payant pas de dividendes. Prix de l'action = 50 €, taux d'intérêt = 8 % par an, volatilité = 30 % par an.

Type d'option	Prix d'exercice	Option européenne	Option américaine
Call	60	0,26	0,26
Call	55	0,96	0,96
Put	60	9,46	10,00
Put	55	5,23	5,44

Les butterfly spreads

Un *butterfly spread* ou « spread papillon » implique des positions sur des options de trois prix d'exercice différents. Il peut être créé en achetant un call au prix d'exercice bas K_1, en achetant un call au prix d'exercice plus élevé K_3 et en vendant deux calls de prix d'exercice K_2, situé entre K_1 et K_3.

Généralement, K_2 est proche du cours actuel de l'action. Le profil de gain de cette stratégie est représenté dans le graphique 10.6. Un butterfly spread produit un bénéfice si le cours de l'action reste proche de K_2, mais conduit à de faibles pertes si le cours de l'action varie de façon significative à la hausse comme à la baisse. C'est, par



Graphique 10.6 : Butterfly spread créé en utilisant des options d'achat.

conséquent, une stratégie judicieuse pour un investisseur qui pense qu'une variation importante du cours est improbable. En outre, cette stratégie ne requiert qu'un faible investissement initial. Les résultats à l'échéance d'un butterfly spread sont récapitulés dans le tableau 10.5.

Tableau 10.5 : Revenus d'un butterfly spread

Prix d'exercice	Revenu de l'achat du premier call	Revenu de l'achat du second call	Revenu de la vente des deux calls	Revenus global*
$S_T < K_1$	0	0	0	0
$K_1 < S_T < K_2$	$S_T - K_1$	0	0	$S_T - K_1$
$K_2 < S_T < K_3$	$S_T - K_1$	0	$-2(S_T - K_2)$	$K_3 - S_T$
$S_T > K_3$	$S_T - K_1$	$S_T - K_3$	$-2(S_T - K_2)$	0

* Ces revenus sont calculés sur la base $K_2 = 0{,}5(K_1 + K_3)$.

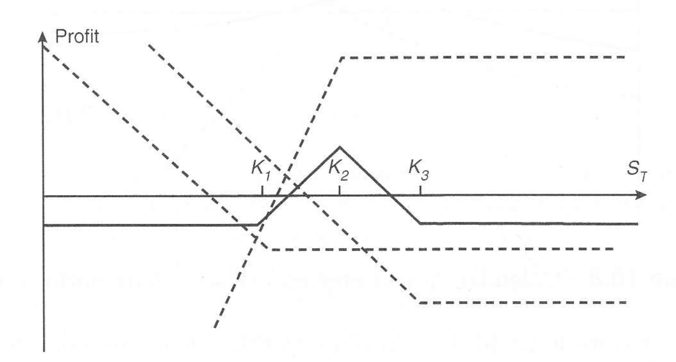
Supposons qu'une action cote aujourd'hui 61 € et considérons un investisseur estimant qu'une variation significative du cours est fort improbable. Les prix des calls d'échéance 6 mois sont les suivants :

Prix d'exercice (€)	Valeur de l'option d'achat (€)
55	10
60	7
65	5

L'investisseur pourrait créer un butterfly spread en achetant un call de prix d'exercice 55 €, un call de prix d'exercice 65 €, et en vendant deux calls de prix d'exercice 60 €.

Le coût initial est 10 € + 5 € −(2 × 7 €) = 1 €. Si le cours de l'action dans six mois est supérieur à 65 € ou inférieur à 55 €, le flux final du spread est nul et l'investisseur supporte une perte nette de 1 €. Si le cours de l'action reste entre 56 € et 64 €, il réalise un bénéfice net. Au maximum, son bénéfice sera de 4 € si le cours de l'action est à 60 € dans six mois.

Les butterfly spreads peuvent être réalisés à l'aide d'options de vente. L'investisseur achète un put au prix d'exercice bas, achète également un put à un prix d'exercice plus élevé et vend deux puts de prix d'exercice intermédiaire. Ce montage est illustré dans le graphique 10.7. En reprenant l'exemple précédent, le butterfly spread pourrait être effectué en achetant deux puts de prix d'exercice respectifs 55 € et 65 €, et en vendant deux puts de prix d'exercice 60 €. Si toutes les options sont européennes, l'utilisation de puts conduit au même spread qu'avec les options d'achat. La parité call-put peut être utilisée pour montrer que l'investissement initial est le même dans les deux cas.



Graphique 10.7 : Butterfly spread créé en utilisant des options de vente.

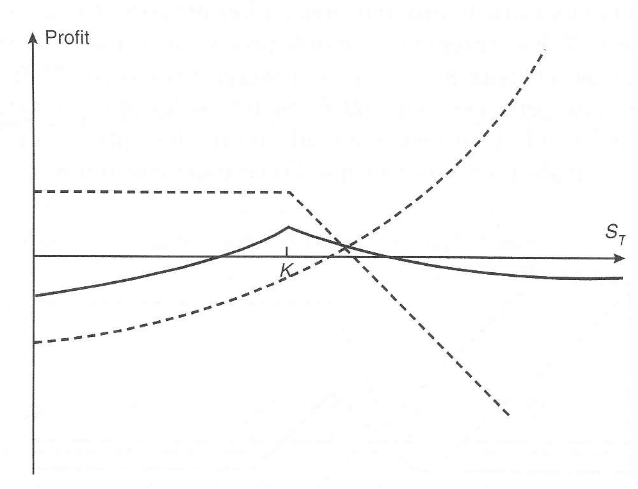
Un butterfly spread peut être vendu ou constitué en position courte en suivant la stratégie opposée. Des options sont vendues avec les prix d'exercice K_1 et K_3, et deux options de prix d'exercice intermédiaire K_2 sont achetées. Cette stratégie procure un modeste bénéfice en cas de variation significative du cours de l'action.

Les calendar spreads

Jusqu'à présent, nous avons supposé que les options composant les spreads arrivaient toutes à échéance à la même date. Nous allons maintenant présenter les *calendar spreads* ou « spreads calendaires », dans lesquels les options ont le même prix d'exercice mais des dates d'échéance différentes.

Un calendar spread peut être réalisé en vendant un call de prix d'exercice donné et en achetant un call de même prix d'exercice mais dont la date d'échéance est plus éloignée. Plus la durée de vie de l'option est longue, plus son prix est en général élevé. Par conséquent, un spread calendaire nécessite un investissement initial. Les diagrammes de payoffs des spreads calendaires sont le plus souvent présentés de façon

à traduire les payoffs à la première date d'échéance, en supposant que l'option à échéance longue est revendue à cette date. Le profil de gain d'un calendar spread composé de deux options d'achat est présenté dans le graphique 10.8. Ce modèle ressemble à celui du butterfly spread du graphique 10.6. L'investisseur réalise un bénéfice si le cours de l'action à l'échéance de l'option à courte maturité est proche du prix d'exercice de cette même option. Cependant, une perte est constatée si le cours de l'action s'éloigne significativement de ce prix d'exercice, que ce soit à la hausse ou à la baisse.



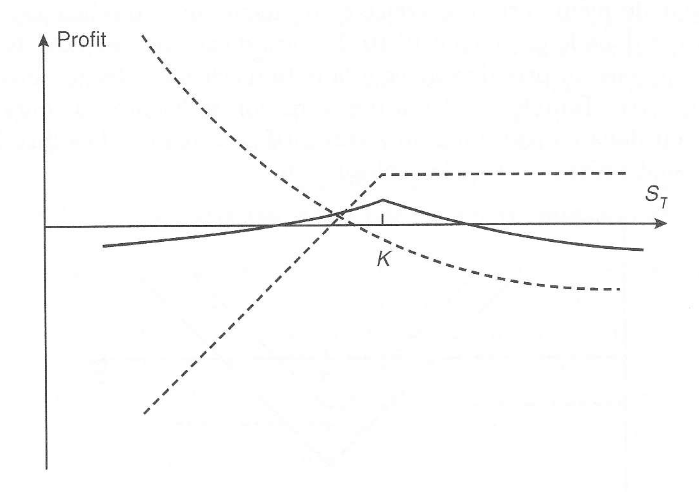
Graphique 10.8 : Calendar spread créé en utilisant deux options d'achat.

Pour bien comprendre le profil de gain d'un spread calendaire, considérons d'abord le cas où le cours de l'action est très bas lorsque l'option à maturité courte arrive à échéance. Cette option est alors sans valeur, et la valeur de l'option à maturité plus longue est proche de zéro. Par conséquent, les investisseurs subissent une perte qui est proche du coût initial de la stratégie. Lorsque par contre le cours de l'action, S_T, à l'échéance de la première option, est très élevé, la position vendeur sur l'option à maturité courte coûte $S_T - K$ à l'investisseur, et l'option à maturité longue (en supposant qu'un exercice anticipé ne soit pas optimal) vaut un peu plus que $S_T - K$ (K étant le prix d'exercice des options). De nouveau, l'investisseur subit une perte nette qui est proche du coût initial nécessaire au montage de la stratégie. Si S_T est proche de K, l'option à maturité courte ne coûte finalement presque rien à l'investisseur. Cependant, l'option à maturité longue conserve une valeur encore importante. Ainsi, dans ce cas, un bénéfice peut être réalisé.

Dans un *neutral calendar spread* ou « spread calendaire neutre », le prix d'exercice est choisi très proche du cours actuel de l'action. Un *bullish calendar spread* ou « spread calendaire haussier » implique le choix d'un prix d'exercice supérieur au cours de l'action. Enfin, un *bearish calendar spread* ou « spread calendaire baissier » exprime le choix d'un prix d'exercice inférieur au cours actuel de l'action.

Les spreads calendaires peuvent être créés aussi bien avec des options de vente qu'avec des options d'achat. L'investisseur achète simplement une option de vente à matu-

rité longue et vend une option de vente à maturité courte. Comme le montre le graphique 10.9, le profil de gain est identique à celui qui est obtenu en utilisant des options d'achat.



Graphique 10.9 : Calendar spread créé en utilisant deux options de vente.

Un *reverse calendar spread* ou « spread calendaire inversé » est l'opposé de ce que montrent les graphiques 10.8 et 10.9. L'investisseur achète une option de maturité courte et vend une option de maturité longue. Un faible gain est obtenu si le cours de l'action, à l'échéance de l'option courte, est bien au-dessus ou bien en dessous du prix d'exercice des options. Cependant, l'investisseur subit une perte si le cours de l'action reste proche de ce prix d'exercice.

Les diagonal spreads

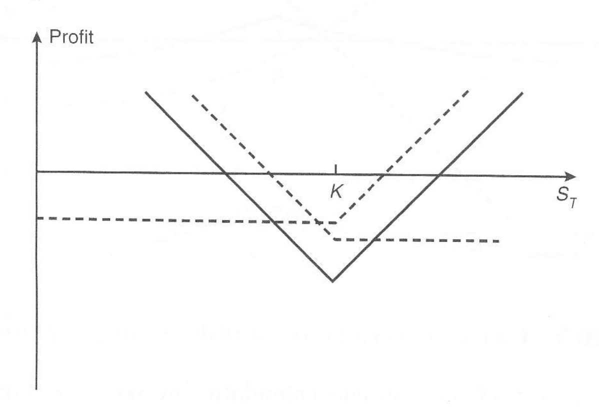
Les bull, bear et calendar spreads peuvent tous être créés en achetant une option d'achat et en vendant une autre option d'achat. Dans les cas des bull et bear spreads, les options d'achat ont différents prix d'exercice, mais la même échéance. Pour les calendar spreads, les options d'achat ont le même prix d'exercice, mais des maturités différentes. Dans le cas des *diagonal spreads*, ce sont à la fois les dates d'échéance et les prix d'exercice qui diffèrent. Cela augmente évidemment la gamme de profils de gains possibles.

10.3 Les combinaisons

Une combinaison est une stratégie impliquant des prises de position à la fois dans des options d'achat et des options de vente sur la même action sous-jacente. Nous présentons ici les *straddles*, les *strips*, les *straps* et les *strangles*.

Les straddles

L'une des combinaisons les plus connues est le straddle, qui consiste en l'achat d'un call et d'un put de même prix d'exercice et de même date d'échéance. Le profil de gain est présenté dans le graphique 10.10. Le prix d'exercice est noté K. Si le cours de l'action est proche du prix d'exercice à la date d'échéance des options, le straddle conduit à une perte. Toutefois, s'il y a une variation suffisante du cours de l'action, dans un sens ou dans l'autre, un gain significatif sera réalisé. Les flux à l'échéance d'un straddle sont présentés dans le tableau 10.6.



Graphique 10.10 : Un straddle.

Une stratégie de straddle est bien appropriée lorsque l'investisseur anticipe une importante variation du cours de l'action, mais qu'il ne sait pas dans quel sens elle va se produire. Considérons par exemple un investisseur pensant que la valeur d'une action, actuellement cotée 69 €, va varier de façon significative dans les trois prochains mois. L'investisseur peut alors réaliser un straddle en achetant à la fois un call et un put de prix d'exercice 70 € et d'échéance 3 mois. Supposons que le call coûte 4 € et le put 3 €. Si le cours de l'action reste à 69 €, il est facile de déduire que cette stratégie aura coûté 6 € à l'investisseur (l'investissement initial de 7 € moins la valeur du put, 1 €, sachant que le call expire sans valeur). Si le cours de l'action monte à 70 €, c'est alors une perte de 7 € qu'il subira (dans le pire des cas). Par contre, si le cours de l'action s'envole à 90 €, c'est un gain de 13 € qui est réalisé. De même, si le cours chute jusqu'à 55 €, l'investisseur encaissera un profit de 8 €.

Tableau 10.6 : Revenus d'un straddle à l'échéance

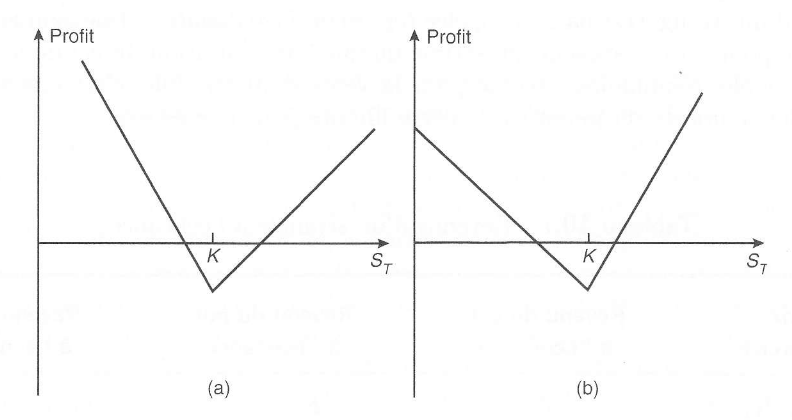
Prix d'exercice	Revenu du call à l'échéance	Revenu du put à l'échéance	Revenu global à l'échéance
$S_T \leqslant K$	0	$K - S_T$	$K - S_T$
$S_T > K$	$S_T - K$	0	$S_T - K$

Un straddle est une stratégie à privilégier lorsqu'un important écart dans le cours des actions d'une société est attendu, par exemple quand l'annonce d'une OPA ou de l'issue d'un procès majeur est imminente. Mais ce n'est pas nécessairement le cas. Si la vision générale du marché laisse envisager une brusque variation du cours de certaines actions, cela se reflétera également dans la valeur des options. Un investisseur trouvera alors des options sur ces actions significativement plus chères que des options sur des actions identiques, mais pour lesquelles aucune variation n'est attendue. Pour qu'un straddle soit une stratégie efficace, l'investisseur doit sélectionner des options sur des actions pour lesquelles il envisage une variation importante, mais surtout ces anticipations ne doivent pas être partagées par les autres intervenants du marché.

Le straddle du graphique 10.10 est parfois qualifié par les expressions anglo-saxonnes *bottom straddle* ou *straddle purchase*. Un *top straddle* ou *straddle write* consiste en une position inverse. Il est réalisé en vendant à la fois un call et un put, toujours avec le même prix d'exercice et la même date d'échéance. C'est une stratégie très risquée. Si le cours de l'action est voisin du prix d'exercice à la date d'échéance, un bénéfice significatif est réalisé. Par contre, les pertes engendrées par une forte variation du cours de l'action sont théoriquement illimitées.

Les strips et les straps

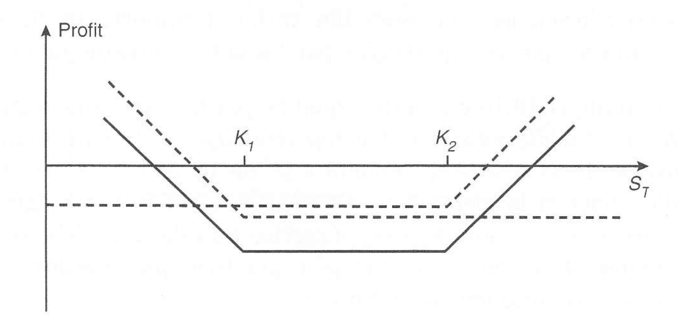
Un strip consiste en une position longue sur un call et sur deux puts de prix d'exercice et de dates d'échéance identiques. Un strap est une position longue sur deux calls et sur un put de mêmes prix d'exercice et de mêmes dates d'échéance. Les profils de gains des strips et des straps apparaissent dans le graphique 10.11. Dans un strip, l'investisseur parie sur une forte variation du cours de l'action, mais estime qu'elle est plus probable à la baisse qu'à la hausse. Dans un strap, l'investisseur parie également sur une forte variation de la valeur de l'action. Mais dans ce cas, il joue surtout une augmentation du cours de l'action.



Graphique 10.11 : Modèles de revenus d'un (a) strip et d'un (b) strap.

Les strangles

Dans un strangle, parfois appelé *bottom vertical combination*, un investisseur achète un put et un call de mêmes dates d'échéance, mais avec des prix d'exercice différents. Le profil de gain obtenu est présenté dans le graphique 10.12. Le prix d'exercice du call, K_2, est plus élevé que celui du put, K_1. Les flux à l'échéance sont calculés dans le tableau 10.7.



Graphique 10.12 : Un strangle.

Un strangle est une stratégie semblable au straddle. L'investisseur parie cependant sur une variation plus importante du cours de l'action. Si l'on compare les graphiques 10.12 et 10.10, on constate en effet que le cours de l'action doit varier beaucoup plus dans un strangle que dans un straddle pour que l'investisseur fasse un bénéfice. Cependant, la perte, si le cours de l'action reste dans les valeurs centrales, est inférieure dans un strangle car l'investissement initial est moins élevé.

Le profil de gain d'un strangle dépend de la valeur séparant les deux prix d'exercice. Plus les prix d'exercice sont éloignés, plus l'amplitude de la perte est faible et plus la variation du cours de l'action devra être forte pour espérer engendrer un bénéfice.

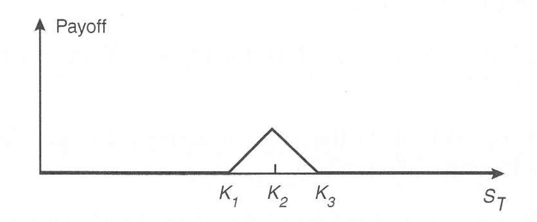
La vente d'un strangle est parfois appelée *top vertical combination*. Elle peut se révéler judicieuse pour un investisseur qui estime qu'une forte variation du cours de l'action est improbable. Néanmoins, comme pour la vente d'un straddle, c'est une stratégie risquée qui comporte un potentiel de perte illimité pour l'investisseur.

Tableau 10.7 : Revenus d'un strangle à l'échéance

Prix d'exercice	Revenu du call à l'échéance	Revenu du put à l'échéance	Revenu global à l'échéance
$S_T \leqslant K_1$	0	$K_1 - S_T$	$K_1 - S_T$
$K_1 < S_T < K_2$	0	0	0
$S_T \geqslant K_2$	$S_T - K_2$	0	$S_T - K_2$

10.4 Les autres profils de gains

Ce chapitre a simplement illustré quelques-unes des possibilités d'utilisation des options pour engendrer des profils de gains variés. Si des options européennes d'échéance T sont disponibles pour n'importe quel prix d'exercice, tous les profils de flux à la date T sont théoriquement possibles. L'illustration la plus simple de cette éventualité consiste en une série de butterfly spreads. Rappelons qu'un butterfly spread est créé en achetant deux options de prix d'exercice K_1 et K_3 et en vendant deux options de prix d'exercice K_2, avec $K_1 < K_2 < K_3$ et $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$. Le graphique 10.13 montre le flux à l'échéance d'un butterfly spread. Ce schéma peut être décrit comme un pic. Plus K_1 et K_3 se rapprochent l'un de l'autre, plus le pic devient aigu. Grâce à une combinaison judicieuse d'un grand nombre de ces pics, n'importe quelle fonction de payoff peut être approximée.



Graphique 10.13 : Le revenu à l'échéance d'un butterfly spread.

Résumé

De nombreuses stratégies impliquent une seule option combinée avec l'action sous-jacente. Par exemple, la stratégie de call couvert nécessite l'achat d'une action et la vente d'un call sur cette action ; tandis qu'une stratégie de protective put demande l'achat d'un put et d'une action. La première se rapproche de l'achat d'un put, la seconde de l'achat d'un call.

Les spreads comportent une position dans une ou plusieurs options d'achat, ou une position dans une ou plusieurs options de vente. Un bull spread peut être réalisé en achetant un call (put) de prix d'exercice bas et en vendant un autre call (put) de prix d'exercice plus élevé. Un bear spread peut, quant à lui, être réalisé en achetant un call (put) de prix d'exercice élevé et en vendant un call (put) de prix d'exercice plus bas. La création d'un butterfly spread implique l'achat de deux calls (puts) de prix d'exercice bas et haut et la vente de deux calls (puts) de prix d'exercice intermédiaire. Un calendar spread comprend la vente d'un call (put) de maturité courte et l'achat d'un call (put) d'une durée de vie plus longue. La réalisation d'un diagonal spread suppose une position longue dans une option et une position courte dans une autre option alors que les prix d'exercice sont différents, tout comme le sont les dates d'échéance.

Les combinaisons comportent une position avec des calls et des puts sur la même action. Une combinaison dite straddle implique d'acheter un call et un put de mêmes prix d'exercice et de dates d'échéance identiques. Un strip consiste à acheter un call

et deux puts avec les mêmes prix d'exercice et les mêmes dates d'échéance. Un strap consiste, lui, à acheter deux calls et un put avec les mêmes prix d'exercice et des durées de vie égales. Il y a de nombreux autres moyens d'utiliser des options pour obtenir des bénéfices substantiels à l'échéance. Il n'est donc pas surprenant de constater l'engouement toujours croissant pour les marchés d'options et la fascination qu'ils exercent sur les investisseurs.

Références complémentaires

BHARAADWAJ A. et J. B. WIGGINS, « Box Spread and Put-Call Parity Test for the S&P Index LEAPS Markets », *Journal of Derivatives*, 8, 4 (été 2001), 62-71.

CHAPUT J. S. et L. H. EDERINGTON, « Option Spread and Combination Trading », *Working Paper*, University of Otago, mars 2002.

MCMILLAN L. G., *Options as a Strategic Investment*, New York Institute of Finance, New York, 1992.

RENDLEMAN R. J., « Covered Call Writing from an Expected Utility Perspective », *Journal of Derivatives*, 8, 3 (printemps 2001), 63-75.

RONN A. G. et E. I. RONN, « The Box Spread Arbitrage Conditions », *Review of Financial Studies*, 2, 1 (1989), 91-108.

Problèmes et exercices

10.1 Qu'entend-on par protective put ? Quelle position en options d'achat est équivalente à un protective put ?

10.2 Donnez deux façons de réaliser un bear spread.

10.3 Dans quel cas est-il judicieux pour un investisseur d'acheter un butterfly spread ?

10.4 Des calls sur actions sont disponibles avec des prix d'exercice de 15 €, 17,5 € et 20 € et des échéances à 3 mois. Leurs prix sont respectivement de 4 €, 2 € et 0,5 €. Expliquez de quelle manière les options peuvent être utilisées pour créer un butterfly spread. Construisez un tableau montrant comment les revenus de ce butterfly spread varient en fonction du cours de l'action.

10.5 Quelle stratégie crée un reverse calendar spread ?

10.6 Quelle est la différence entre un strangle et un straddle ?

10.7 Un call de prix d'exercice 50 € coûte 2 €. Un put de prix d'exercice 45 € coûte 3 €. Expliquez de quelle manière on peut réaliser un strangle à partir de ces options. Quel est le profil de gain de ce strangle ?

10.8 Utilisez la parité call-put pour établir une relation entre l'investissement initial pour un bull spread créé à l'aide de calls et l'investissement initial pour un bull spread créé à l'aide de puts.

10.9 Expliquez comment on peut réaliser un bear spread agressif à l'aide d'options de vente.

10.10 Supposons que des options de vente sur une action avec des prix d'exercice de 30 € et 35 € coûtent respectivement 4 € et 7 €. Comment ces options peuvent-elles être utilisées pour créer un (a) bull spread et un (b) bear spread ? Construisez un tableau qui montre les résultats obtenus à l'échéance pour chacun de ces spreads.

10.11 Utilisez la parité call-put pour montrer que le coût d'un butterfly spread créé à l'aide de puts européens est identique à celui qui est créé à l'aide de calls européens.

10.12 Un call de prix d'exercice 60 € coûte 6 €. Un put de même prix d'exercice et de même date d'échéance coûte 4 €. Construisez le tableau qui montre les résultats d'un straddle. Pour quelles valeurs de l'action le straddle conduira-t-il à une perte ?

10.13 Présentez un tableau montrant le résultat à l'échéance d'un bull spread si l'on utilise des options de vente avec des prix d'exercice K_1 et K_2 ($K_2 > K_1$).

10.14 Un investisseur pense que le cours d'une action va connaître une forte et brutale variation, mais il ne sait pas si elle sera positive ou négative. Identifiez six stratégies différentes que l'investisseur peut suivre pour en profiter et expliquez leurs différences.

10.15 Comment peut-on, à l'aide d'options, créer un contrat forward sur une action avec un prix d'exercice et une date d'échéance donnés ?

10.16 « Un box spread comprend quatre options. Deux peuvent être combinées pour créer une position longue sur un forward et les deux autres pour créer une position courte sur un forward. » Commentez cette affirmation.

10.17 Quel est le résultat engendré par un strangle dont le prix d'exercice du put serait plus élevé que celui du call ?

10.18 Un franc suisse vaut actuellement 0,64 €. Un butterfly spread à 1 an est créé à l'aide d'options d'achat européennes avec des prix d'exercice de 0,60 €, 0,65 € et 0,70 €. Les taux d'intérêt sans risque en France et en Suisse sont respectivement de 5 % et 4 %, et la volatilité du taux de change est de 15 %. Utilisez le logiciel DerivaGem pour calculer le coût de mise en place du butterfly spread. Montrez que ce coût est le même si ce sont des options de vente européennes qui sont utilisées à la place des options d'achat.

Questions complémentaires

10.19 Trois options de vente sur une action ont la même date d'échéance et des prix d'exercice de 55 €, 60 € et 65 €. Leurs prix sur le marché sont respectivement de 3 €, 5 € et 8 €. Expliquez de quelle manière réaliser un butterfly spread. Construisez un tableau présentant les bénéfices d'une telle stratégie. Pour quelles valeurs de l'action le butterfly spread entraînera-t-il une perte ?

10.20 Un diagonal spread est créé en achetant un call de prix d'exercice K_2 et de date d'échéance T_2 et en vendant un call de prix d'exercice K_1 et de date d'échéance T_1, avec $T_2 > T_1$. Dessinez un graphique montrant les résultats de cette stratégie lorsque (a) $K_2 > K_1$ et (b) $K_2 < K_1$.

10.21 Construisez un graphique présentant les variations des gains et pertes d'un investisseur en fonction de la valeur de l'action à l'échéance pour les portefeuilles suivants :

a. Une action et une position courte sur un call.

b. Deux actions et une position courte sur un call.

c. Une action et une position courte sur deux calls.

d. Une action et une position courte sur quatre calls.

10.22 Dans chaque cas, vous supposerez que le call a un prix d'exercice égal à la valeur de l'action au moment de la prise de position.

10.23 Supposons que la valeur d'une action ne versant pas de dividendes soit 32 €, sa volatilité 30 % et le taux d'intérêt sans risque, quelles que soient les échéances, 5 % par an. Utilisez le logiciel DerivaGem pour calculer le coût de réalisation des positions qui suivent. Dans chaque cas, établissez un tableau présentant la relation entre les revenus et le cours de l'action. Négligez l'impact de l'actualisation.

a. Un bull spread utilisant des calls européens de prix d'exercice 25 € et 30 € et d'échéance 6 mois.

b. Un bear spread utilisant des puts européens de prix d'exercice 25 € et 30 € et d'échéance 6 mois.

c. Un butterfly spread utilisant des calls européens de prix d'exercice 25 €, 30 € et 35 € et d'échéance 1 an.

d. Un butterfly spread utilisant des puts européens de prix d'exercice 25 €, 30 € et 35 € et d'échéance 1 an.

e. Un straddle utilisant des options de prix d'exercice 30 € et d'échéance 6 mois.

f. Un strangle utilisant des options de prix d'exercice 25 € et 35 € et d'échéance 6 mois.

Chapitre 11

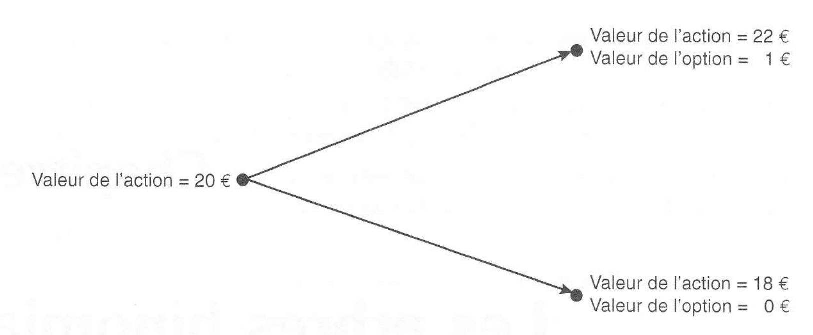
Les arbres binomiaux

L'approche la plus pédagogique, et donc la plus populaire pour évaluer les options sur actions, s'appuie sur la représentation de l'évolution du cours de l'action par un arbre binomial. Il s'agit d'un graphe représentant les différentes trajectoires du cours du sous-jacent pendant la durée de vie de l'option. Dans ce chapitre, nous présentons une première approche des arbres binomiaux et de leur relation avec le principe connu sous le nom d'évaluation risque-neutre. La présentation retenue ici est analogue à celle de Cox, Ross et Rubinstein dans leur article pionnier publié en 1979. Les éléments de ce chapitre se veulent introductifs. Une présentation approfondie des procédures numériques basées sur les arbres binomiaux apparaît au chapitre 17.

11.1 Le modèle binomial à une période

Supposons que nous cherchions à évaluer un call européen d'échéance trois mois et de prix d'exercice 21 €. Le cours de l'action est actuellement de 20 €. Pour simplifier, supposons que, dans trois mois, le cours de l'action puisse prendre seulement deux valeurs, 22 € ou 18 €. L'option n'a alors que deux valeurs possibles à la fin des trois mois. Si le cours de l'action atteint 22 €, le call vaut 1 €. Si, par contre, le cours de l'action tombe à 18 €, le call a une valeur nulle. Cette situation est illustrée dans le graphique 11.1.

Un raisonnement simple et élégant peut alors être utilisé pour évaluer l'option. La seule hypothèse nécessaire est l'absence d'opportunités d'arbitrage. Il suffit de construire un portefeuille comprenant l'action et l'option de telle manière qu'il n'y ait aucune incertitude sur la valeur de celui-ci à la fin des trois mois. Si le portefeuille est effectivement sans risque, sa rentabilité est forcément égale au taux sans risque. Cette démarche permet de calculer le coût de constitution du portefeuille et, par conséquent, la valeur de l'option. Puisqu'il y a deux titres (l'action et l'option) et seulement deux



Graphique 11.1 : Variations du cours de l'action de l'exemple numérique de la section 11.1.

résultats possibles, on a toujours la possibilité de constituer un portefeuille sans risque. On dit que le marché est complet.

Considérons donc un portefeuille constitué de Δ actions achetées et d'un call vendu. La valeur de Δ est choisie de façon à ce que le portefeuille soit sans risque. Si le cours progresse de 20 € à 22 €, la valeur des actions est alors 22Δ € et le call vaut 1 €. La valeur du portefeuille est donc $22\Delta - 1$. Si le cours de l'action baisse de 20 € à 18 €, la valeur des actions est 18Δ et celle de l'option est nulle. La valeur du portefeuille est dans ce cas 18Δ. Le portefeuille est sans risque si Δ est choisi de façon à vérifier l'égalité :

$$22\Delta - 1 = 18\Delta$$

d'où l'on déduit :

$$\Delta = 0{,}25$$

Par conséquent, un portefeuille sans risque présente les caractéristiques suivantes :

- achat de 0,25 action ;
- vente d'une option.

Si le cours de l'action atteint 22 €, la valeur du portefeuille est :

$$22 \times 0{,}25 - 1 = 4{,}5 \text{ €}$$

Si le cours de l'action tombe à 18 €, la valeur du portefeuille est :

$$18 \times 0{,}25 = 4{,}5 \text{ €}$$

Que la valeur de l'action augmente ou diminue, celle du portefeuille est toujours égale à 4,5 € à l'échéance de l'option.

En l'absence d'arbitrage, un portefeuille sans risque doit rapporter le taux sans risque. Supposons que, dans notre cas, le taux sans risque soit de 12 % par an. Il s'ensuit que la valeur du portefeuille aujourd'hui est la valeur actualisée de 4,5, soit :

$$4{,}5e^{-0{,}12\times 3/12} = 4{,}367$$

La valeur de l'action aujourd'hui est connue et égale à 20 €. Si f désigne la valeur de l'option à la date 0, la valeur du portefeuille à cette date est :

$$20 \times 0{,}25 - f = 5 - f$$

d'où :

$$5 - f = 4{,}367 \text{ €}$$

c'est-à-dire :

$$f = 0{,}633 \text{ €}$$

En l'absence d'opportunités d'arbitrage, la valeur de l'option doit être 0,633 €. Si elle était supérieure, le portefeuille coûterait moins de 4,367 € à sa création et rapporterait donc plus que le taux sans risque. Si la valeur de l'option était inférieure à 0,633 €, une position courte sur le portefeuille équivaudrait à un emprunt à un taux inférieur au taux sans risque.

Généralisation

Le raisonnement présenté ci-dessus peut être généralisé en considérant une action de prix S_0 et une option sur cette action dont la valeur est f. Nous supposons que l'option arrive à échéance à la date T et que, durant la vie de l'option, le cours de l'action peut progresser pour atteindre un nouveau prix S_0u ou baisser jusqu'à S_0d, en supposant que $u > 1$ et $d < 1$. La rentabilité de l'action en cas de hausse est donc $u-1$; en cas de baisse, elle est égale à $d-1$. Si le cours de l'action atteint S_0u, notons f_u le payoff de l'option ; si, par contre, le cours de l'action chute à S_0d, le payoff de l'option est noté f_d. Cette situation est illustrée sur le graphique 11.2.

Comme dans l'exemple précédent, imaginons un portefeuille consistant en une position longue sur Δ actions et une position courte sur une option. En cas de hausse du cours de l'action, la valeur du portefeuille à l'échéance de l'option est :

$$S_0u\Delta - f_u$$

En cas de baisse du cours de l'action, la valeur du portefeuille devient :

$$S_0d\Delta - f_d$$

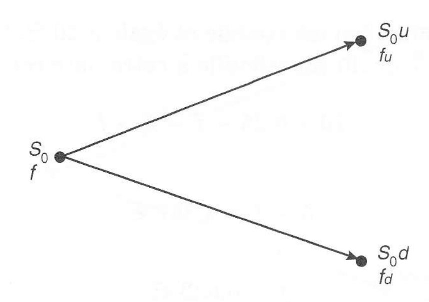
Pour que le portefeuille soit sans risque, les deux valeurs doivent être égales :

$$S_0u\Delta f_u = S_0d\Delta - f_d$$

c'est-à-dire :

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \tag{11.1}$$

La rémunération de ce portefeuille sans risque doit être égale au taux sans risque en l'absence d'opportunités d'arbitrage. L'équation (11.1) montre que Δ est le ratio de la différence des valeurs possibles de l'option et de la différence des valeurs possibles de l'action.



Graphique 11.2 : Valeurs de l'action et de l'option dans un arbre à une période.

Si l'on note le taux sans risque r, la valeur actuelle du portefeuille est :

$$(S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

Le coût de constitution du portefeuille est :

$$S_0\Delta - f$$

Il s'ensuit que :

$$S_0\Delta - f = (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

ou encore :

$$f = S_0\Delta(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

En substituant Δ par son expression donnée par l'équation (11.1) et en simplifiant l'équation obtenue, nous pouvons écrire :

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d] \tag{11.2}$$

avec :

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \tag{11.3}$$

Les équations (11.2) et (11.3) permettent l'évaluation d'une option par un modèle binomial à une période.

Dans l'exemple numérique présenté auparavant (voir graphique 11.1), $f_u = 1$, $f_d = 0$, $u = 1{,}1$, $d = 0{,}9$, $r = 0{,}12$, $T = 0{,}25$, $f_u = 1$ et $f_d = 0$. L'équation (11.3) conduit à :

$$p = \frac{e^{0,12\times 3/12} - 0{,}9}{1{,}1 - 0{,}9} = 0{,}6523$$

et en appliquant (11.2), on obtient :

$$f = e^{-0,12\times 0,25}\,[0{,}6523 \times 1 + 0{,}3477 \times 0] = 0{,}633$$

Le résultat correspond à celui obtenu précédemment dans cette section.

L'absence de pertinence de la rentabilité espérée

On remarque que l'espérance de rentabilité de l'action n'intervient pas dans l'évaluation. En effet, la formule d'évaluation de l'équation (11.2) ne contient pas les probabilités de variation du cours de l'action à la hausse ou à la baisse. Par exemple, nous obtenons la même valeur d'option que la probabilité de hausse soit de 50 % ou de 90 %, à condition de supposer que le cours initial de l'action est le même dans les deux cas. C'est surprenant et cela semble contre-intuitif. Il semblerait plus naturel de penser que plus la probabilité de hausse de l'action est élevée, plus la valeur du call augmente et la valeur du put diminue. Or, ce n'est pas le cas.

La raison fondamentale est que l'option est évaluée, compte tenu du prix de l'actif sous-jacent. En fait, la probabilité d'une hausse ou d'une baisse future est déjà incorporée dans le cours initial de l'action. Il s'ensuit que nous n'avons pas besoin de la prendre une nouvelle fois en compte pour évaluer l'option. Remarquons cependant que si les deux valeurs terminales de l'action sont fixées et que la probabilité de hausse passe de 50 % à 90 %, la valeur initiale de l'action augmente, ce qui aura pour effet de changer u et d et donc le prix de l'option. Ici, cet effet est neutralisé par une évaluation en termes de prix du sous-jacent.

11.2 L'évaluation risque-neutre

Bien que nous n'ayons nul besoin d'émettre des hypothèses sur les probabilités de hausse ou de baisse de l'action, pour obtenir l'équation (11.2), il est naturel d'interpréter la variable p de l'équation (11.2) comme la probabilité d'une hausse du cours de l'action. L'expression :

$$pf_u + (1 - p)\, f_d$$

est alors le payoff espéré de l'option. Grâce à cette interprétation de p, l'équation (11.2) établit alors que la valeur de l'option, à la date d'aujourd'hui, est l'espérance de sa valeur future, actualisée au taux sans risque.

Nous pouvons, à présent, examiner l'espérance de rentabilité de l'action lorsque la probabilité d'une hausse est supposée égale à p. L'espérance de la valeur de l'action, $E(S_T)$, à la date T, est donnée par :

$$E\,(S_T) = pS_0u + (1 - p)\, S_0d$$

qu'on peut encore écrire :

$$E\,(S_T) = pS_0\,(u - d) + S_0d$$

En remplaçant p par sa valeur dans l'équation (11.3), on obtient :

$$E\,(S_T) = S_0e^{rT} \tag{11.4}$$

La rentabilité espérée de l'action est égale au taux sans risque. Établir que la probabilité de hausse est égale à p revient par conséquent à supposer que la rentabilité espérée de l'action est égale au taux sans risque.

Dans une économie où tous les agents sont neutres face au risque, les investisseurs n'exigent aucune compensation pour le risque ; la rentabilité attendue de tous les actifs est alors égale au taux sans risque. L'équation (11.4) montre que, lorsque nous utilisons p comme probabilité de hausse, nous nous plaçons dans une telle économie, appelée « univers risque-neutre ». L'équation (11.2) montre que, dans l'univers risque-neutre, la valeur de l'option est égale à l'espérance mathématique du flux qu'elle engendre à l'échéance, actualisée au taux sans risque.

Ce résultat est un exemple du principe général d'évaluation des options, connu sous le nom d'« évaluation risque-neutre ». Ce principe stipule que, pour évaluer une option, il est possible, en choisissant la « bonne » probabilité, de faire comme si les agents étaient neutres face au risque. La valeur ainsi calculée est correcte, non seulement dans l'univers risque-neutre, mais aussi dans l'univers réel dans lequel les agents présentent de l'aversion pour le risque.

Réexamen de l'exemple binomial à une période

Reprenons à présent l'exemple du graphique 11.1 afin de montrer que l'évaluation risque-neutre apporte la même réponse que celle obtenue en construisant un portefeuille sans risque. Dans le graphique 11.1, le cours de l'action est initialement de 20 € ; il monte à 22 € ou chute à 18 € après trois mois. L'option considérée est un call européen avec un prix d'exercice de 21 € et une durée de vie de trois mois. Le taux d'intérêt sans risque est 12 % par an.

Notons p la probabilité d'une hausse du cours de l'action dans l'univers risque-neutre ; elle est calculée à partir de l'équation (11.3). De plus, l'espérance de rentabilité de l'action dans l'univers risque-neutre est égale au taux sans risque, soit 12 %. La probabilité p doit donc satisfaire l'équation suivante :

$$22p + 18(1 - p) = 20e^{0,12\times 3/12}$$

soit :

$$4p = 20e^{0,12\times 3/12} - 18$$

et donc p est égale à 0,6523.

À l'issue des trois mois, l'option d'achat a une probabilité 0,6523 de valoir 1 € et une probabilité 0,3477 de valoir zéro. Ainsi, sa valeur espérée à l'échéance est :

$$0,6523 \times 1 + 0,3477 \times 0 = 0,6523$$

Dans l'univers risque-neutre, cette valeur moyenne doit être actualisée au taux sans risque. La valeur de l'option, à la date d'aujourd'hui, est donc :

$$0,6523e^{-0,12\times 3/12}$$

soit 0,633 €. Nous retrouvons bien la valeur obtenue précédemment, démontrant que le raisonnement fondé sur la construction d'un portefeuille sans risque (que nous appe-

lons raisonnement d'arbitrage dans la suite) et l'évaluation risque-neutre produisent la même valeur d'option.

Univers réel ou univers risque-neutre

Soulignons que p est la probabilité de hausse dans l'univers risque-neutre. Généralement, elle n'est pas égale à la probabilité de hausse dans l'univers réel. Dans notre exemple, $p = 0{,}6523$. Lorsque la probabilité de hausse est de 0,6523, l'espérance de rentabilité de l'action est égale au taux sans risque, soit 12 %. Supposons que, dans l'univers réel, l'espérance de rentabilité de l'action soit de 16 % et notons q la probabilité de hausse dans l'univers réel. On a alors :

$$22q + 18(1 - q) = 20e^{0{,}16\times 3/12}$$

et donc $q = 0{,}7041$.

L'espérance de payoff de l'option dans l'univers réel est alors égale à :

$$q \times 1 + (1 - q) \times 0$$

c'est-à-dire 0,7041. Malheureusement, il n'est pas facile de connaître exactement le taux d'actualisation à appliquer au payoff de l'option dans l'univers réel. Une position dans une option d'achat est plus risquée qu'une position dans une action. Par conséquent, le taux d'actualisation à appliquer au payoff d'un call est bien supérieur à 16 %. Sans connaître la valeur de l'option, nous ne pouvons pas savoir de combien ce taux doit être supérieur à 16 %[1]. L'évaluation risque-neutre résout le problème. Nous savons en effet que, dans l'univers risque-neutre, l'espérance de rentabilité de tous les actifs (et par conséquent le taux d'actualisation à utiliser pour tous les payoffs espérés) est le taux sans risque.

11.3 Les arbres binomiaux à deux périodes

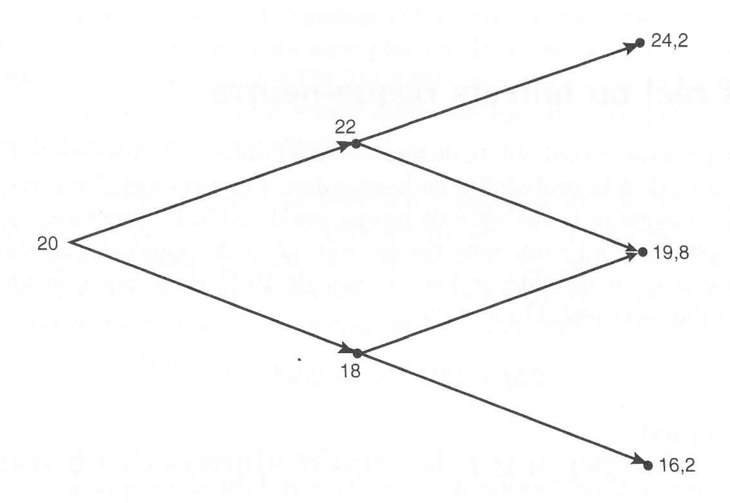
L'analyse précédente peut être étendue à un arbre binomial à deux périodes, tel qu'il est présenté sur le graphique 11.3. Ici, le cours initial de l'action est 20 € et, à chacune des périodes, il peut augmenter de 10 % ou baisser de 10 %. Nous supposons que chaque période dure trois mois et que le taux sans risque est de 12 % par an.

Comme dans l'exemple précédent, le prix d'exercice de l'option est supposé égal à 21 €.

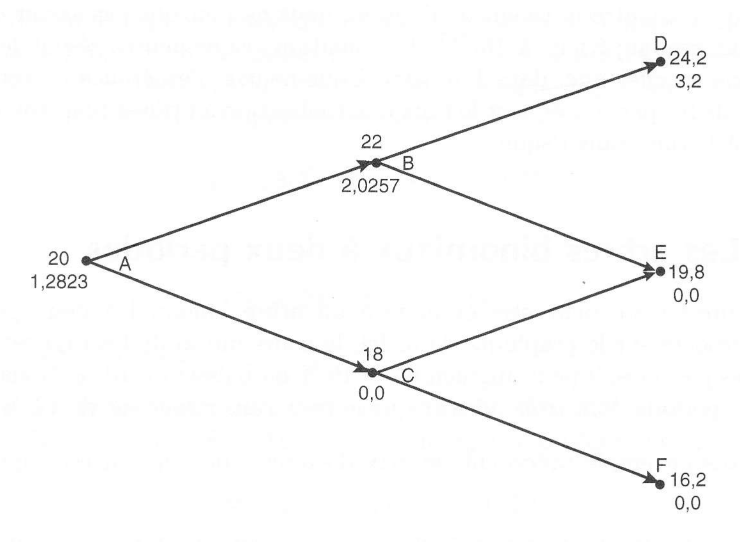
L'objectif est de calculer la valeur de l'option au nœud initial de l'arbre. Il suffit, pour cela, d'appliquer itérativement les principes établis précédemment dans ce chapitre.

---

1. Puisque ici la valeur de l'option est 0,633, nous pouvons déduire que le taux d'actualisation du payoff de l'option est égal à 42,6 %. En effet, $0{,}633 = 0{,}7041e^{-0{,}4258\times 3/12}$.



Graphique 11.3 : Valeurs de l'action dans un arbre à deux périodes.

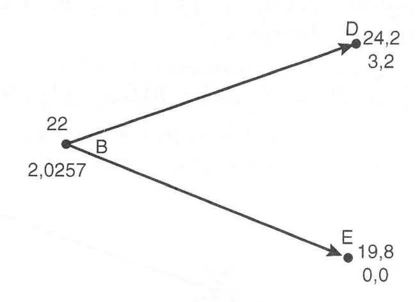


Graphique 11.4 : Valeurs de l'action et de l'option dans un arbre à deux périodes. Le nombre indiqué au dessus de chaque nœud est la valeur de l'action, le nombre du bas, la valeur de l'option.

Le graphique 11.4 représente le même arbre d'évolution que celui du graphique 11.3, mais précise à la fois le cours de l'action et la valeur de l'option à chaque nœud. Le cours de l'action est le nombre du haut, la valeur de l'option est celui du bas. Les valeurs de l'option aux nœuds terminaux de l'arbre sont faciles à calculer. Ce sont les payoffs terminaux du contrat. Au nœud D, le cours de l'action est de 24,2 et la valeur de l'option, à l'échéance, est 24,2 – 21 = 3,2. Aux nœuds E et F, l'option est en dehors de la monnaie et sa valeur est nulle.

Au nœud C, la valeur de l'option est nulle car le nœud C conduit à l'un ou l'autre des nœuds E ou F et, sur chacun d'eux, la valeur de l'option est nulle. La valeur de l'option au nœud B est calculée en prenant appui sur la partie de l'arbre représentée sur le graphique 11.5. En gardant les notations et les valeurs des paramètres de la section 11.1, à savoir $u = 1{,}1$, $d = 0{,}9$, $r = 0{,}12$ et $T = 0{,}25$, nous obtenons encore $p = 0{,}6523$ et l'équation (11.2) donne la valeur de l'option au nœud B, c'est-à-dire :

$$e^{-0{,}12\times 3/12}(0{,}6523 \times 3{,}2 + 0{,}3477 \times 0) = 2{,}0257$$



Graphique 11.5 : Évaluation de l'option au nœud B.

Il ne nous reste plus qu'à calculer la valeur initiale de l'option au nœud A, en focalisant notre attention sur la première partie de l'arbre. La valeur de l'option au nœud B est 2,0257 alors qu'elle est nulle au nœud C. L'équation (11.2) fournit donc la valeur de l'option au nœud A, sous la forme :

$$e^{-0{,}12\times 3/12}(0{,}6523 \times 2{,}0257 + 0{,}3477 \times 0) = 1{,}2823$$

La valeur de l'option est donc 1,2823 €.

Il faut noter que cet exemple est construit avec des paramètres u et d (qui sont les rentabilités de l'action à la hausse et à la baisse) indépendants de la date et du nœud de l'arbre considérés. De plus, les périodes sont de même durée. Par conséquent, la probabilité risque-neutre, p, telle qu'elle est calculée avec l'équation (11.3) est la même à chaque nœud.

Généralisation

Le graphique 11.6 montre comment généraliser le raisonnement. Le cours initial de l'action est S_0 et, durant chaque période, le cours de l'action est multiplié par u ou

par d. La notation de la valeur de l'option apparaît sur l'arbre (par exemple, après deux hausses successives, l'option vaut f_{uu}) Le taux d'intérêt sans risque est noté r et chaque période dure Δt années. Comme la longueur du pas de temps est maintenant Δt, les équations (11.2) et (11.3) s'écrivent :

$$f = e^{-r\Delta T}\left[pf_u + (1-p)\,f_d\right] \tag{11.5}$$

avec :

$$p = \frac{e^{r\Delta T} - d}{u - d} \tag{11.6}$$

L'application répétée de l'équation (11.5) donne :

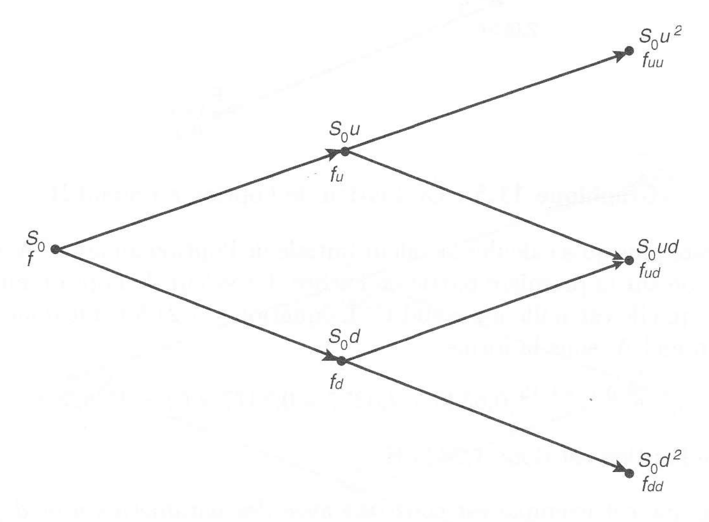
$$f_u = e^{-r\Delta t}\left[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}\right] \tag{11.7}$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}\left[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}\right] \tag{11.8}$$

$$f = e^{-r\Delta t}\left[pf_u + (1-p)f_d\right] \tag{11.9}$$

En remplaçant, dans l'équation (11.9), f_u et f_d par leurs valeurs données dans les équations (11.7) et (11.8), nous obtenons :

$$f = e^{-2r\Delta t}\left[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}\right] \tag{11.10}$$



Graphique 11.6 : Valeurs de l'action et de l'option dans un arbre général à deux périodes.

Cette formulation est cohérente avec le principe d'évaluation risque-neutre mentionné plus haut. p^2, $2p(1-p)$ et $(1-p)^2$ sont les probabilités que les nœuds terminaux du haut, du milieu et du bas soient atteints. La valeur de l'option est égale à son payoff espéré dans l'univers risque-neutre, actualisé au taux sans risque.

Le principe d'évaluation risque-neutre reste valide quand nous ajoutons des périodes supplémentaires sur l'arbre binomial. La valeur de l'option est toujours égale à son payoff espéré dans l'univers risque-neutre, actualisé au taux d'intérêt sans risque.

11.4 Un exemple avec une option de vente

Les procédures décrites dans ce chapitre sont applicables à l'évaluation de n'importe quel produit dérivé tant que le prix de l'actif sous-jacent varie de façon binomiale. Considérons un put européen à deux ans de prix d'exercice 52 € sur une action cotée actuellement 50 €. La durée de vie de l'option est divisée en deux périodes d'un an chacune et, à chaque période, le cours de l'action augmente de 20 % ou baisse de 20 %. Le taux sans risque est supposé égal à 5 %.

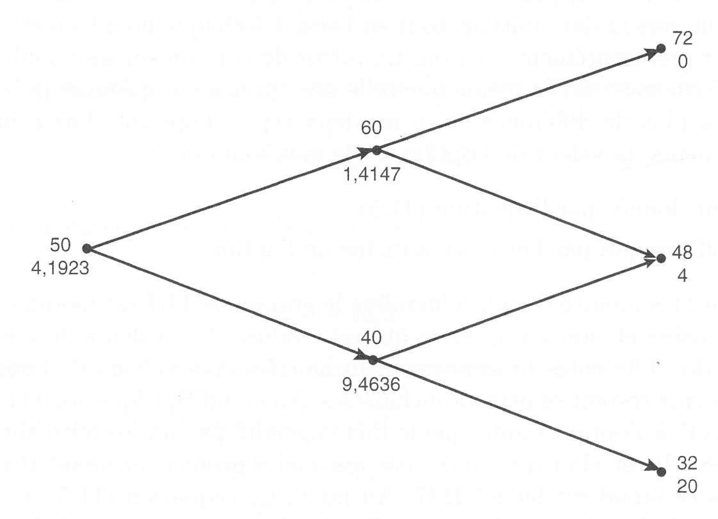
L'arbre de cette situation est représenté dans le graphique 11.7. La probabilité risque-neutre de hausse, p, est donnée par l'équation (11.6), à savoir :

$$p = \frac{e^{0,05\times 1} - 0,8}{1,2 - 0,8} = 0,6282$$

Les valeurs finales possibles de l'action sont : 72 €, 48 € et 32 €. Dans ce cas, $f_{uu} = 0$, $f_{ud} = 4$ et $f_{dd} = 20$. De l'équation (11.10), on déduit :

$$f = e^{-2\times 0,05\times 1}\left(0,6282^2 \times 0 + 2 \times 0,6282 \times 0,3718 \times 4 + 0,3718^2 \times 20\right) = 4,1923$$

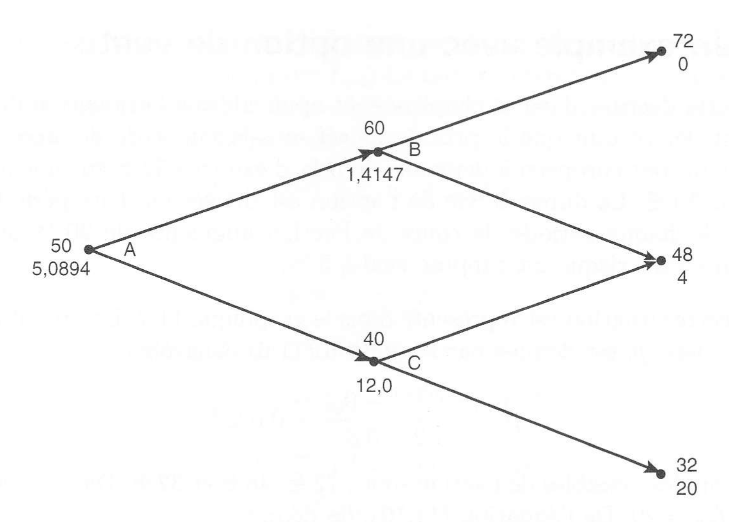
La valeur du put est donc 4,1923 €. Ce résultat peut également être obtenu en utilisant l'équation (11.5) et en calculant les valeurs d'option sur chaque nœud et à chaque date, en débutant par la fin (ce procédé est appelé « induction arrière »). Le graphique 11.7 montre les valeurs intermédiaires de l'option ainsi calculées.



Graphique 11.7 : Utilisation d'un arbre binomial à deux périodes pour évaluer une option de vente européenne. Le nombre indiqué au dessus de chaque nœud est la valeur de l'action, le nombre du bas, la valeur de l'option.

11.5 Les options américaines

Jusqu'à présent, toutes les options considérées étaient de type européen. Nous allons maintenant aborder l'évaluation des options américaines à l'aide d'arbres binomiaux,



Graphique 11.8 : Utilisation d'un arbre binomial à deux périodes pour évaluer une option américaine. Le nombre indiqué au dessus de chaque nœud est la valeur de l'action, le nombre du bas, la valeur de l'option.

tels que ceux des graphiques 11.4 et 11.7. La procédure consiste à calculer la valeur sur chaque nœud de l'arbre, par induction arrière, c'est-à-dire en partant de l'échéance et en revenant vers la date initiale, tout en testant à chaque nœud s'il est optimal ou non d'exercer prématurément l'option. La valeur de l'option sur les nœuds terminaux (à la date d'échéance) est la même que celle des options européennes puisque à cette date, il n'y a plus de différence entre les deux types d'options. Par contre, sur les nœuds précédents, la valeur de l'option est le maximum de :

1. La valeur donnée par l'équation (11.5).
2. Le payoff procuré par l'exercice anticipé de l'option.

Le graphique 11.8 montre de quelle manière le graphique 11.7 est modifié si c'est une option américaine et non européenne qui est évaluée. Les valeurs de l'action et les probabilités des différentes branches sont inchangées. Les valeurs de l'option sur les nœuds terminaux restent également inchangées. Au nœud B, l'équation (11.5) attribue la valeur 1,4147 à l'option tandis que le flux engendré par un exercice anticipé serait négatif (= –8). Il est clair qu'il n'est pas optimal d'exercer au nœud B et la valeur de l'option à ce nœud est bien 1,4147. Au nœud C, l'équation (11.5) donne 9,46136 comme valeur de l'option tandis que le flux lié à un exercice anticipé serait de 12. Dans ce cas, l'exercice prématuré est optimal et la valeur de l'option au nœud C est égale à 12. Au nœud initial A, la valeur calculée par application de l'équation (11.5) est alors :

$$e^{-0,05\times 1}\,(0{,}6282 \times 1{,}4147 + 0{,}3718 \times 12{,}0) = 5{,}0894$$

et le payoff d'un exercice anticipé est égal à 2. Dans ce cas, comme pour le nœud B, il n'est pas optimal d'exercer prématurément l'option et sa valeur reste donc 5,0894 €. L'évaluation des options américaines à l'aide d'arbres binomiaux est présentée plus en détail au chapitre 17.

11.6 Le delta

À ce stade, il est temps de présenter le delta, paramètre essentiel dans la gestion et la couverture des options.

Le delta d'une option sur action se définit comme la variation de valeur de l'option rapportée à la variation de prix de l'action sous-jacente. Il représente le nombre d'unités d'action à détenir pour chaque option vendue, afin de créer un portefeuille sans risque. Il est identique au Δ introduit au début de ce chapitre. La construction d'une telle couverture est parfois appelée « couverture delta-neutre » ou *delta hedging* dans la terminologie anglo-saxonne. Le delta d'un call est positif alors que le delta d'un put est négatif puisque le prix d'un call (put) est une fonction croissante (décroissante) du prix de l'action sous-jacente.

À partir du graphique 11.1, nous pouvons calculer la valeur du delta du call de la manière suivante :

$$\frac{1-0}{22-18} = 0{,}25$$

Ce ratio traduit le fait que lorsque le cours de l'action varie de 18 € à 22 €, la valeur de l'option varie de 0 € à 1 €.

Sur le graphique 11.4, le delta correspondant aux variations du cours de l'action pour la première période est :

$$\frac{2{,}0257-0}{22-18} = 0{,}5064$$

Le delta correspondant aux variations du cours de l'action de la seconde période est :

$$\frac{3{,}2-0}{24{,}2-19{,}8} = 0{,}7273$$

en cas de hausse du cours pendant la première période et :

$$\frac{0-0}{19{,}8-16{,}2} = 0$$

en cas de baisse du cours pendant la première période.

D'après le graphique 11.7, le delta du put est :

$$\frac{1{,}4147-9{,}4636}{60-40} = -0{,}4024$$

à la fin de la première période. Il vaut, soit :

$$\frac{0-4}{72-48} = -0{,}1667$$

soit :

$$\frac{4-20}{48-32} = -1{,}0000$$

à la fin de la seconde période.

Ces exemples à deux périodes montrent que le delta change à chaque date. (Sur le graphique 11.4, le delta passe de 0,5064 à 0,7273 ou à 0. Dans le graphique 11.7, il varie de –0,4024 à –0,1667 ou à –1,0000. Aussi, dans le but de maintenir une couverture sans risque en utilisant une option et l'action sous-jacente, il faut ajuster le nombre d'actions détenues à chaque période. Nous reviendrons sur cette caractéristique des options au chapitre 15.

11.7 La relation liant u, d et la volatilité

En pratique, lorsqu'un arbre binomial est construit pour représenter les variations de cours d'une action, les paramètres u et d sont définis par la volatilité de l'action. En effet, supposons que l'espérance de rentabilité de l'action (dans l'univers réel où les investisseurs présentent de l'aversion au risque) soit égale à μ et sa volatilité à σ. Le graphique 11.9a montre les variations du cours de l'action lors de la première période, d'une durée Δt, d'un arbre binomial. La valeur de l'action peut être multipliée par u ou par d. La probabilité d'une hausse (dans l'univers réel) est notée q.

L'espérance de la valeur de l'action à la fin de la première période est égale à $S_0e^{\mu\Delta t}$. À partir de l'arbre, cette espérance s'écrit :

$$qS_0u + (1-q)\,S_0d$$

La correspondance entre la rentabilité espérée de l'action et les paramètres u et d s'établit par l'égalité :

$$qS_0u + (1-q)\,S_0d = S_0e^{\mu\Delta t}$$

avec :

$$q = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d} \tag{11.11}$$

Comme nous l'expliquerons au chapitre 13, la volatilité du cours d'une action est telle que $\sigma\sqrt{\Delta t}$ représente l'écart-type de la rentabilité de l'action sur une courte période de durée Δt. De manière équivalente, la variance de la rentabilité est $\sigma^2\Delta t$. Sur l'arbre du graphique 11.9a, la variance de rentabilité de l'action est[2] :

$$qu^2 + (1-q)\,d^2 - [qu + (1-q)\,d]^2$$

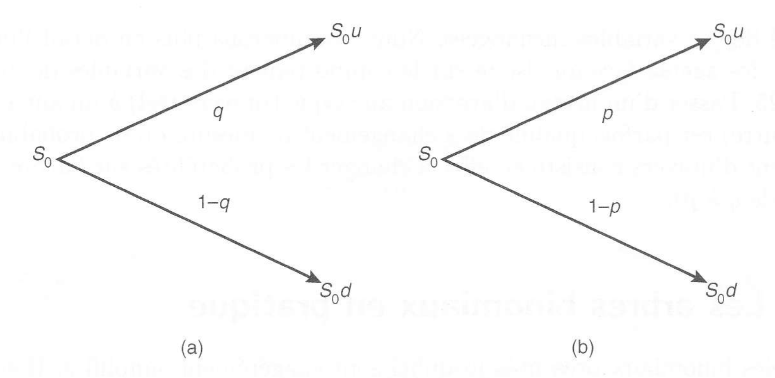
Pour ajuster la volatilité du cours de l'action avec les paramètres de l'arbre, l'équation suivante doit donc être vérifiée :

$$qu^2 + (1-q)\,d^2 - [qu + (1-q)\,d]^2 = \sigma^2\Delta t \tag{11.12}$$

En remplaçant q dans l'équation (11.10) par sa valeur, déduite de l'équation (11.9), nous obtenons :

$$e^{\mu\Delta t}\,(u+d) - ud - e^{2\mu\Delta t} = \sigma^2\Delta t$$

2. La variance d'une variable Q est égale à $E(Q^2) - [E(Q)]^2$, où E représente l'espérance mathématique.



Graphique 11.9 : Variation du cours de l'action durant le temps δt dans (a) l'univers réel d'aversion envers le risque et (b) l'univers risque-neutre.

Lorsque les termes en Δt^2 ou d'ordre supérieur sont négligés, une solution à cette équation est :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{11.13}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{11.14}$$

Ce sont les valeurs proposées par Cox, Ross et Rubinstein (1979) pour ajuster u et d.

L'analyse menée dans ce chapitre montre que l'on peut remplacer l'arbre du graphique 11.9a par l'arbre du graphique 11.9b, dans lequel la probabilité d'une hausse du cours de l'action est p, comme si l'on se trouvait dans l'univers risque-neutre. La variable p est donnée par l'équation (11.6) :

$$p = \frac{a-d}{u-d} \tag{11.15}$$

avec :

$$a = e^{r\Delta t} \tag{11.16}$$

C'est la probabilité risque-neutre d'une hausse du cours de l'action. Dans le graphique 11.9b, l'espérance du cours de l'action à la fin de la période est $S_0e^{r\Delta t}$, comme le montre l'équation (11.4). Par ailleurs, la variance de rentabilité de l'action est :

$$pu^2 + (1-p)\,d^2 - [pu + (1-p)\,d]^2 = \left[e^{r\Delta t}\,(u+d) - ud - e^{2r\Delta t}\right]$$

En remplaçant u et d par leurs valeurs, déduites des équations (11.13) et (11.14), nous obtenons une variance égale à $\sigma^2\Delta t$, lorsque les termes en Δt^2 ou d'ordre supérieur sont négligés.

Ceci montre que lorsque nous passons de l'univers réel à l'univers risque-neutre, l'espérance du taux de rentabilité de l'action change, mais la volatilité reste la même (du moins quand Δt tend vers zéro). C'est une illustration d'un résultat beaucoup plus général, le *théorème de Girsanov*. Passer d'un univers caractérisé par une certaine attitude vis-à-vis du risque à un univers caractérisé par un autre niveau d'aversion au risque modifie les espérances des taux de croissance des variables, mais laisse les

volatilités de ces variables inchangées. Nous examinerons plus en détail l'impact de l'attitude des agents face au risque sur le comportement des variables de marché au chapitre 25. Passer d'un niveau d'aversion au risque (univers réel) à un autre (univers risque-neutre) est parfois qualifié de « changement de mesure ou de probabilité ». Ce changement d'univers consiste en effet à changer les probabilités sur l'arbre binomial (passage de q à p).

11.8 Les arbres binomiaux en pratique

Les modèles binomiaux présentés jusqu'ici sont exagérément simplifiés. Bien sûr, un analyste n'obtiendrait qu'une très grossière approximation de la valeur d'une option en supposant que les variations du cours de l'action durant la vie de l'option se résument à une ou deux étapes binomiales.

Lorsque les arbres binomiaux sont employés dans la pratique, la durée de vie de l'option est divisée, par exemple, en 30 périodes, ou davantage, de longueur Δt. Sur chaque période, l'évolution du cours de l'action est binomiale. Après 30 périodes, 31 valeurs finales sont possibles pour le cours de l'action et 2^{30} trajectoires de cours, soit plus d'un milliard, sont à considérer dans un tel arbre.

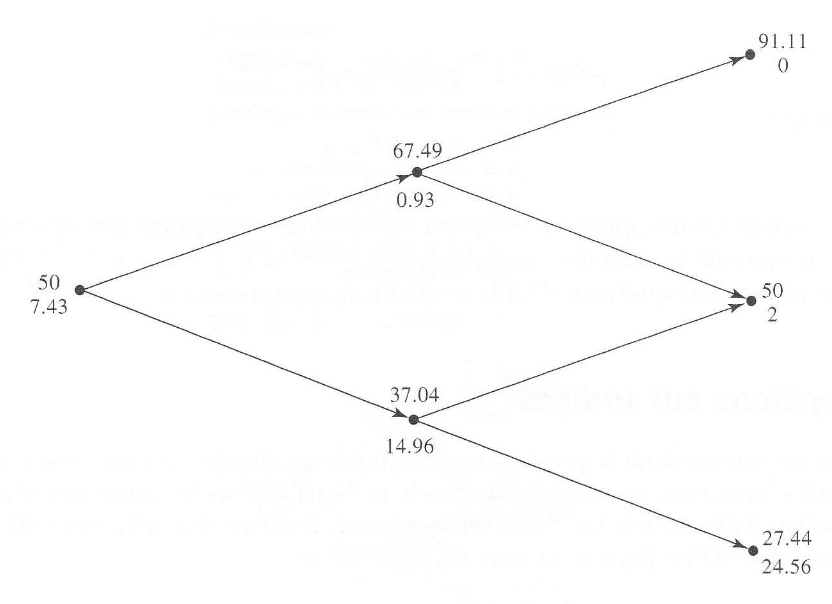
Comme nous l'avons précisé, les paramètres u et d sont déterminés de façon à recouvrer la volatilité du cours de l'action. L'ensemble des équations définissant un arbre binomial est alors :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p = \frac{e^{r\Delta T} - d}{u - d}$$

Le chapitre 17 approfondit l'étude de ces formules et des problèmes pratiques rencontrés dans la construction et l'utilisation de tels arbres. DerivaGem offre une façon d'évaluer les options avec un nombre de périodes compris entre 2 et 500 (en choisissant le type d'option Binomial European ou Binomial American). Les arbres, jusqu'à 10 périodes, peuvent être affichés par le logiciel. Par exemple, quand vous avez chargé le programme, sélectionnez l'onglet Equity_FX_Index_Futures_Options. Choisissez Equity (action) comme sous-jacent (Underlying Type) et American Binomial comme méthode d'évaluation (Option Type). Entrez le prix de l'action, la volatilité, le taux sans risque, la durée de vie, le prix d'exercice et le nombre de pas, c'est-à-dire les valeurs 50 , 30 %, 5 %, 2, 52 et 2. Cochez la case Put et cliquez Calculate. Le prix obtenu pour l'option est de 7,428 (boîte Price). En choisissant alors Display Tree, vous verrez l'équivalent du graphique 11.10. (Les nombres en rouge sur la feuille Excel indiquent les nœuds où l'exercice prématuré est optimal.)

Retournez à la feuille de calcul Equity_FX_Index_Futures_Options et choisissez un nombre de pas égal à 5. Validez ce choix par Entrée puis cliquez sur Calculate. Vous constaterez une valeur d'option égale à 7,671. En choisissant Display Tree, vous verrez l'arbre à 5 périodes, avec les valeurs correspondantes pour u, d, a, p.

Si, par contre, vous sélectionnez Binomial European et retenez 500 pas, vous aboutirez à une valeur de put égale à 6,76, alors que la valeur de l'option américaine avec 500 pas



Graphique 11.10 : Arbre à deux périodes pour l'évaluation d'un put américain à deux ans avec un prix de l'action à 50, un prix d'exercice de 52, un taux sans risque de 5 % et une volatilité de 30 %

est de 7,47. Le modèle de Black et Scholes présenté au chapitre 13 donne lui aussi une valeur de 6,76 pour l'option européenne. On peut aussi, en choisissant un autre support (Underlying Type), évaluer des options portant sur d'autres sous-jacents.

11.9 Les options portant sur d'autres sous-jacents

Nous avons évoqué au chapitre 8 les options sur indices, devises et contrats futures et nous les analyserons à nouveau au chapitre 14. En fait, les arbres binomiaux peuvent aussi être utilisés pour évaluer ces différents contrats, de la même façon qu'ils ont permis d'évaluer les options sur actions. Toutefois, l'équation qui définit la probabilité p change. Mais comme c'était le cas pour les options sur actions (équation (11.2)), la valeur de l'option à un nœud donné est égale à p fois la valeur au nœud suivant dans l'état up plus $(1 - p)$ fois la valeur de l'option au nœud suivant, le tout actualisé au taux sans risque.

Les options sur des actions payant des dividendes

Considérons une action payant un dividende au taux q. La rentabilité de ce titre est la somme du taux de dividende et du gain en capital ; elle doit être égale au taux sans risque dans l'univers risque-neutre. En conséquence, le taux de croissance du prix est égal à $r - q$. Si le prix initial est S_0, sa valeur espérée après un délai Δt est donnée

par :

$$pS_0u + (1 - q)\, S_0d = S_0e^{(r-q)\Delta t}$$

De sorte que :

$$p = \frac{e^{(r-q)\Delta T} - d}{u - d}$$

Comme dans le cas des options portant sur des actions qui ne paient pas de dividende, on tient compte de la volatilité en retenant $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ et $d = 1/u = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$. On peut toujours utiliser les équations (11.13) et (11.6), mais en posant $a = e^{(r-q)\Delta T}$.

Les options sur indices

Quand nous avons calculé le prix futures d'un indice au chapitre 5, nous avons supposé que l'indice procurait un taux de dividende q. Nous faisons la même hypothèse ici. L'évaluation d'une option sur indice relève alors de la même démarche que celle d'une option sur une action payant un taux de dividende q.

■ **Exemple 11.1**

Un indice d'actions vaut aujourd'hui 810 points, a une volatilité de 20 % et un taux de dividende de 2 %. Le taux sans risque est de 5 %. Le graphique 11.11 montre ce que donne DerivaGem quand on évalue un call à 6 mois sur cet indice avec un prix d'exercice de 800 et un arbre à 2 périodes.

Dans ce cas on a :

$$\Delta t = 0{,}25 \; ; u = e^{0{,}2\sqrt{0{,}25}} = 1{,}1052$$
$$d = 1/u = 0{,}9048 \; ; a = e^{(0{,}05-0{,}02)\times 0{,}25} = 1{,}0075$$
$$p = (1{,}0075 - 0{,}9048)/(1{,}1052 - 0{,}9048) = 0{,}5126$$

On obtient une valeur d'option de 53,39.

Les options sur devises

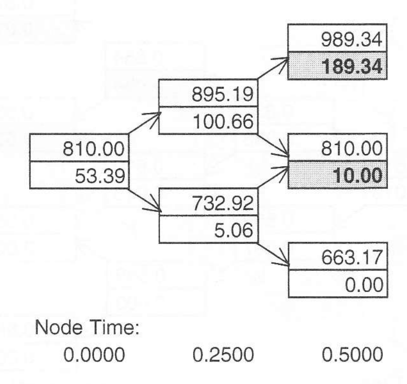
Comme nous l'avons vu à la section 5.10, une devise peut être vue comme un actif payant un taux de dividende égal au taux sans risque étranger, r_f. Par analogie avec ce qui vient d'être fait pour les options sur indices, on peut évaluer les options sur devises à l'aide des équations (11.13) à (11.16) en posant $a = e^{(r-r_f)\Delta T}$.

■ **Exemple 11.2**

Le dollar australien cote 0,6100 USD et ce taux de change a une volatilité de 12 %. Le taux sans risque australien est de 7 %, alors que le taux US est de 5 %. Le graphique 11.12 montre ce que donne DerivaGem quand on évalue un call américain (en USD) à 3 mois avec un prix d'exercice de 0,6000 et un arbre à 3 périodes.

At each node:
Upper value = Underlying Asset Price
Lower value = Option Price
Shading indicates where option is exercised

Strike price = 800
Discount factor per step = 0.9876
Time step, dt = 0.2500 years, 91.25 days
Growth factor per step, a = 1.0075
Probability of up move, p = 0.5126
Up step size, u = 1.1052
Down step size, d = 0.9048



Graphique 11.11 : Arbre à 2 périodes pour évaluer un call à 6 mois sur un indice valant 810, avec un prix d'exercice de 800, un taux sans risque de 5 %, une volatilité de 20 % et un taux de dividende de 2 %.

Dans ce cas on a :

$$\Delta t = 0{,}08333 \ ; \ u = e^{0{,}12\sqrt{0{,}08333}} = 1{,}0352$$

$$d = 1/u = 0{,}9660 \ ; a = e^{(0{,}05-0{,}07)\times 0{,}0833} = 0{,}9983$$

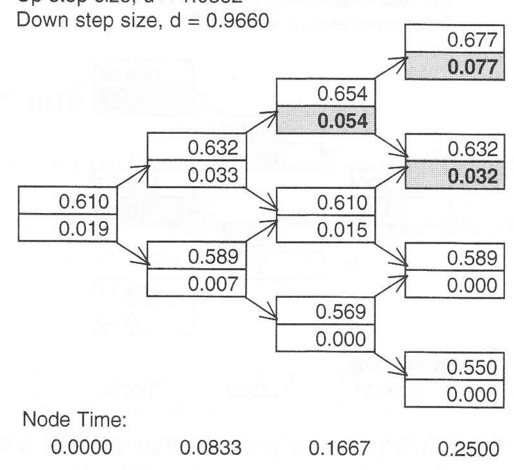
$$p = (0{,}9983 - 0{,}9660)/(1{,}0352 - 0{,}9660) = 0{,}4673$$

On obtient une valeur d'option de 0,019.

Les options sur contrats futures

Cela ne coûte rien de prendre une position longue ou courte sur un contrat futures. Il s'ensuit que, dans l'univers risque-neutre, le taux de croissance espéré de la valeur d'un tel contrat est nul (ce point sera discuté à nouveau à la section 14.7). Comme précédemment, nous pouvons noter p la probabilité d'un mouvement up du prix futures, u le pourcentage d'augmentation dans le cas d'un tel mouvement et d le pourcentage de baisse en cas d'un mouvement down. Si F_0 désigne le prix futures initial, le prix futur espéré à une date quelconque sera toujours F_0. On en déduit :

$$pu + (1 - p)d = 1$$



Graphique 11.12 : Arbre à 3 périodes pour évaluer un call américain à 3 mois sur une devise valant 0,6100 USD, avec un prix d'exercice de 0,6000, un taux sans risque domestique de 5 %, une volatilité de 20 % et un taux sans risque étranger de 7 %.

ou encore :

$$p = \frac{1-d}{u-d}$$

On peut à nouveau utiliser les équations (11.13) à (11.16) pour évaluer une option sur un tel contrat.

Exemple 11.3

Un prix futures est aujourd'hui à 31 et a une volatilité de 30 %. Le taux sans risque est de 5 %. Le graphique 11.13 montre le résultat donné par DerivaGem pour évaluer un put américain à 9 mois sur ce contrat avec un arbre à 3 périodes et un prix d'exercice de 30.

Dans ce cas on a :

$$\Delta t = 0{,}25 \text{ ; } u = e^{0{,}3\sqrt{0{,}25}} = 1{,}1618$$

$$d = 1/u = 0{,}8607 \text{ ; } a = 1$$

$$p = (1 - 0{,}8607)/(1{,}1618 - 0{,}8607) = 0{,}4626$$

On obtient une valeur d'option de 2,84.

At each node:
Upper value = Underlying Asset Price
Lower value = Option Price
Shading indicates where option is exercised

Strike price = 30
Discount factor per step = 0.9876
Time step, dt = 0.2500 years, 91.25 days
Growth factor per step, a = 1.000
Probability of up move, p = 0.4626
Up step size, u = 1.1618
Down step size, d = 0.8607

48.62
0.00

41.85
0.00

36.02
0.93

36.02
0.00

31.00
2.84

31.00
1.76

26.68
4.54

26.68
3.32

22.97
7.03

19.77
10.23

Node Time:
0.0000 0.2500 0.5000 0.7500

Graphique 11.13 : Arbre à 3 périodes pour évaluer un put américain à 9 mois sur un contrat futures dont le prix est 31, avec un prix d'exercice de 30, un taux sans risque de 5 % et une volatilité de 20 %.

Résumé

Ce chapitre a présenté un premier aperçu de l'évaluation des options sur actions. Si, durant la vie d'une option, les variations du cours d'une action sont gouvernées par un processus binomial, il est possible de constituer un portefeuille sans risque qui comporte une position en options et en actions. En l'absence d'opportunités d'arbitrage, les portefeuilles sans risque doivent rapporter le taux d'intérêt sans risque. Cela permet d'évaluer l'option en termes de prix de l'action sous-jacente. Il est important de noter qu'aucune hypothèse, sur la probabilité de hausse du cours de l'action à chaque nœud de l'arbre, n'est nécessaire à l'évaluation car cette probabilité est déjà intégrée dans le cours initial du sous-jacent.

Lorsque les variations de cours de l'action sont décrites par un arbre binomial à plusieurs périodes, chacune peut être traitée séparément, en commençant par les valeurs à l'échéance de l'option et en remontant jusqu'à la date initiale, de façon à calculer la valeur de l'option à cette date. À nouveau, seule la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage est nécessaire ; aucune hypothèse n'est imposée aux probabilités de hausse et de baisse du cours de l'action à chaque nœud.

Il existe une autre approche appelée « évaluation risque-neutre ». Cette démarche montre qu'une option peut-être évaluée en faisant comme si les agents étaient neutres face au risque. Ce chapitre a montré, à travers des exemples algébriques et numériques, que la méthode fondée sur l'absence d'arbitrage et la technique d'évaluation risque-neutre sont équivalentes et conduisent à la même évaluation de l'option.

Le delta d'une option sur action, noté Δ, exprime l'effet sur la valeur de l'option d'une légère variation du cours de l'action. C'est le ratio de la variation de valeur de l'option sur la variation de cours de l'action. Pour construire un portefeuille sans risque, un investisseur doit acheter Δ actions pour chaque option vendue. L'examen d'un arbre binomial standard révèle que le delta varie pendant la vie de l'option. Cela implique que, pour couvrir une position particulière en options, il faut ajuster régulièrement la quantité d'actions sous-jacentes détenue.

L'utilisation des arbres binomiaux pour d'autres types d'options repose sur les mêmes principes que ceux appliqués pour évaluer les options sur actions. Au chapitre 17, nous compléterons l'étude relative à leur construction et à leur utilisation pratique.

Références complémentaires

COVAL J. E. et J. SHUMWAY, « Expected Options Returns », *Journal of Finance*, 56, 3 (2001), 983-1009.

COX J., S. ROSS et M. RUBINSTEIN, « Option Pricing : A Simplified Approach », *Journal of Financial Economics*, 7 (octobre 1979), 229-64.

RENDLEMAN R. et B. BARTTER, « Two State Option Pricing », *Journal of Finance*, 34 (1979), 1092-1111.

Problèmes et exercices

11.1 Une action est actuellement cotée 40 €. On sait qu'au bout d'un mois, la valeur de l'action sera 42 € ou 38 €. Le taux d'intérêt sans risque est 8 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance 1 mois et de prix d'exercice 39 € ?

11.2 Expliquez les approches fondées sur l'absence d'opportunités d'arbitrage et sur l'évaluation risque-neutre, pour évaluer une option européenne sur un arbre binomial à une seule période.

11.3 Que signifie le delta d'une option ?

11.4 Une action est actuellement cotée 50 €. On sait que dans six mois, elle vaudra 45 € ou 55 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 10 % par an. Quelle est la valeur d'un put européen d'échéance 6 mois et de prix d'exercice 50 € ?

11.5 Une action est actuellement cotée 100 €. À la fin de chacune des deux périodes de six mois, sa valeur augmentera de 10 % ou diminuera de 10 %.

Le taux d'intérêt sans risque est de 8 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance 1 an et de prix d'exercice 100 € ?

11.6 En conservant les données de l'exercice précédent (11.5), évaluez un put européen d'échéance 1 an et de prix d'exercice 100 € ? Vérifiez que les valeurs du put et du call européens valident la parité Call-Put.

11.7 Indiquez les expressions de u et d en fonction de la volatilité.

11.8 Considérons une action dont les variations, au cours de la vie d'une option européenne, sont gouvernées par un arbre binomial à deux périodes. Expliquez pourquoi il n'est pas possible de définir, dès la date initiale, une position en options et en actions qui reste sans risque tout au long de la vie de l'option.

11.9 Une action est actuellement cotée 50 €. On sait que dans deux mois, elle vaudra soit 53 €, soit 48 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 10 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance 2 mois et de prix d'exercice 49 € ? Utilisez le raisonnement d'arbitrage.

11.10 Une action est actuellement cotée 80 €. On sait que dans quatre mois, elle vaudra soit 75 €, soit 85 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 5 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance 4 mois et de prix d'exercice 80 € ? Utilisez le raisonnement d'arbitrage.

11.11 Une action est actuellement cotée 40 €. On sait que dans trois mois, elle sera cotée soit 45 €, soit 35 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 8 % par an. Calculez la valeur d'un put européen d'échéance 3 mois et de prix d'exercice de 40 € ? Vérifiez que les méthodes fondées sur l'absence d'arbitrage et sur l'évaluation risque-neutre aboutissent au même résultat.

11.12 Une action est actuellement cotée 50 €. À la fin de chacune des deux périodes de trois mois, sa valeur augmentera de 6 % ou diminuera de 5 %. Le taux d'intérêt sans risque est de 5 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance 6 mois et de prix d'exercice 51 € ?

11.13 En conservant les données de l'exercice précédent (11.12), déterminez la valeur d'un put européen à six mois dont le prix d'exercice est 51 € ? Vérifiez que la les valeurs du put et du call européens obéissent à la relation de parité Put-Call. Si l'option de vente était américaine, serait-il optimal d'exercer prématurément l'option à l'un des nœuds de l'arbre ?

11.14 Une action vaut aujourd'hui 25 €. Dans deux mois, elle sera cotée soit 23 €, soit 27 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 10 % par an. Soit S_T, le cours de l'action dans deux mois. Quelle est la valeur d'un produit dérivé qui offrirait un payoff égal à ${S_T}^2$ à cette date ?

11.15 Calculez les valeurs de u, d et p quand on construit un arbre d'évaluation d'une option sur devise. Chaque pas correspond à un mois, le taux sans risque domestique est de 5 %, le taux étranger de 8 % et la volatilité annuelle de 12 %.

Questions complémentaires

11.16 Une action est actuellement cotée 50 €. Dans six mois, elle sera cotée soit 60 €, soit 42 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 12 % par an. Calculez la valeur d'un call européen à 6 mois de prix d'exercice 48 €. Vérifiez que les méthodes fondées sur l'absence d'arbitrage et sur l'évaluation risque-neutre conduisent au même résultat.

11.17 Une action vaut aujourd'hui 40 €. À la fin de chacune des deux périodes de trois mois, sa valeur augmentera de 10 % ou diminuera de 10 %. Le taux d'intérêt sans risque est de 12 % par an.

- **a.** Quelle est la valeur d'un put européen à six mois et de prix d'exercice 42 € ?
- **b.** Quelle est la valeur d'un put américain à six mois et de prix d'exercice 42 € ?

11.18 Par tâtonnement, estimez, dans la question précédente (11.17), le prix d'exercice à partir duquel il est optimal d'exercer immédiatement.

11.19 Une action est actuellement cotée 30 €. À la fin de chaque mois et pour les deux prochains mois, sa valeur augmentera de 8 % ou diminuera de 10 %. Le taux d'intérêt sans risque est de 5 % par an. Utilisez un arbre à deux périodes pour calculer la valeur d'un produit dérivé qui rapporte $\max[(30\ S_T)^2, 0]$, où S_T représente la valeur de l'action dans deux mois. Si ce produit dérivé est de type américain, devra-t-il être exercé prématurément ?

11.20 Soit un call européen de prix d'exercice 40 €, sur une action ne versant pas de dividendes et cotée 40 €. Le taux sans risque est 4 % par an, la volatilité, 30 % par an et la durée de vie de l'option est de six mois.

- **a.** Calculez u, d et p pour un arbre à deux périodes.
- **b.** Évaluez l'option en utilisant l'arbre à deux périodes.
- **c.** Vérifiez que le logiciel DerivaGem fournit le même résultat.
- **d.** Utilisez DerivaGem pour évaluer l'option avec 5, 50, 100 et 500 périodes.

11.21 Refaites l'exercice 11.20 avec un put américain sur un contrat futures. Le prix d'exercice est de 50, le taux sans risque est de 10 %, la maturité est de 6 mois et la volatilité est de 40 % par an.

La note de bas de page 1. indique que le taux d'actualisation à utiliser pour le payoff du call de la section 11.2, dans l'univers réel, est 42,6 %. Montrez que, si l'option est un put et non un call, ce taux est égal à −52,5 %. Comment expliquez-vous la différence entre ces deux taux ?

Chapitre 12

Processus de Wiener et lemme d'Itô

L'évolution aléatoire d'une variable au cours du temps peut être modélisée par un « processus stochastique », c'est-à-dire une suite de variables aléatoires indexées par le temps. Les processus stochastiques peuvent être classés en deux catégories : les processus en temps discret et les processus en temps continu. Dans un processus en temps discret, les changements de valeur de la variable surviennent à des dates déterminées, tandis qu'un processus en temps continu peut varier à n'importe quel instant. À une date donnée, la loi de probabilité de la variable considérée peut être discrète ou continue. Si elle est continue, la variable prend ses valeurs dans un intervalle et l'on dira que l'espace des états du processus est continu, alors que si la loi est discrète, la variable peut prendre un nombre fini ou dénombrable de valeurs et l'on parlera d'espace d'états discret.

Ce chapitre présente un processus stochastique d'évolution du cours des actions en temps continu et à espace d'états continu. Comprendre les propriétés de ce processus est la première étape d'une bonne appréhension de l'évaluation des options et des autres produits dérivés complexes. Notez qu'en pratique les cours ne suivent pas, *stricto sensu*, un processus en temps continu et à espace d'états continu. En effet, par nature, ces cours sont des variables discrètes (du fait de l'existence de variations minimales, un cent par exemple) et les variations ne peuvent être observées que lorsque le marché est ouvert, le temps n'est donc pas non plus véritablement continu. Toutefois, un processus de ce type se révèle une approximation pratique dans bien des cas.

Beaucoup pensent que les processus stochastiques en temps continu sont si compliqués que leur usage devrait être réservé aux ingénieurs et autres spécialistes. Ce n'est pas le cas. L'obstacle principal, pour comprendre ces processus, est la notation utilisée. Ici, nous présentons une approche pas à pas visant à amener le lecteur à franchir cet obstacle. Nous expliquons également un résultat important, le lemme d'Itô, essentiel à la pleine compréhension de la théorie sous-jacente à l'évaluation des produits dérivés.

12.1 La propriété de Markov

Un processus de Markov est un cas particulier de processus stochastique pour lequel seule la valeur présente d'une variable est utile pour anticiper sa distribution future. L'historique et la façon dont le présent a émergé d'une trajectoire passée ne sont pas pertinents. Les cours des actions sont généralement censés suivre des processus de Markov : les prédictions sur la valeur future d'une action n'ont aucun rapport avec son prix de la semaine précédente ou de l'année précédente. La seule information pertinente est que le prix actuel soit, par exemple, de 100 €[1]. Les cours futurs sont incertains et ne doivent être exprimés qu'en termes de distributions de probabilité. La propriété de Markov stipule que la distribution de probabilité du cours du titre à une date future ne dépend pas de la trajectoire spécifique suivie par le prix dans le passé.

Cette propriété est cohérente avec la forme faible de l'efficience des marchés. Celle-ci établit que le cours actuel des actions intègre toutes les informations contenues dans l'historique des cours. Si la forme faible de l'efficience des marchés n'était pas vérifiée, les analystes techniques pourraient obtenir de meilleures rentabilités que la moyenne du marché en interprétant les graphes d'historiques de cours. Les études empiriques montrant qu'ils en sont capables sont très rares.

C'est la compétition sur le marché qui tend à assurer la forme faible de l'efficience. De très nombreux investisseurs observent attentivement le marché et essayent d'en tirer profit à chaque instant. Cela conduit à une situation où le cours d'une action, à chaque instant, reflète les informations des cours passés. Supposons qu'on ait découvert qu'une forme particulière de graphe de cours donne 65 % de chances d'assister à une hausse conséquente. Les investisseurs essaieraient alors d'acheter l'action dès l'apparition de cette configuration, et la demande pour ce titre augmenterait immédiatement. Le cours s'élèverait donc aussitôt et l'effet observé disparaîtrait, tout comme l'opportunité de gain.

12.2 Les processus stochastiques en temps continu

Considérons une variable suivant un processus de Markov ; supposons que sa valeur présente soit de 10 et que la variation de celle-ci sur une année suive $\phi(0, 1)$, où $\phi(\mu, \sigma)$ est une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variation de valeur de cette variable sur deux ans ?

La variation sur deux ans est la somme de deux lois normales, chacune d'elles ayant une moyenne nulle et un écart-type égal à 1,0. Puisque le processus est markovien, les deux variations successives sont indépendantes. Or, l'addition de deux variables normales indépendantes suit encore une loi normale dont la moyenne est la somme

1. Les propriétés statistiques de l'historique du cours de l'action IBM, par exemple, pourraient être utilisées pour déterminer les caractéristiques du processus stochastique suivi par le cours de l'action (sa volatilité notamment). Ce que nous disons ici, c'est que la trajectoire passée du cours n'est pas pertinente.

des moyennes et la variance est la somme des variances[2]. La moyenne de la variation sur deux ans est donc nulle, et la variance est égale à 2,0. La variation de la variable sur deux ans suit, par conséquent, $\phi(0,\sqrt{2})$.

Considérons maintenant la variation de cette variable sur six mois. La variance sur un an est égale à la variance durant les six premiers mois, plus la variance sur les six mois suivants. Si nous supposons qu'elles suivent la même loi, la variance sur six mois doit être égale à 0,5. L'écart-type correspondant est alors égal à $\sqrt{0{,}5}$. La distribution de probabilité de la variation de valeur de la variable sur six mois suit donc $\phi(0,\sqrt{0{,}5})$.

De manière plus générale, la variation durant n'importe quelle durée de longueur T suit $\phi(0,\sqrt{T})$. En particulier, sur une très courte durée de longueur Δt, la loi est $\phi(0,\sqrt{\Delta t})$.

La présence de la racine carrée dans ces résultats peut surprendre. Elle résulte des propriétés des processus de Markov, pour lesquels les variances des accroissements dans des périodes de temps successives s'ajoutent. Par contre, les écarts-types des variations sur ces mêmes périodes ne sont pas, eux, additifs. La variance de la variation de la variable de notre exemple est de 1,0 par an, elle est donc de 2,0 pour deux ans, et de 3,0 pour trois ans. Les écarts-types pour deux et trois ans sont, respectivement, égaux à $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Ces résultats expliquent pourquoi on dit souvent que l'incertitude est proportionnelle à la racine carrée du temps.

Les processus de Wiener

Le processus en temps continu suivi par la variable que nous venons d'évoquer est connu sous le nom de « processus de Wiener standard ». C'est un type particulier de processus de Markov avec des accroissements espérés nuls et une variance de ces accroissements égale à 1,0 par an. Ce processus est utilisé en physique pour décrire le mouvement d'une particule sujette à un grand nombre de chocs moléculaires. Il est parfois appelé mouvement brownien.

Exprimée de façon formelle, une variable z suit un processus de Wiener si elle possède les deux propriétés suivantes :

Propriété 1. La variation Δz durant un court intervalle de temps de longueur Δt s'écrit :

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{12.1}$$

où ε suit une loi normale, $\phi(0,\, 1)$.

Propriété 2. Les valeurs de Δz pour deux courts intervalles de longueur Δt, ne se chevauchant pas, sont indépendantes.

2. La variance d'une distribution de probabilité est le carré de l'écart-type. La variance d'une variation de la valeur de la variable considérée en une année est donc de 1,0.

Il découle de la première propriété que Δz suit une distribution normale de moyenne nulle, d'écart-type $\sqrt{\Delta t}$ et de variance Δt. La seconde propriété implique que z suit un processus de Markov.

Considérons l'accroissement de z sur une période T relativement longue. On peut l'écrire $z(T) - z(0)$. Il peut être décomposé en la somme des accroissements de z dans N petits intervalles de longueur Δt où

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

Ainsi,

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \qquad (12.2)$$

où les ε_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) suivent des lois $\phi(0, 1)$. Selon la seconde propriété des processus de Wiener, les ε_i sont des variables aléatoires indépendantes. On peut donc déduire de l'équation (12.2) que $z(T) - z(0)$ suit une loi normale de moyenne nulle, de variance $N.\Delta t = T$ et d'écart-type $\sqrt{T}$. Ce résultat est bien cohérent avec ce qui a été exposé plus haut dans cette section.

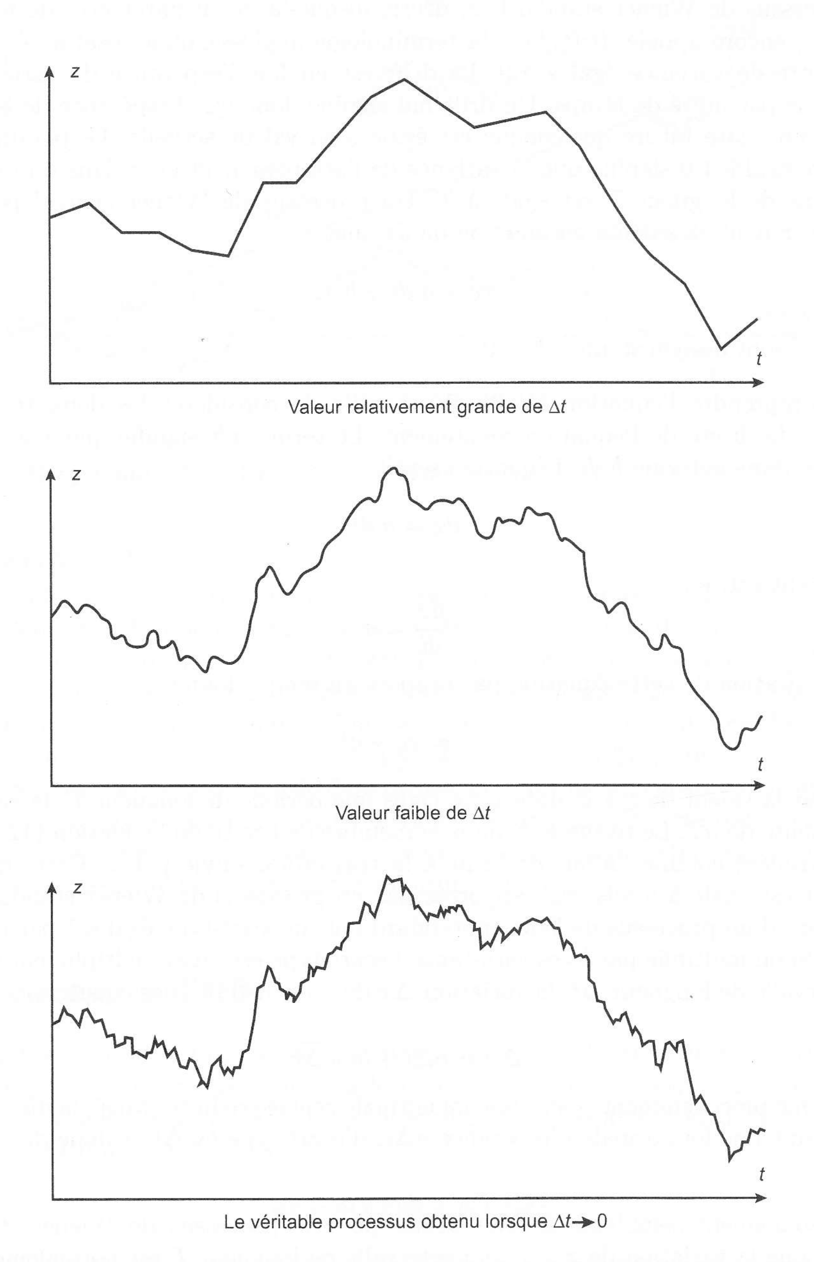
Exemple 12.1

Supposons que la valeur, z, d'une variable qui suit un processus de Wiener soit initialement égale à 25 et que le temps soit mesuré en années. Au bout d'un an, la valeur de la variable est distribuée selon une loi normale de moyenne 25 et d'écart-type 1,0. À l'horizon de cinq ans, elle est distribuée selon une loi normale de moyenne 25 et d'écart-type $\sqrt{5}$, soit 2,236. L'incertitude quant à la valeur de la variable à une certaine date dans le futur, mesurée par son écart-type, augmente comme la racine carrée de l'horizon temporel considéré.

Dans le calcul différentiel usuel, il est habituel de procéder par passage à la limite en faisant tendre l'amplitude des variations vers zéro. Ainsi, $\Delta y/\Delta x$ devient dy/dx, et ainsi de suite. Nous pouvons procéder de façon analogue lorsque nous traitons de processus stochastiques. Le processus de Wiener est la limite, quand $\Delta t \to 0$, du processus décrit précédemment pour z.

Le graphique 12.1 illustre l'évolution de la trajectoire suivie par z lorsque $\Delta t \to 0$. Il faut noter que cette trajectoire devient de plus en plus agitée et en dents de scie. Dans un intervalle de longueur Δt, l'amplitude des variations de z est proportionnelle à $\sqrt{\Delta t}$, et lorsque Δt tend vers zéro, $\sqrt{\Delta t}$ devient infiniment grand par rapport à Δt. Ceci conduit à deux propriétés surprenantes des processus de Wiener.

1. L'espérance mathématique de la longueur du trajet suivi par z dans tout intervalle de temps est infinie.
2. Quel que soit le nombre x considéré, l'espérance mathématique du nombre de fois où z est égal à x, dans n'importe quel intervalle de temps, est infinie. En d'autres termes, le processus passe en moyenne une infinité de fois par le niveau x.



Graphique 12.1 : Les différentes formes de processus de Wiener quand $\Delta t \to 0$ dans l'équation (12.1).

Le processus de Wiener général

Le processus de Wiener standard, z, décrit jusque-là, a un paramètre de tendance centrale, encore appelé *drift* dans la terminologie anglo-saxonne, égal à zéro, et un paramètre de variance égal à 1,0. Le drift est en fait l'espérance de variation du processus par unité de temps. Un drift nul signifie donc que l'espérance de la valeur de z à une date future quelconque est égale à sa valeur actuelle. Le paramètre de variance égal à 1,0 signifie que la variance de l'accroissement de z dans un intervalle de temps de longueur T est égale à T. Un processus de Wiener général pour une variable x peut être défini en fonction de dz ainsi :

$$dx = a.dt + b.dz \tag{12.3}$$

où a et b sont des constantes, $b > 0$.

Pour comprendre l'équation (12.3), il est utile de considérer les deux termes du membre de droite de l'équation séparément. Le terme adt signifie que x a un drift égal à a. Sans le terme $b.dz$, l'équation serait :

$$dx = a.dt$$

qu'on peut écrire :

$$\frac{dx}{dt} = a$$

Et l'intégration de cette équation par rapport au temps donne :

$$x = x_0 + at$$

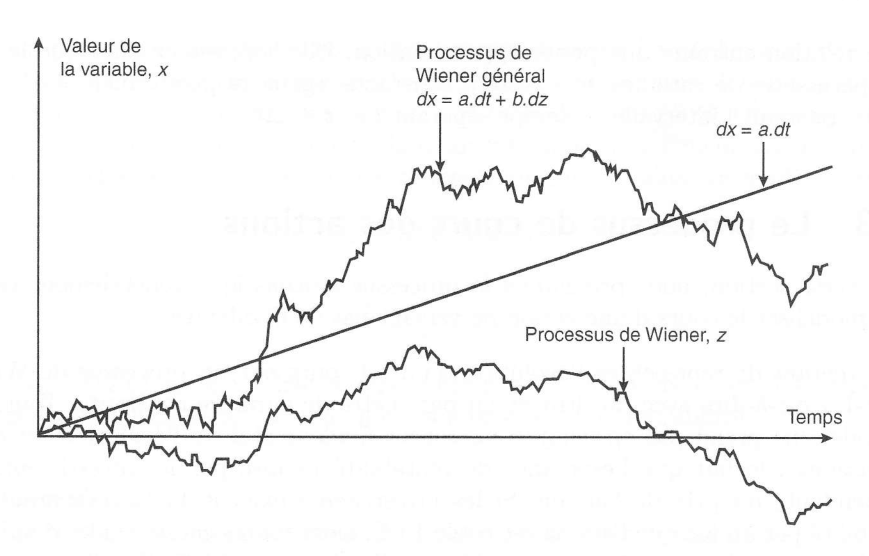
où x_0 est la valeur de x à la date zéro. Dans une période de longueur T, la valeur de x augmente de aT. Le terme $b.dz$ dans le membre de droite de l'équation (12.3) peut être considéré comme l'ajout de bruit à la trajectoire suivie par x. Cette quantité de bruit est égale à b fois celle apportée par un processus de Wiener standard. Les variations d'un processus de Wiener standard ont un écart-type égal à 1 par unité de temps. Si on multiplie par b ces variations, l'écart-type est aussi multiplié par b. Dans un intervalle de longueur Δt, la variation Δx de x est déduite des équations (12.1) et (12.3) :

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

où, comme précédemment, ε suit une loi normale centrée réduite. Ainsi, la distribution de Δx suit une loi normale d'espérance $a\Delta t$, d'écart-type $b\sqrt{\Delta t}$ et donc de variance $b^2\Delta t$.

Un raisonnement semblable à celui utilisé pour le processus de Wiener standard montre que la variation de x sur tout intervalle de longueur T est normalement distribuée avec une moyenne aT, un écart-type $b\sqrt{T}$ et une variance b^2T.

Ainsi, le processus de Wiener général défini dans l'équation (12.3) a un drift (c'est-à-dire une variation moyenne par unité de temps) égal à a et un paramètre de variance (c'est-à-dire une variance par unité de temps) égal à b^2. Ceci est illustré dans le graphique 12.2.



Graphique 12.2 : Processus de Wiener général : $a = 0{,}3$, $b = 1{,}5$.

- **Exemple 12.2**

  Considérons une entreprise dont la trésorerie, mesurée en milliers d'euros, suit un processus de Wiener général avec un drift de 20 (l'unité de temps est l'année) et un paramètre de variance de 900. Initialement, la trésorerie est égale à 50. À l'horizon d'une année, la trésorerie suit une loi normale de moyenne 70 et d'écart-type $\sqrt{900}$, soit 30. À l'horizon de six mois, elle suit une distribution normale de moyenne 60 et d'écart-type $30\sqrt{0{,}5}$, soit 21,21. L'incertitude quant à la trésorerie à n'importe quelle date future, mesurée par son écart-type, augmente comme la racine carrée du temps restant à courir jusqu'à cette date. Notez que la trésorerie peut devenir négative (nous pourrions interpréter cela comme une situation dans laquelle l'entreprise emprunte des fonds).

Les processus d'Itô

Les paramètres a et b du processus de Wiener général sont constants. Un processus stochastique encore plus général, appelé processus d'Itô, peut être défini si l'on autorise les paramètres a et b à être des fonctions de la variable x et du temps t. Un processus d'Itô peut alors s'écrire :

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{12.4}$$

À la fois le drift et le paramètre de variance d'un processus d'Itô sont susceptibles de varier au fil du temps. Dans l'intervalle de temps compris entre t et $t + \Delta t$, la valeur du processus x devient $x + \Delta x$, avec :

$$\Delta x = a\,(x,t)\,\Delta t + b\,(x,t)\,\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Cette relation entraîne une petite approximation. Elle suppose en effet que le drift et le paramètre de variance de x restent constants, égaux respectivement à $a(x,t)$ et $b(x,t)^2$, pendant l'intervalle de temps séparant t et $t + \Delta t$.

12.3 Le processus de cours des actions

Dans cette section, nous présentons le processus stochastique généralement retenu pour modéliser le cours d'une action ne versant pas de dividendes.

Il est tentant de représenter l'évolution d'un tel cours par un processus de Wiener général, c'est-à-dire avec un drift et un paramètre de variance constants. Toutefois, ce modèle ne prend pas en compte un aspect fondamental de l'évolution du cours des actions : le fait que l'espérance de rentabilité requise par les investisseurs est indépendante du prix de l'action. Si les investisseurs exigent 14 % d'espérance de rentabilité par an lorsque l'action est cotée 10 €, alors toutes choses égales d'ailleurs, ils exigeront également 14 % par an lorsque l'action cote 50 €. Il suffit pour s'en convaincre d'imaginer une entreprise réalisant une opération sur titres consistant à échanger cinq actions anciennes contre une nouvelle. Le prix de l'action sera multiplié par 5 sans que l'exigence de rentabilité soit modifiée.

En clair, l'hypothèse d'un drift constant pour le cours de l'action ne convient pas et doit être remplacée par l'hypothèse d'un drift constant pour le processus de rentabilité. Si S est la valeur de l'action à la date t, le drift de S sera supposé égal à μS. Dans un court intervalle de temps de longueur Δt, l'espérance de l'augmentation de S est égale à $\mu S \Delta t$. Le paramètre μ représente alors le taux de rentabilité espéré de l'action.

Si la volatilité du cours de l'action est toujours égale à zéro, ce modèle implique que :

$$\Delta S = \mu S \Delta t$$

et, à la limite, lorsque $\Delta t \to 0$:

$$dS = \mu S dt$$

soit :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

En intégrant cette équation entre $t = 0$ et $t = T$, nous obtenons :

$$S_T = S_0 e^{\mu T} \tag{12.5}$$

avec S_0 et S_T qui sont respectivement les cours de l'action aux dates 0 et T. L'équation (12.5) montre que, lorsque le paramètre de variance est nul, le cours de l'action croît à un taux composé continu μ par unité de temps.

En pratique, un cours d'action présente, évidemment, une volatilité non nulle. On peut alors raisonnablement supposer que les variations de cours, exprimées en pourcentage,

dans un petit intervalle de longueur Δt, suivent la même loi quel que soit le cours de l'action. Autrement dit, l'incertitude sur le taux de rentabilité à laquelle fait face un investisseur est la même, que l'action soit cotée 10 € ou 50 €. Cela suggère que l'écart-type de la variation de cours dans un intervalle de longueur Δt devrait être proportionnel au cours de l'action. Cette remarque conduit alors au modèle suivant :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

ou encore :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \tag{12.6}$$

L'équation (12.6) est le modèle le plus courant d'évolution des cours. La variable σ représente la volatilité de l'action ; μ est son espérance de rentabilité.

■ **Exemple 12.3**

Soit une action qui ne verse pas de dividendes, sa volatilité est de 30 % par an et son taux de rentabilité composé en continu a pour espérance 15 % par an. Ainsi, dans ce cas, $\mu = 0{,}15$ et $\sigma = 0{,}30$. Le processus décrivant le cours de l'action est alors :

$$\frac{dS}{S} = 0{,}15dt + 0{,}30dz$$

Si S est le cours de l'action à une date particulière et si ΔS est l'augmentation du cours dans le prochain intervalle de temps, alors :

$$\frac{\Delta S}{S} = 0{,}15\Delta t + 0{,}30\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

où ε suit une loi normale centrée réduite. Considérons un intervalle de temps d'une semaine, soit 0,0192 an, et supposons que le cours initial de l'action soit de 100 €. Ainsi, $\Delta t = 0{,}0192$, $S = 100$ et :

$$\Delta S = 100(0{,}00288 + 0{,}0416\varepsilon)$$

soit :

$$\Delta S = 0{,}288 + 4{,}16\varepsilon$$

révélant ainsi que la hausse du cours est une variable aléatoire normalement distribuée de moyenne 0,288 € et d'écart-type 4,16 €.

Le modèle en temps discret

Le processus de fluctuation des cours d'action développé dans la section précédente est appelé mouvement brownien géométrique. La version en temps discret est :

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{12.7}$$

soit :

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma S\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{12.8}$$

La variable ΔS est la variation du cours de l'action S dans un intervalle de temps de longueur Δt, et ε est une variable normale centrée réduite. Le paramètre μ est la rentabilité espérée de l'action par unité de temps, et le paramètre σ est la volatilité de l'action. Ces deux paramètres sont supposés constants.

Le terme de gauche de l'équation (12.7) exprime la rentabilité produite par l'action pendant un court intervalle de temps de longueur Δt. Le terme $\mu\Delta t$ représente donc l'espérance de rentabilité, alors que le terme $\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ est la composante stochastique de la dite rentabilité. La variance de la composante stochastique (et donc de la rentabilité dans son ensemble) s'écrit $\sigma^2\Delta t$. Ceci est cohérent avec la définition de la volatilité σ donnée à la section 11.7 : σ est tel que $\sigma\sqrt{\Delta t}$ est l'écart-type de la rentabilité dans un court intervalle de temps Δt.

L'équation (12.7) montre que $\Delta S/S$ suit une distribution de loi normale de moyenne $\mu\Delta t$ et d'écart-type $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Autrement dit :

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi\left(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}\right) \tag{12.9}$$

La simulation de Monte Carlo

Une simulation de Monte Carlo d'un processus stochastique est une procédure permettant de créer un échantillon aléatoire du processus. Nous l'utiliserons comme un moyen pour mieux comprendre la nature du processus de cours défini dans l'équation (12.6).

Supposons que l'espérance de rentabilité d'une action soit de 14 % par an et que sa volatilité soit 20 % par an. On a donc $\mu = 0{,}14$ et $\sigma = 0{,}20$. Supposons que $\Delta t = 0{,}01$, c'est-à-dire que les variations du cours de l'action sont mesurées sur des intervalles de temps de longueur 0,01 année (soit 3,65 jours). Grâce à l'équation (12.8), nous obtenons :

$$\Delta S = 0{,}14 \times 0{,}01 \times S + 0{,}2\sqrt{0{,}01} \times S\varepsilon$$

soit :

$$\Delta S = 0{,}0014 \times S + 0{,}02 \times S\varepsilon \tag{12.10}$$

Une trajectoire du cours de l'action peut être simulée en opérant des tirages successifs de ε selon la loi $\phi(0,\ 1)$ et en substituant le résultat de ces tirages dans l'équation (12.10). La fonction ALEA() d'Excel donne un nombre aléatoire compris entre 0 et 1. Pour produire un échantillon aléatoire d'une loi normale centrée-réduite, on utilise alors l'instruction :

=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA(.))

Le tableau 12.1 montre un ensemble particulier de résultats obtenus de cette manière.

Le cours initial est égal à 20 €. Au cours du premier intervalle de temps, la réalisation de ε est égale à 0,52. En utilisant l'équation (12.10), la variation durant cette période est donc :

$$\Delta S = 0{,}0014 \times 20 + 0{,}02 \times 20 \times 0{,}52 = 0{,}236$$

Tableau 12.1 : Simulation d'un cours d'action lorsque $\mu = 0{,}14$ et $\sigma = 0{,}20$ durant des intervalles de temps de 0,01 années.

Cours de l'action au début de l'intervalle de temps	Réalisation de ε	Variation du cours de l'action durant l'intervalle de temps
20,000	0,52	0,236
20,236	1,44	0,611
20,847	–0,86	–0,329
20,518	1,46	0,628
21,146	–0,69	–0,262
20,883	–0,74	–0,280
20,603	0,21	0,115
20,719	–1,10	–0,427
20,292	0,73	0,325
20,617	1,16	0,507
21,124	2,56	1,111

Par conséquent, au début de la seconde période, le cours de l'action est égal à 20,236. La valeur de ε au tirage suivant est 1,44. L'équation (12.10) nous donne la variation de l'action au cours de cette seconde période :

$$\Delta S = 0{,}0014 \times 20{,}236 + 0{,}02 \times 20{,}236 \times 1{,}44 = 0{,}611$$

Ainsi, au début de la période suivante, le cours de l'action est égal à 20,847, et ainsi de suite. Notez que, puisque le processus simulé est un processus de Markov, les tirages successifs de ε sont indépendants[3].

Il est important de réaliser que le tableau ne montre qu'une seule trajectoire du cours de l'action. D'autres échantillons aléatoires auraient conduit à des trajectoires différentes. N'importe quel intervalle de temps de longueur Δt peut être utilisé dans la simulation. À la limite, quand $\Delta t \to 0$, une description exacte du processus stochastique est obtenue. Le cours final de 21,124 de l'action du tableau 12.1 peut être vu comme une réalisation du cours de l'action au bout de 10 intervalles de temps (c'est-à-dire au bout d'un dixième d'année). En simulant de façon répétée les variations de cours, comme dans le tableau 12.1, on obtient une distribution de probabilité complète du cours de l'action à l'horizon considéré. La méthode de simulation de Monte Carlo sera décrite plus en détail au chapitre 17.

3. En pratique il est plus efficace de construire un échantillon de $\ln(S)$ que de S, comme nous le verrons à la section 17.6.

12.4 Les paramètres

Le processus présenté dans ce chapitre pour modéliser le cours des actions est caractérisé par deux paramètres : μ et σ, où μ est le taux de rentabilité espéré annuel. La plupart des investisseurs exigent une espérance de rentabilité élevée pour accepter de prendre des risques importants. Il s'ensuit que μ dépend du risque de l'action[4] et devrait également dépendre du niveau des taux d'intérêt de l'économie. Plus les taux sont élevés, plus les investisseurs exigeront une espérance de rentabilité sur les actions.

Heureusement, nous ne sommes pas concernés par les déterminants de μ dans tous leurs détails, puisque la valeur d'un actif dérivé, dont le sous-jacent est une action, est en général indépendante de μ. Le paramètre σ, volatilité de l'action, est au contraire d'une importance capitale pour déterminer la valeur de la plupart des actifs dérivés. Les différentes méthodes d'estimation de σ sont examinées au chapitre 13. En général, la volatilité d'une action est comprise entre 0,20 et 0,60 (soit de 20 % à 60 %).

L'écart-type de la variation de cours (exprimée en pourcentage) dans un intervalle de temps de longueur Δt est égal à $\sigma\sqrt{\Delta t}$. De manière approximative, l'écart-type de cette variation dans un intervalle de temps relativement long, de durée T, est égal à $\sigma\sqrt{T}$. La volatilité peut être interprétée comme l'écart-type de la variation du cours de l'action sur une année. Au chapitre 13, nous verrons que la volatilité d'une action est exactement égale à l'écart-type du taux de rentabilité composé continu de l'action en une année.

12.5 Le lemme d'Itô

La valeur d'une option sur action est une fonction du cours de l'action sous-jacente et du temps. De façon plus générale, la valeur d'un produit dérivé est une fonction des variables aléatoires sous-jacentes au produit dérivé, et du temps. Une analyse sérieuse des actifs dérivés nécessite une bonne compréhension du comportement des fonctions de variables aléatoires. Un résultat important dans ce domaine a été établi par le mathématicien Kiyosi Itô en 1951[5]. Ce résultat est connu sous le nom de « lemme d'Itô ».

Supposons que la valeur d'une variable x suive un processus d'Itô :

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{12.11}$$

où z est un processus de Wiener standard, et a et b sont des fonctions de x et t. La variable x a un drift égal à a et un paramètre de variance égal à b^2. Le lemme d'Itô

---

4. Plus précisément, μ dépend du risque non diversifiable (l'investisseur pouvant éliminer la partie du risque diversifiable, cette dernière n'exige aucune rémunération particulière).

5. Voir K. Itô, « On Stochastic Differential Equations », *Memoirs*, American Mathematical Society, 4 (1951), 1-51.

montre qu'une fonction G de x et t est caractérisée par le processus suivant :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b\,dz \tag{12.12}$$

où z est le même processus de Wiener que celui qui apparaît dans l'équation (12.11). Ainsi, G suit également un processus d'Itô avec un drift égal à :

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$$

et un paramètre de variance égal à :

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$$

Une démonstration rigoureuse et complète du lemme d'Itô dépasse le cadre de cet ouvrage. Toutefois, dans l'annexe de ce chapitre, nous montrons que ce lemme peut être vu comme une extension de résultats bien connus de calcul différentiel. Précédemment, nous avons expliqué que :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{12.13}$$

avec μ et σ constants, est un modèle raisonnable d'évolution du cours des actions. En partant du lemme d'Itô, on déduit que le processus suivi par une fonction G de S et t est défini par :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}\sigma S\,dz \tag{12.14}$$

Notez que S et G sont affectés par la même source d'incertitude sous-jacente, z. Cette remarque est fondamentale pour établir les résultats de Black-Scholes.

Application aux contrats forward

Pour illustrer le lemme d'Itô, considérons un contrat forward portant sur une action ne versant pas de dividendes. Supposons que le taux d'intérêt sans risque soit constant et égal à r quelle que soit l'échéance du contrat. À partir de l'équation (5.1), on a :

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

où F_0 représente le prix forward à la date $t = 0$, S_0 est le cours au comptant à la même date, et T est le temps restant à courir jusqu'à l'échéance du contrat forward.

Nous nous intéressons à l'évolution de la valeur du forward au cours du temps. Notons F et S les valeurs respectives du forward et de l'action à une date quelconque t, avec $t < T$. La relation entre F et S est la suivante :

$$F = S e^{r(T-t)} \tag{12.15}$$

En supposant que le processus suivi par S est celui donné par l'équation (12.13), on peut utiliser le lemme d'Itô pour déterminer le processus suivi par F.
L'équation (12.15) permet d'écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -rSe^{r(T-t)}$$

De même, l'équation (12.14) implique que le processus suivi par F est :

$$dF = \left[e^{r(T-t)}\mu S - rSe^{r(T-t)}\right] dt + e^{r(T-t)}\sigma S dz$$

En substituant $F = Se^{r(T-t)}$, on obtient :

$$dF = (\mu - r)\, F dt + \sigma F dz \tag{12.16}$$

Comme le cours de l'action S, le prix forward suit un mouvement brownien géométrique. Son espérance de taux de croissance est égale à $\mu - r$ plutôt qu'à μ. Le taux de croissance de F représente la partie de la rentabilité de S en excès du taux sans risque.

12.6 La propriété de log-normalité

Nous allons à présent utiliser le lemme d'Itô pour en déduire le processus suivi par $\ln S$ lorsque S suit le processus de l'équation (12.13). Notons

$$G = \ln S$$

Puisque :

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0,$$

il découle de l'équation (12.14) que le processus suivi par G s'écrit :

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz \tag{12.17}$$

Sachant que μ et σ sont des constantes, cette équation montre que $G = \ln S$ suit un processus de Wiener général. Ce processus a un drift constant, égal à $\mu - \sigma^2/2$, et un paramètre de variance constant, égal à σ^2. La variation de $\ln S$, entre la date zéro et n'importe quelle date future T, suit une loi normale de moyenne

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$$

et de variance $\sigma^2 T$.

Cela signifie que :

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma\sqrt{T}\right] \tag{12.18}$$

ou encore :

$$\ln(S_T) \sim \phi\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right] \tag{12.19}$$

S_T est le cours de l'action à la date future T, S_0 est la valeur présente de l'action (en $t = 0$) et $\phi(m,s)$ désigne une loi normale de moyenne m et d'écart-type s.

L'équation (12.19) montre que $\ln(S_T)$ est distribué selon une loi normale. Une variable suit une distribution log-normale si son logarithme népérien suit une distribution normale. Le modèle de fluctuation de cours développé dans ce chapitre implique donc que le cours d'une action à la date T, conditionné par son cours actuel, suit une distribution log-normale. L'écart-type du logarithme du cours de l'action est $\sigma\sqrt{T}$. Il est proportionnel à la racine carrée de l'horizon considéré.

Résumé

Les processus stochastiques permettent de décrire l'évolution aléatoire d'une variable au fil du temps. Un processus de Markov est un processus pour lequel seule la valeur présente est utile pour prévoir la distribution future. L'historique de la variable et la façon dont la valeur présente a été obtenue sont sans importance.

Un processus de Wiener standard, z, est un processus décrivant l'évolution d'une variable dont les variations sont normalement distribuées. Le drift, ou *paramètre de tendance centrale*, de ce processus est nul et son paramètre de variance est égal à 1,0 par unité de temps. Cela signifie que, si la valeur de la variable est x_0 à la date zéro, alors à la date T, elle suit une loi normale de moyenne x_0 et d'écart-type $\sqrt{T}$.

Un processus de Wiener général décrit l'évolution d'une variable normale avec un drift égal à a et un paramètre de variance égal à b^2, avec a et b constants. Si, comme auparavant, la variable est égale à x_0 à la date 0, alors elle suit une loi normale de moyenne $x_0 + aT$ et d'écart-type $b\sqrt{T}$ à la date T.

Un processus d'Itô est un processus x dont le drift et le paramètre de variance peuvent être une fonction à la fois du temps et de x lui-même. La variation de x dans un très petit intervalle de temps peut être supposée normale, avec une bonne approximation, mais sa variation sur une plus longue période est susceptible de ne pas l'être.

La simulation de l'évolution d'une variable peut être une bonne méthode pour comprendre intuitivement son comportement. Cette méthode suppose de diviser la période d'étude en de nombreux intervalles de très courte durée et d'effectuer, pour chacun d'eux, un tirage aléatoire parmi les trajectoires possibles de la variable. La distribution de probabilité de la variable à une date future peut alors être calculée. L'étude de la simulation de Monte Carlo sera approfondie au chapitre 17.

Le lemme d'Itô est une façon de déterminer le processus stochastique suivi par une fonction de la variable étudiée. Comme nous le verrons au chapitre 13, le lemme d'Itô est fondamental pour l'évaluation des actifs dérivés. L'un des points clés est que le processus de Wiener, z, qui régit le processus stochastique de la variable considérée est

le même que celui qui gouverne l'évolution de la fonction dépendant de cette variable. En d'autres termes, variable et fonction de cette variable sont toutes deux sujettes à la même source d'incertitude.

Une hypothèse couramment posée stipule que le cours des actions évolue selon un mouvement brownien géométrique. Dans ces conditions, la rentabilité obtenue par le détenteur de l'action, dans un court intervalle de temps, est distribuée selon une loi normale, et les rentabilités de deux périodes ne se chevauchant pas sont indépendantes. La valeur de l'action à une date future suit une distribution log-normale. Le modèle de Black et Scholes que nous développons dans le prochain chapitre est fondé sur cette hypothèse de mouvement brownien géométrique.

Références complémentaires

Concernant l'efficience des marchés et la propriété de Markov sur le cours des actions

BREALEY R. A., *An Introduction to Risk and Return from Common Stock*, 2[e] éd., MIT Press, Cambridge, MA, 1983.

COOTNER P. H. (ed.), *The Random Character of Stock Market Prices*, MIT Press, Cambridge, MA, 1964.

Concernant les processus stochastiques

COX D. R. et H. D. MILLER, *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman & Hall, London, 1965.

FELLER W., *Probability Theory and Its Applications*, vol. 1 et 2, Wiley, New York, 1950.

KARLIN S. et H. M. TAYLOR, *A First Course in Stochastic Processes*, 2[e] éd., Academic Press, New York, 1975.

NEFTCI S., *Introduction to Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press, New York, 1996.

Problèmes et exercices

12.1 Que signifie l'expression « la température d'un lieu précis suit un processus de Markov » ? Pensez-vous que la température suive effectivement un processus de Markov ?

12.2 Une règle de trading fondée sur l'historique des cours d'une action peut-elle régulièrement produire une rentabilité supérieure à la moyenne ? Commentez.

12.3 La trésorerie d'une société (en millions d'euros) suit un processus de Wiener général avec un drift de 0,5 par trimestre et un paramètre de variance de

4,0 par trimestre. Quelle devra être la trésorerie initiale de la société pour qu'elle ait une probabilité inférieure à 5 % de devenir négative dans un an ?

12.4 Les variables X_1 et X_2 suivent un processus de Wiener général avec des drifts respectifs de μ_1 et μ_2 et des paramètres de variance de σ_1^2 et σ_2^2. Quel processus la somme $(X_1 + X_2)$ suit-elle si :

a. Les variations de X_1 et X_2 pour tout intervalle de temps ne sont pas corrélées ?

b. Il y a une corrélation ρ, par unité de temps, entre les variations de X_1 et X_2 ?

12.5 Soit une variable X qui suit le processus :

$$dX = \mu dt + \sigma dz$$

Au cours des trois premières années, $\mu = 2$ et $\sigma = 3$; au cours des trois années suivantes $\mu = 3$ et $\sigma = 4$. Si la valeur initiale de la variable est égale à 5, quelle est la distribution de probabilité de cette variable au bout de la sixième année ?

12.6 Soit G une fonction du cours d'une action, S, et du temps ; notons σ_S et σ_G les volatilités de S et G. Montrez que lorsque l'espérance de rentabilité de S augmente de $\lambda\sigma_S$, le taux de croissance de G augmente de $\lambda\sigma_G$, où λ est une constante.

12.7 Les prix de deux actions A et B suivent un mouvement brownien géométrique. Les variations de A et de B, pour tout intervalle de temps, ne sont pas corrélées. Est-ce que la valeur d'un portefeuille constitué d'une action A et d'une action B suit également un mouvement brownien géométrique ? Justifiez votre réponse.

12.8 Le processus suivi par le cours d'une action dans l'équation (12.8) est :

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

avec μ et σ constants. Expliquez avec soin la différence entre ce modèle et chacun des modèles suivants :

$$\Delta S = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta S = \mu \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

Pourquoi le modèle de l'équation (12.8) est-il le modèle de fluctuation de cours le plus approprié par rapport à chacune des trois possibilités ?

12.9 Il a été suggéré que le taux d'intérêt à court terme, r, suivait le processus stochastique suivant :

$$dr = a(b - r)dt + rcdz$$

où a, b et c sont des constantes positives et z est un processus de Wiener. Décrivez la nature de ce processus.

12.10 Supposons que le cours d'une action, S, suive un mouvement brownien géométrique d'espérance de rentabilité μ et de volatilité σ :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Quel est le processus suivi par la variable S^n ? Montrez que S^n suit également un mouvement brownien géométrique.

12.11 Notons x le taux actuariel (composé en continu) d'une obligation zéro-coupon qui paie 1 € à la date T. Admettons que x suive le processus :

$$dx = a(x_0 - x)dt + sxdz$$

où a, x_0 et s sont des constantes positives et z est un processus de Wiener. Quel est le processus suivi par le cours de l'obligation ?

Questions complémentaires

12.12 Supposons qu'une action ait une espérance de rentabilité annuelle de 16 % et une volatilité de 30 % par an. Si, un jour donné, le cours de l'action est de 50 €, calculez :

a. L'espérance du cours de l'action à la fin du jour suivant.

b. L'écart-type du cours de l'action à la fin du jour suivant.

c. L'intervalle de confiance à 95 % du cours de l'action à la fin du jour suivant.

12.13 La trésorerie d'une société (en millions d'euros) suit un processus de Wiener général avec un drift de 0,1 par mois et un paramètre de variance de 0,16 par mois. La trésorerie initiale est de 2,0.

a. Quelles sont les distributions de probabilité de la trésorerie au bout d'un mois, six mois et un an ?

b. Quelles sont les probabilités d'une trésorerie négative au bout de six mois et d'un an ?

c. À quelle date future la probabilité d'avoir une trésorerie négative est-elle la plus forte ?

12.14 Supposons que x soit la rentabilité d'une rente perpétuelle du Trésor dont le taux d'intérêt engendre un revenu de 1 € par an. Admettons que x soit exprimé en taux continu, que l'intérêt soit payé en continu et que x suive le processus suivant :

$$dx = a(x_0 - x)dt + sxdz$$

où a, x_0 et s sont des constantes positives et z est un processus de Wiener. Quel est le processus suivi par le cours de l'obligation ? Quelle est l'espérance de rentabilité instantanée (incluant les intérêts et le capital) pour le détenteur de l'obligation ?

12.15 Si S suit le mouvement brownien géométrique de l'équation (12.6), quel est le processus suivi par :

a. $y = 2S$

b. $y = S^2$

c. $y = e^S$

d. $y = e^{r(T-t)}/S$

Dans chaque cas, exprimez les coefficients de dt et dz par rapport à y plutôt qu'à S.

12.16 Le cours d'une action est actuellement de 50 €. Son espérance de rentabilité est 12 % et sa volatilité 30 %. Quelle est la probabilité que le cours de l'action soit supérieur à 80 € dans deux ans ?

Annexe

Démonstration du lemme d'Itô

Dans cette annexe, nous montrons comment le lemme d'Itô peut être vu comme une extension naturelle d'autres résultats plus simples. Considérons une fonction différentiable G d'une variable x. Si Δx représente une très petite variation de x et ΔG la variation de G qui en résulte, un résultat bien connu de calcul différentiel s'écrit :

$$\Delta G \approx \frac{dG}{dx}\Delta x \tag{12A.1}$$

Autrement dit, ΔG est à peu près égal au taux de variation de G relativement à x multiplié par Δx. L'ordre de grandeur de l'erreur commise est Δx^2. Pour une approximation plus précise, la formule de Taylor appliquée à G peut être utilisée :

$$\Delta G = \frac{dG}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2G}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3G}{dx^3}\Delta x^3 + \ldots$$

Pour une fonction différentiable G dépendant de deux variables x et y, le résultat analogue à celui de l'équation (12A.1) est :

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y \tag{12A.2}$$

et l'application de la formule de Taylor à G donne :

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\Delta y^2 + \ldots \tag{12A.3}$$

Quand Δx et Δy tendent vers 0, l'équation (12A.3) devient :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy \tag{12A.4}$$

Nous allons maintenant étendre l'équation (12A.4) aux fonctions de variables qui suivent un processus d'Itô. Supposons qu'une variable x dans l'équation (12A.4) suive un processus d'Itô :

$$dx = a\,(x,t)\,dt + b\,(x,t)\,dz \tag{12A.5}$$

et que G soit une fonction de x et du temps t. Par analogie avec l'équation (12A.3), nous pouvons écrire :

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 + \ldots \tag{12A.6}$$

L'équation (12A.5) peut être réécrite en temps discret sous la forme :

$$\Delta x = a\,(x,t)\,\Delta t + b\,(x,t)\,\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

ou, plus simplement, si on ne rappelle pas les arguments des fonctions a et b :

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{12A.7}$$

Cette équation révèle une importante différence entre la situation de l'équation (12A.6) et celle de l'équation (12A.3). Quand un passage à la limite était utilisé pour passer de l'équation (12A.3) à l'équation (12A.4), les termes en Δx^2 étaient négligés puisqu'ils étaient d'ordre deux. Par contre, pour l'équation (12A.7), nous avons :

$$\Delta x^2 = b^2\varepsilon^2\Delta t + \text{ des termes d'ordre supérieur à 1 en } \Delta t \tag{12A.8}$$

Ceci montre que le terme contenant Δx^2 dans l'équation (12A.6) a une composante d'ordre 1 (en Δt) qui ne peut être ignorée.

Comme la variance d'une loi normale standard est égale à 1, on a :

$$E\left(\varepsilon^2\right) - \left[E\left(\varepsilon\right)\right]^2 = 1$$

où E est l'opérateur d'espérance. Puisque $E(\varepsilon) = 0$, c'est donc que $E(\varepsilon^2) = 1$. L'espérance de $\varepsilon^2\Delta t$ est donc égale à Δt. On peut montrer que la variance de $\varepsilon^2\Delta t$ est d'ordre Δt^2 et que, par conséquent, $\varepsilon^2\Delta t$ peut être considéré comme non aléatoire et égal à son espérance Δt lorsque Δt tend vers zéro. Il découle de l'équation (12A.8) que Δx^2 devient non stochastique et égal à $b^2\Delta t$ quand Δt tend vers zéro. En passant à la limite sur Δx et Δt dans l'équation (12A.6) et en utilisant ce dernier résultat, nous obtenons :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2 dt \tag{12A.9}$$

C'est la relation du lemme d'Itô. Si nous substituons à dx sa valeur donnée par l'équation (12A.5), l'équation (12A.9) devient alors :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

qui est le résultat souhaité.

Chapitre 13

Le modèle de Black, Scholes et Merton

Au début des années 1970, Fisher Black, Myron Scholes et Robert Merton ont opéré une avancée majeure en matière d'évaluation d'options[1]. Ces contributions et l'ensemble des développements auxquels elles ont donné lieu sont à l'origine du célèbre modèle de Black et Scholes. Ce dernier a eu un très grand impact sur les méthodes utilisées par les traders, tant en matière d'évaluation d'options que dans la mise au point de techniques de couverture. Ces travaux ont aussi constitué le point de départ du développement spectaculaire de l'ingénierie financière dans les années 1980 et 1990. En 1997, Robert Merton et Myron Scholes ont été récompensés par le prix Nobel d'économie pour l'importance et la qualité de leurs recherches. Fisher Black est malheureusement décédé en 1995, sinon il aurait sans aucun doute figuré parmi les lauréats, au même titre que ses collaborateurs.

Ce chapitre expose les caractéristiques du modèle de Black et Scholes d'évaluation d'options sur actions ne versant pas de dividendes. Nous détaillons les deux approches du calcul de la volatilité : soit à partir de données historiques, soit en la déduisant implicitement de la valeur des options cotées grâce au fameux modèle. Nous montrons comment l'évaluation risque-neutre introduite au chapitre 11 peut être utilisée ici. Nous expliquons aussi comment étendre le modèle de Black et Scholes à l'évaluation d'options européennes sur des actions versant des dividendes. Enfin, nous présentons quelques résultats sur l'évaluation d'options américaines sur des actions payant des dividendes.

1. Voir F. Black et M. Scholes, « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, 81 (mai/juin 1973), 637-659 ; R. C. Merton, « Theory of Rational Option Pricing », *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (printemps 1973), 141-83.

13.1 Propriétés de la loi log-normale appliquée au cours des actions

Le modèle de comportement des cours d'actions utilisé par Black, Scholes et Merton a été développé au chapitre 12. Il suppose que, dans un court intervalle de temps, les variations en pourcentage des cours des actions sont distribuées selon une loi normale.

Les notations suivantes seront adoptées dans la suite :

μ est l'espérance de la rentabilité de l'action

σ est la volatilité du cours de l'action

La moyenne de la variation en pourcentage du cours de l'action, sur un intervalle de temps Δt, est égale à $\mu\Delta t$ et l'écart-type de cette variation est égal à $\sigma\sqrt{\Delta t}$.

Nous avons donc :

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi\left(\mu\Delta t,\sigma\sqrt{\Delta t}\right) \tag{13.1}$$

où ΔS représente la variation du cours de l'action dans l'intervalle de temps Δt, et $\phi(m,s)$ désigne une loi normale de moyenne m et d'écart-type s.

Comme nous l'avons montré à la section 12.6, ce modèle implique que :

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T;\sigma\sqrt{T}\right]$$

ce qui peut s'écrire :

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T;\sigma\sqrt{T}\right] \tag{13.2}$$

ou encore :

$$\ln(S_T) \sim \phi\left[\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T;\sigma\sqrt{T}\right] \tag{13.3}$$

où S_0 est le cours de l'action en date 0 et S_T le cours de l'action à une date future T. L'équation (13.3) montre que ln S_T suit une loi normale. Cela signifie aussi que S_T suit une distribution log-normale.

■ **Exemple 13.1**

Soit une action cotée initialement 40 €, dont l'espérance de rentabilité annuelle est 16 % et la volatilité 20 % par an. L'équation (13.3) stipule que la distribution de probabilité du cours de cette action, S_T, dans six mois est caractérisée par :

$$\ln(S_T) \sim \phi\left[\ln(40) + \left(0{,}16 - \frac{0{,}20^2}{2}\right) \times 0{,}5\ ;\ 0{,}20\sqrt{0{,}5}\right]$$

$$\ln(S_T) \sim \phi(3{,}759; 0{,}141)$$

Connaissant les propriétés d'une distribution normale, nous savons qu'avec une probabilité de 95 % une variable normalement distribuée se situe entre +/−

1,96 fois son écart-type autour de la moyenne. Ainsi, en considérant un intervalle de confiance de 95 %, nous obtenons :

$$3{,}759 - 1{,}96 \times 0{,}141 < \ln(S_T) < 3{,}759 + 1{,}96 \times 0{,}141$$

qui peut s'écrire :

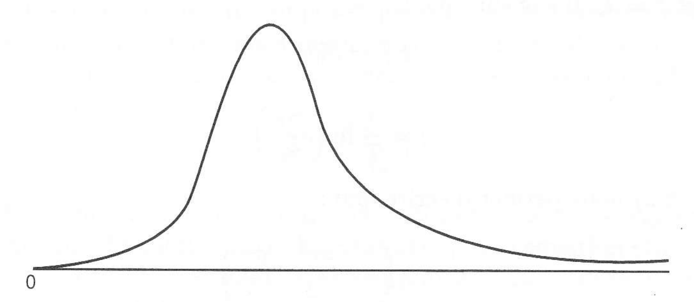
$$e^{3{,}759-1{,}96\times 0{,}141} < S_T < e^{3{,}759+(1{,}96\times 0{,}141)}$$

c'est-à-dire :

$$32{,}55 < S_T < 56{,}56$$

Il y a donc 95 % de chances pour que, dans six mois, le cours de cette action se situe entre 32,55 € et 56,56 €.

Une variable suivant une distribution log-normale peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et l'infini. Le graphique 13.1 montre la fonction de densité d'une distribution log-normale.



Graphique 13.1 : Distribution log-normale.

Contrairement à la distribution normale, la distribution log-normale est dissymétrique et légèrement décalée par rapport à la moyenne. Ainsi, la moyenne, la médiane et le mode sont tous différents. À partir de l'équation (13.3) et des propriétés de la loi log-normale, il peut être démontré que l'espérance de rentabilité de S_T, notée $E(S_T)$, est donnée par l'expression[2] :

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T} \tag{13.4}$$

Ceci est cohérent avec la définition de μ comme rentabilité espérée. La variance de S_T, notée $\mathrm{Var}(S_T)$, se calcule alors de la façon suivante :

$$\mathrm{Var}(S_T) = S_0^2 e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1) \tag{13.5}$$

2. Voir la note technique n° 2 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr) pour une démonstration des résultats donnés aux équations (13.4) et (13.5). Pour approfondir les propriétés de la distribution log-normale, voir J. Aitchison et J. A. C. Brown, *The Lognormal Distribution*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

■ **Exemple 13.2**

Considérons une action cotant 20 €, caractérisée par une espérance de rentabilité annuelle de 20 % et une volatilité annuelle de 40 %. Le cours espéré de l'action, $E(S_T)$, ainsi que la variance, $\mathrm{Var}(S_T)$, attendus dans un an sont donc :

$$E\left(S_T\right) = 20e^{0,2\times 1} = 24{,}43$$

$$\mathrm{Var}\left(S_T\right) = 400e^{2\times 0,2\times 1}\left(e^{0,4^2\times 1} - 1\right) = 103{,}54$$

L'écart-type annuel du prix de cette action est donc $\sqrt{103{,}54} = 10{,}18$.

13.2 Distribution du taux de rentabilité

La log-normalité du prix des actions fournit aussi des informations sur la distribution de probabilité du taux de rentabilité continu d'une action, dans l'intervalle de temps limité par les dates $t = 0$ et $t = T$. Notons η le taux de rentabilité annuel continu entre $t = 0$ et $t = T$. Il s'ensuit que :

$$S_T = S_0 e^{\eta T}$$

et donc :

$$\eta = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \tag{13.6}$$

L'équation (13.2) nous permet d'écrire que :

$$\eta \sim \phi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}; \frac{\sigma}{\sqrt{T}}\right) \tag{13.7}$$

Par conséquent, le taux de rentabilité annuel composé en continu est distribué normalement. Sa moyenne est $\mu - \sigma^2/2$ et son écart-type $\sigma/\sqrt{T}$ [3].

■ **Exemple 13.3**

Soit une action ayant une espérance de rentabilité annuelle de 17 % et une volatilité annuelle de 20 %. Le taux de rentabilité (composé continu) sur une période de 3 ans suit une loi normale de moyenne :

$$0{,}17 - \frac{0{,}2^2}{2} = 0{,}15$$

soit 15 % par an. Son écart-type est de :

$$\frac{0{,}2}{\sqrt{3}} = 0{,}1155$$

soit 11,55 % par an.

3. Lorsque T augmente, l'écart-type de η diminue. Pour en comprendre la raison, considérons deux cas : $T = 1$ et $T = 20$. Il y a moins d'incertitude sur le taux de rentabilité annuel moyen estimé sur 20 ans que sur celui estimé sur une année.

Dans la mesure où il y a 95 % de chances qu'une variable normalement distribuée se situe à moins de 1,96 écart-type autour de sa moyenne, le taux de rentabilité se situera, avec une probabilité de 95 %, entre –7,6 % et +37,6 %.

13.3 L'espérance de rentabilité

L'espérance de rentabilité, μ, requise par les investisseurs dépend du niveau de risque de l'action. Plus le risque du titre est élevé, plus son espérance de rentabilité est importante. Celle-ci dépend aussi positivement du niveau des taux d'intérêt. Bien que nous n'ayons pas à nous préoccuper des déterminants de μ pour l'évaluation des options (voir chapitre 11), un aspect de l'espérance de rentabilité d'une action est fréquemment source de confusion et mérite d'être expliqué.

L'équation (13.1) indique que $\mu\Delta t$ est l'espérance de variation de prix de l'action (en pourcentage) pendant un très court intervalle de temps de longueur Δt. μ est donc l'espérance de rentabilité par unité de temps, mesurée dans un intervalle de temps Δt très court. Il semble naturel de supposer que μ est aussi l'espérance de rentabilité de l'action par unité de temps, mais mesurée sur un intervalle de temps plus long. Malheureusement, ce n'est pas le cas. La rentabilité composée en continu et calculée sur T années s'écrit :

$$\frac{1}{T}\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$$

L'équation (13.7) montre que l'espérance de cette expression est égale à $\mu - \sigma^2/2$. La raison d'une telle distinction entre le paramètre μ de l'équation (13.1) et la valeur $\mu-\sigma^2/2$ de l'équation (13.7) est subtile mais importante. Reprenons le développement à partir de l'équation (13.4) :

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$$

En prenant le logarithme de chacun des membres de l'expression, nous obtenons :

$$\ln[E(S_T)] = \ln(S_0) + \mu T$$

Il est alors tentant d'écrire que :

$$\ln[E(S_T)] = E[ln(S_T)]$$

afin d'en déduire que $E[\ln(S_T/S_0)] = \mu T$. Cependant, de telles simplifications sont incorrectes. En effet, la fonction logarithme n'est pas linéaire. Nous avons donc $\ln[E(S_T)] > E[ln(S_T)]$ (par l'inégalité de Jensen), et ainsi $E[\ln(S_T/S_0)] < \mu T$. Ce résultat est d'ailleurs cohérent avec l'équation (13.7).

Encadré 13.1 Comment les rentabilités affichées par les fonds peuvent être trompeuses

Supposons que la série suivante soit la suite des rentabilités annuelles d'un fonds commun de placement, mesurées en taux annuel continu :

15 %, 20 %, 30 %, -20 %, 25 %

La moyenne arithmétique de cette série est 14 %. Cependant, un investisseur gagnerait moins de 14 % annuels en laissant son argent placé pendant ces 5 années. La valeur finale (P_5) d'un portefeuille P_0 de 100 € investis pendant 5 ans dans ce fonds est de :

$$100 \times 1{,}15 \times 1{,}20 \times 1{,}30 \times 0{,}80 \times 1{,}25 = 179{,}40 \text{ €}$$

Une rentabilité annuelle moyenne de 14 % pendant 5 ans aurait crédité l'investisseur d'un montant final de :

$$100 \times 1{,}14^5 = 192{,}54 \text{ €}$$

Or, il ressort que le gain sur 5 ans n'est que de 179,40 - 100 = 79,40 €. Ce résultat correspond à un intérêt annuel composé de :

$$(1{,}7940)^{1/5} - 1 = 0{,}124, \text{ soit } 12{,}4 \text{ \% annuels}$$

Quelle rentabilité faut-il annoncer ? Bien sûr, il est tentant pour le gérant du fonds de dire : « La moyenne des rentabilités annuelles réalisées sur les 5 dernières années est de 14 %. » Même si cela n'est pas faux, c'est un peu trompeur. Il est plus correct de dire : « Le rendement moyen sur 5 ans d'un portefeuille investi dans notre fonds est de 12,4 % par an. »

Ce phénomène est la conséquence d'un résultat mathématique bien connu qui stipule que la moyenne géométrique d'un ensemble de nombres est toujours inférieure à la moyenne arithmétique.

Les éléments exposés dans cette section nous montrent bien que l'expression « espérance de rentabilité » est ambiguë. En effet, selon les cas, elle peut correspondre à μ ou à $\mu - \sigma^2/2$. Sauf mention contraire, nous considérerons que l'expression « espérance de rentabilité » fait référence à μ dans tout le reste de l'ouvrage.

13.4 La volatilité

La volatilité d'une action, notée σ, est une mesure de l'incertitude sur la rentabilité du titre. La volatilité des actions est généralement comprise entre 20 % et 50 %. À partir de l'équation (13.7), la volatilité d'une action est l'écart-type des rentabilités sur une année quand ces dernières sont exprimées en taux composé continu.

Quand T est petit, l'équation (13.1) nous montre que $\sigma\sqrt{T}$ est approximativement égal à l'écart-type de la variation en pourcentage du cours de l'action pendant une période de durée T. Supposons que le cours de Bourse d'une action soit de 50 € et que $\sigma = 0{,}3$ ou 30 % par an. Une variation de cours de l'action d'un écart-type sur une période d'une semaine est proche de :

$$0{,}3 \times \sqrt{\frac{1}{52}} = 4{,}16\ \%$$

Par conséquent, la variation de cours pour un mouvement d'un écart-type pendant une semaine est de l'ordre de :

$$50 \times 0{,}0416 = 2{,}08\ €$$

L'équation (13.1) montre que l'incertitude sur la valeur future d'une action, mesurée par son écart-type, augmente avec l'horizon temporel. Cette augmentation est approximativement proportionnelle à la racine carrée de l'horizon considéré. Par exemple, l'écart-type de la rentabilité d'une action sur 4 semaines est approximativement le double de l'écart-type sur une semaine.

Estimation de la volatilité à partir de données historiques

Afin d'estimer empiriquement la volatilité d'une action, des relevés de cours périodiques sont nécessaires (chaque jour, chaque semaine ou encore chaque mois).

Notons :

$n+1$: le nombre d'observations
S_i : le cours de l'action au terme du i-ième intervalle de temps
τ : la durée des intervalles de temps en années

On pose alors :

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

pour $i = 1{,}2, \ldots, n$.

L'estimation, s, de l'écart-type des u_i est donnée par la formule :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}$$

soit :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n\,(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2}$$

où $\bar{u}$ est la moyenne des u_i.

Nous savons, grâce à l'équation (13.2), que l'écart-type des u_i est égal à $\sigma\sqrt{\tau}$. La variable s est donc un estimateur de $\sigma\sqrt{\tau}$. Nous pouvons donc estimer σ par $\hat{\sigma}$ avec :

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

Il peut être démontré que l'écart-type de cet estimateur est approximativement égal à $\hat{\sigma}/\sqrt{2n}$.

Déterminer une valeur appropriée pour $n$reste très délicat. Généralement, plus le nombre de données est important, meilleure est la qualité de l'estimation. Mais la volatilité historique, σ, varie au fil du temps, et la prise en compte de données trop anciennes n'est pas pertinente pour une bonne prédiction de la valeur future. Un compromis qui semble fonctionner correctement consiste alors en un relevé quotidien des cours de clôture les plus récents sur une période de 90 à 180 jours. Une règle générale très utilisée consiste à faire coïncider le nombre de jours sur lequel on fonde le calcul de la volatilité historique avec l'horizon d'investissement. Ainsi, si l'investisseur cherche à estimer une volatilité pour calculer le prix d'une option d'échéance deux ans, il utilisera des données quotidiennes relevées sur une période de deux ans. Au chapitre 19, nous étudierons des approches plus complètes et plus sophistiquées pour estimer les volatilités. Nous traiterons notamment le modèle GARCH.

Il est également important de savoir comment procéder au comptage du nombre de jours. Faut-il utiliser un nombre de jours de Bourse ouvrés ou calendaires ? Plus loin dans ce chapitre, nous montrons que les études empiriques conseillent l'utilisation des jours de Bourse ouvrés. En d'autres termes, il est préférable d'ignorer les jours de fermeture de la Bourse dans le calcul de la volatilité.

■ **Exemple 13.4**

Le tableau 13.1 donne un relevé de cours pendant 21 jours ouvrés consécutifs. Dans ce cas précis, nous obtenons :

$$\sum u_i = 0{,}09531 \text{ et } \sum u_i^2 = 0{,}00326$$

L'estimation de l'écart-type sur une base quotidienne s'écrit :

$$\sqrt{\frac{0{,}00326}{19} - \frac{0{,}09531^2}{380}} = 0{,}01216$$

soit 1,216 %. Si nous supposons qu'il y a 252 jours de Bourse par an, $\tau = 1/252$. La volatilité annuelle est estimée comme : $0{,}01216 \times \sqrt{252} = 0{,}193$ soit 19,3 %. L'erreur type de cet estimateur est de :

$$\frac{0{,}193}{\sqrt{2 \times 20}} = 0{,}031$$

soit 3,1 % par an.

Cette démonstration suppose que l'action ne verse pas de dividendes. Cependant, il reste possible de suivre la même logique avec une action qui verse un dividende.

Tableau 13.1 : Estimation de la volatilité

Jour	Cours de clôture de l'action (€)	Cours relatif	Rentablilité quotidienne
0	20,00		
1	20,10	1,00500	0,00499
2	19,90	0,99005	–0,01000
3	20,00	1,00503	0,00501
4	20,50	1,02500	0,02469
5	20,25	0,98780	–0,01227
6	20,90	1,03210	0,03159
7	20,90	1,00000	0,00000
8	20,90	1,00000	0,00000
9	20,75	0,99282	–0,00720
10	20,75	1,00000	0,00000
11	21,00	1,01205	0,01198
12	21,10	1,00476	0,00475
13	20,90	0,99052	–0,00952
14	20,90	1,00000	0,00000
15	21,25	1,01675	0,01661
16	21,40	1,00706	0,00703
17	21,40	1,00000	0,00000
18	21,25	0,99299	–0,00703
19	21,75	1,02353	0,02326
20	22,00	1,01149	0,01143

L'espérance de rentabilité, u_i, calculée sur une période qui inclut le détachement d'un dividende est donnée par la formule suivante :

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i + D}{S_{i-1}}\right)$$

où D représente le dividende. L'espérance de rentabilité des autres intervalles de temps, sans détachement de dividende, s'écrit toujours :

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Cependant, dans la mesure où la fiscalité joue un rôle important dans le calcul des rentabilités lors d'un versement de dividendes, il est certainement préférable d'écarter toutes les données correspondant aux intervalles de temps qui incluent le détachement d'un dividende.

Encadré 13.2 Les origines de la volatilité

Il est naturel de supposer que la volatilité a pour origine l'arrivée de nouvelles informations sur le marché. Ces informations conduisent à des révisions d'anticipations quant à la valeur future des titres. Cela entraîne des modifications de prix et donc de la volatilité. Ce raisonnement n'est cependant pas confirmé par les études empiriques. Quand on dispose de plusieurs années de données journalières, on peut calculer :

1. La variance des rentabilités entre la fermeture du marché un jour donné et la fermeture du lendemain.
2. La variance des rentabilités entre la clôture du vendredi et l'ouverture du lundi suivant.

La seconde variance correspond à une période de 3 jours alors que la première est une variance journalière. On pourrait donc raisonnablement s'attendre à ce que la seconde soit trois fois plus grande que la première. Fama (1965), French (1980) et French et Roll (1986) ont montré que ce n'est pas le cas. Ces trois publications montrent que la seconde variance dépasse la première respectivement de 22 %, 19 % et 10,7 %.

À ce stade, on pourrait dire que les informations sont plus nombreuses quand le marché est ouvert que quand il est fermé. Mais Roll (1984) n'arrive pas à cette conclusion. Il a examiné les prix des contrats à terme sur le jus d'orange, produit pour lequel les informations essentielles sont les conditions climatiques. Or, celles-ci arrivent aussi bien quand le marché est ouvert que quand il est fermé. Roll a ensuite réalisé la même analyse sur les actions ; il trouve que la variance du week-end dépasse de seulement 54 % celle des jours ouvrables.

La seule conclusion raisonnable à laquelle on peut arriver au vu de ces résultats est que la volatilité est engendrée, pour une grande part, par les échanges eux-mêmes (les traders n'ont, le plus souvent, aucun mal à être d'accord avec cette interprétation !).

Jours ouvrables versus jours calendaires

Une question importante est celle de savoir s'il faut mesurer le temps en jours ouvrables ou en jours calendaires, spécialement quand il s'agit d'estimer une volatilité. Comme le montre l'encadré 13.2, les travaux empiriques montrent que la volatilité est bien plus forte quand le marché est ouvert que quand il est fermé. En conséquence, les praticiens tendent à ignorer les jours de fermeture quand ils estiment les volatilités à partir de données historiques. Ainsi, la volatilité annuelle doit être calculée à partir de la volatilité par jour de cotation en utilisant la formule suivante :

$$\text{Volatilité annuelle} = \text{Volatilité par jour de cotation} \times \sqrt{\text{nbre de j. de cotation par an}}$$

C'est ce que nous avons fait dans l'exemple 13.4. L'hypothèse classique retient 252 jours de Bourse par an. En conséquence, la durée de vie d'une option est souvent mesurée en comptant les jours de Bourse plutôt que les jours calendaires. Elle est calculée en années, à l'aide du ratio :

$$T = \frac{\text{Jours calendaires jusqu'à l'échéance}}{\text{Jours calendaires par an}}$$

13.5 Les concepts sous-jacents à l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton

L'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes-Merton est une équation qui doit être vérifiée par tout produit dérivé lié à une action ne versant pas de dividendes. Cette équation sera étudiée à la section suivante. Nous nous attacherons à caractériser la nature des raisonnements suivis.

Ceux-ci sont analogues au raisonnement d'arbitrage, décrit au chapitre 11 et utilisé pour l'évaluation des options à l'aide de la méthode binomiale. Ils impliquent la construction d'un portefeuille sans risque consistant en une position sur le produit dérivé et une position sur l'action elle-même. En l'absence d'opportunités d'arbitrage, l'espérance de rentabilité du portefeuille doit être égale au taux sans risque, r. Ceci nous conduit à l'EDP de Black-Scholes-Merton.

La raison pour laquelle il est possible de construire un portefeuille sans risque composé d'une action et d'un produit dérivé vient du fait qu'ils sont tous deux exposés à la même source d'incertitude : la variation du prix de l'action. Sur tout intervalle de temps très court, la valeur du produit dérivé est parfaitement corrélée avec le prix de l'action sous-jacente. Ainsi, quand un portefeuille approprié, composé de l'action et de son produit dérivé, est constitué, le gain ou la perte sur le sous-jacent sont systématiquement compensés par le gain ou la perte sur le produit dérivé. Ainsi, au terme du court intervalle de temps, la valeur globale du portefeuille est toujours connue avec certitude.

Supposons, par exemple, qu'à un instant précis, la relation entre une variation infinitésimale du cours de l'action, ΔS, et une variation du même ordre de grandeur de la valeur d'un call européen sur cette action, notée Δc, soit égale à :

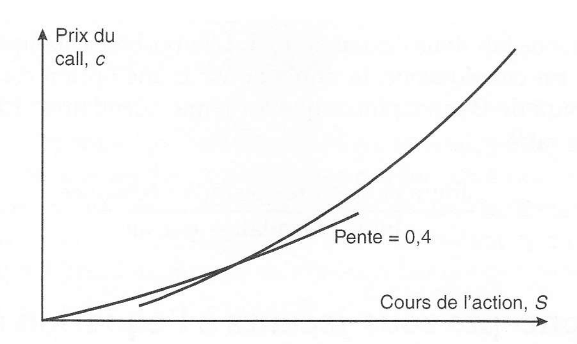
$$\Delta c = 0{,}4\Delta S$$

Cette égalité indique que la pente de la droite représentant la relation entre c et S est de 0,4 (voir graphique 13.2). Le portefeuille sans risque consiste donc en :

1. Une position longue sur 0,4 action.

2. Une position courte sur un call.

Il y a cependant une différence entre l'approche de Black-Scholes-Merton et l'approche présentée au chapitre 11, qui utilise le modèle binomial. En effet, dans le cas présent, la position prise par l'investisseur sur le titre et son dérivé est qualifiée de



Graphique 13.2 : Relation entre c et S.

« sans risque » uniquement pendant un très court intervalle de temps. (En théorie, le portefeuille constitué n'est en fait réellement sans risque que sur un intervalle de temps infiniment court.) Afin de garder un portefeuille sans risque, l'investisseur doit ajuster fréquemment sa position. On dit qu'il doit réajuster son portefeuille[4]. Si nous reprenons l'exemple précédent, la relation entre Δc et ΔS peut varier de $\Delta c = 0{,}4\Delta S$ aujourd'hui à $\Delta c = 0{,}5\Delta S$ dans deux semaines. Afin de conserver un portefeuille sans risque, l'investisseur doit alors procéder à un ajustement ; dans ce cas, il renforcera sa position sur action en achetant 0,1 action pour chaque call vendu. Il n'en reste pas moins vrai que la rentabilité provenant du portefeuille sans risque sur tout intervalle de temps très court doit être égale au taux sans risque. Cette condition est l'élément clé de l'analyse menée par Black et Scholes. C'est notamment cet élément qui a permis le développement de leur célèbre modèle d'évaluation.

Hypothèses

L'obtention de l'EDP de Black-Scholes-Merton nécessite les hypothèses suivantes :

1. Le cours de l'action suit le processus présenté au chapitre 12. μ et σ sont constants.
2. Il n'y a aucune restriction sur les ventes à découvert. Le produit de ces ventes est immédiatement et intégralement disponible.
3. Il n'y a pas de frais de transactions ou d'impôts. Tous les actifs financiers sont parfaitement divisibles.
4. Il n'y a pas de dividende sur le sous-jacent pendant la durée de vie de l'actif dérivé.
5. Il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage.
6. Le marché fonctionne en continu.
7. Le taux sans risque, r, est constant et fixe quelle que soit la maturité du produit dérivé.

4. Nous présentons ces réajustements de portefeuilles en détail au chapitre 15.

Dans les chapitres suivants, nous verrons comment certaines de ces hypothèses peuvent être relâchées. Par exemple, σ et r pourront être définis comme des fonctions de t. Les taux d'intérêt pourront être modélisés par des processus stochastiques, en considérant que la distribution du cours de l'action, à l'échéance de l'option, est toujours log-normale.

13.6 Démonstration de l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton

Le processus suivi par l'action est celui qui est développé à la section 12.3 (mouvement brownien géométrique). Il est caractérisé par :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{13.8}$$

Notons f le prix d'une option d'achat ou de tout autre produit dérivé lié au titre S. La variable f est alors une fonction de S et t. À partir de l'équation (12.14), nous déduisons la relation suivante :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz \tag{13.9}$$

Sous leur forme discrète, les équations (13.8) et (13.9) s'écrivent :

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \tag{13.10}$$

et :

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z \tag{13.11}$$

où ΔS et Δf représentent les variations de f et S pendant un court intervalle de temps de longueur Δt. Rappelons qu'à la section 12.5, nous avons insisté sur le fait que les variations aléatoires de f et S sont gouvernées par le même processus de Wiener. En d'autres termes, les Δz $(=\varepsilon\sqrt{\Delta t})$ des équations (13.10) et (13.11) sont identiques. Ainsi, en choisissant un portefeuille composé d'une action et de l'un de ses produits dérivés, la composante aléatoire peut être éliminée.

Un portefeuille approprié peut être défini de la façon suivante :

- vente d'une unité du produit dérivé ;
- achat de $\frac{\partial f}{\partial S}$ actions.

Le détenteur du portefeuille est alors en position courte (vendeur) sur le produit dérivé et en position longue (acheteur) sur $\partial f/\partial S$ actions. La valeur du portefeuille, notée Pi, s'écrit alors :

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \tag{13.12}$$

La variation ΔPi de la valeur du portefeuille au cours d'un intervalle de temps Δt est donnée par :

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \tag{13.13}$$

En substituant à Δf et ΔS, dans l'équation (13.13), leurs valeurs données dans les équations (13.10) et (13.11), nous obtenons :

$$\Delta \Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) \Delta t \qquad (13.14)$$

Puisque cette équation ne comporte pas l'expression Δz, le portefeuille doit être sans risque pendant l'intervalle de temps Δt. Les hypothèses énoncées à la section précédente impliquent qu'un tel portefeuille doit procurer une rentabilité égale au taux sans risque. Dans le cas contraire, les investisseurs profiteraient d'une opportunité d'arbitrage. Deux possibilités se présentent alors : *primo*, si la rentabilité du portefeuille est supérieure au taux sans risque, l'investisseur emprunte de l'argent au taux sans risque pour le réinvestir en achetant le portefeuille, qui procure une meilleure rentabilité ; *secundo*, si le portefeuille engendre une rentabilité inférieure au taux sans risque, l'investisseur le vendra à découvert et placera alors le produit de cette vente au taux sans risque afin de dégager un profit totalement sans risque. Nous pouvons donc écrire :

$$\Delta \Pi = r\Pi \Delta t \qquad (13.15)$$

où r représente le taux sans risque. Si nous remplaçons les termes Π et $\Delta\Pi$ de cette équation par leurs expressions données dans les équations (13.12) et (13.14), nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t$$

et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \qquad (13.16)$$

L'équation (13.16) est l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton. Cette équation a plusieurs solutions correspondant à tous les produits dérivés qui peuvent avoir S comme actif sous-jacent. La solution de l'équation dépend alors des conditions aux bornes qui caractérisent le produit dérivé considéré. Ces conditions précisent les valeurs de l'actif dérivé analysé aux bornes des ensembles de valeurs possibles de S et t. Par exemple, dans le cas d'un call européen, la condition aux bornes est :

$$f = \max(S - K; 0), \text{ quand } t = T$$

Dans le cas d'un put européen, elle s'écrit :

$$f = \max(K - S; 0), \text{ quand } t = T$$

Notons que le portefeuille utilisé dans la dérivation de l'équation (13.16) n'est pas un portefeuille sans risque de façon permanente. Il est sans risque uniquement pendant un intervalle de temps infinitésimal. En effet, dès que S et t varient, $\partial f / \partial S$ varie aussi. Ainsi, afin de conserver le caractère non risqué du portefeuille, il est nécessaire d'ajuster fréquemment les positions relatives de l'action et du produit dérivé au sein du portefeuille.

■ **Exemple 13.5**

Un contrat forward portant sur une action qui ne verse pas de dividendes est un produit dérivé dépendant de cette action sous-jacente. Ce contrat devrait vérifier l'équation (13.16). En reprenant l'équation (5.5), nous savons que la valeur d'un contrat forward, f, à une date quelconque$t$ est donnée en fonction du cours de l'action, S, à cette date par :

$$f = S - Ke^{-r(T-t)}$$

où K est le prix de livraison. Cela signifie que :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0$$

Quand nous substituons ces termes à ceux du membre de gauche de l'équation (13.16), nous obtenons :

$$-rKe^{-r(T-t)} + rS$$

Ce résultat est égal à rf. L'équation (13.16) est donc bien vérifiée.

Les prix de marché des produits dérivés

Chaque fonction $f(\mathrm{S},t)$, solution de l'EDP (13.16), définit le prix théorique d'un actif dérivé qui pourrait être échangé sur le marché. Si cet actif est coté à ce prix, il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage. Réciproquement, si la fonction $f(S,t)$ ne vérifie pas l'équation différentielle (13.16), alors elle ne peut être le prix d'un produit dérivé sans créer automatiquement des opportunités d'arbitrage pour les opérateurs du marché.

Afin d'illustrer cet élément, considérons la fonction e^S. Il est évident qu'elle ne vérifie pas l'équation (13.16). Compte tenu de ce qui vient d'être dit, cette fonction ne peut pas représenter la valeur d'un produit dérivé dépendant du cours S. Si un produit dérivé ayant pour valeur e^S existait, il y aurait une opportunité d'arbitrage. Considérons un second exemple en utilisant la fonction suivante :

$$\frac{e^{\left(\sigma^2-2r\right)(T-t)}}{S}$$

Cette fonction vérifie l'EDP (13.16). Ainsi, en théorie, le prix du produit dérivé défini par la fonction présentée ci-dessus est un prix de marché acceptable (il correspond au prix d'un actif dérivé dont le payoff à l'échéance est $1/S_T$). D'autres exemples de produits dérivés possibles sont donnés dans les exercices 13.11, 13.12, 13.23 et 13.28.

13.7 L'évaluation risque-neutre

Nous avions introduit l'évaluation risque-neutre en relation avec le modèle binomial au chapitre 11. Ce mode d'évaluation est sans aucun doute l'outil essentiel en matière de valorisation de produits dérivés. Il résulte en effet de l'une des propriétés clés

de l'EDP (13.16) de Black-Scholes-Merton, énoncée à la section précédente : cette équation ne fait intervenir aucune variable affectée par le degré d'aversion au risque des investisseurs. Les variables intervenant dans cette équation sont : le temps, la volatilité de l'action et le taux sans risque. Toutes ces variables sont bien indépendantes de la tolérance au risque de l'investisseur. Le cours de l'action est supposé être un cours d'équilibre ; par conséquent, la tolérance au risque de l'investisseur est déjà prise en compte dans cette variable.

L'EDP de Black-Scholes-Merton ne serait pas indépendante du degré d'aversion au risque si elle incorporait l'espérance de rentabilité de l'action, μ, qui dépend elle-même de l'aversion au risque des investisseurs. En effet, rappelons que l'espérance de rentabilité est une fonction du risque de l'actif. Plus l'aversion au risque est élevée, plus l'investisseur exigera une espérance de rentabilité importante pour tout titre risqué. Or, comme nous l'avons vu précédemment, μ n'entre pas dans la formulation de l'équation aux dérivées partielles.

À partir de cette constatation, il est possible d'énoncer les remarques suivantes.

Puisque l'EDP de Black-Scholes-Merton est indépendante du degré d'aversion par rapport au risque, un raisonnement ingénieux peut être utilisé. Si le paramètre de risque ne s'inscrit pas dans l'équation, il n'a alors aucun impact sur la solution de l'équation. Ainsi, nous pouvons choisir arbitrairement n'importe quel niveau d'aversion risque. En particulier, nous pouvons envisager l'hypothèse la plus simple consistant à supposer que les investisseurs sont neutres face au risque.

Dans un univers risque-neutre, l'espérance de rentabilité de tout titre, quel qu'il soit, est le taux sans risque, r. Par conséquent, la valeur présente de tout flux de trésorerie est obtenue en actualisant l'espérance de ce flux au taux sans risque r. Pouvoir supposer que l'investisseur évolue dans un univers risque-neutre simplifie donc considérablement l'analyse et l'évaluation des produits dérivés. Il suffit en effet d'appliquer la méthode suivante :

1. Supposer que l'espérance de rentabilité du sous-jacent est égale au taux sans risque ($\mu = r$).
2. Calculer l'espérance du payoff de l'actif dérivé à l'échéance.
3. Actualiser cette espérance au taux d'intérêt sans risque.

Il est important de comprendre que se placer dans un univers risque-neutre (c'est-à-dire dans une économie où tous les agents sont neutres face au risque) est un simple artifice de calcul qui conduit à une résolution aisée de l'EDP de Black-Scholes-Merton. Les solutions obtenues par cette méthode sont naturellement valables dans tous les univers, même si les agents ne sont pas neutres face au risque. En effet, en passant d'un univers risque-neutre à un univers d'aversion au risque, deux phénomènes se produisent : l'espérance de rentabilité de l'action et le taux d'actualisation du payoff du produit dérivé sont modifiés..., et ces deux variations se compensent toujours exactement.

Application aux contrats forward sur action

À la section 5.7, nous avions évalué les contrats forward sur des actions qui ne versent pas de dividendes. Dans l'exemple 13.5, nous avons vu que la formule d'évaluation vérifiait l'EDP de Black-Scholes-Merton. Dans cette section, nous nous proposons de démontrer la formule d'évaluation à partir de la méthode d'évaluation risque-neutre. Nous supposons que les taux d'intérêt sont constants, égaux à r. Cette hypothèse est plus restrictive que celles du chapitre 5.

On considère une position longue sur un contrat forward, de prix de livraison K et d'échéance T. Comme nous l'avons illustré dans le graphique 1.2, la valeur de ce contrat à maturité s'écrit :

$$S_T - K$$

où S_T est le cours de l'action à l'échéance T. Le principe d'évaluation risque-neutre stipule que la valeur du contrat forward, notée f, en $t = 0$, est égale à sa valeur espérée en T, actualisée au taux sans risque sur la période considérée. On obtient l'expression suivante de la valeur du contrat forward f en $t = 0$:

$$f = e^{-rT}\hat{E}(S_T - K)$$

où $\hat{E}$ correspond à l'espérance de rentabilité de f dans un univers risque-neutre. Comme K est constant, cette équation devient :

$$f = e^{-rT}\hat{E}(S_T) - Ke^{-rT} \tag{13.17}$$

L'espérance du taux de rentabilité de l'action, μ, devient alors r, dans un univers risque-neutre. À partir de l'équation (13.4), on obtient :

$$\hat{E}(S_T) = S_0e^{-rT} \tag{13.18}$$

En substituant (13.18) dans (13.17) on obtient :

$$f = S_0 - Ke^{-rT} \tag{13.19}$$

Ce résultat vérifie bien ceux qui ont été démontrés à la section 5.5.

13.8 Les formules d'évaluation de Black et Scholes

Les formules de Black et Scholes permettant de calculer, à la date zéro, la valeur d'un call européen ou d'un put européen sur une action qui ne verse pas de dividendes sont les suivantes :

$$c = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{13.20}$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) \tag{13.21}$$

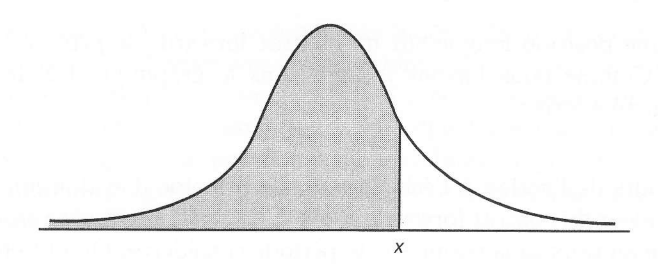
avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

et :

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

La fonction $N(x)$ désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée-réduite. En d'autres termes, c'est la probabilité qu'une variable suivant une loi normale, $\phi(0, 1)$, soit inférieure à x. Cette idée est illustrée dans le graphique 13.3. Les autres variables de la formule sont désormais familières.



Graphique 13.3 : La partie grisée représente $N(x)$.

Une manière de démontrer la formule de Black et Scholes consiste à résoudre l'équation aux dérivées partielles (13.16) en tenant compte des conditions aux bornes mentionnées à la section 13.6[5]. Une seconde approche consiste à utiliser la méthode d'évaluation risque-neutre. Considérons un call européen ; l'espérance de la valeur de cette option à l'échéance s'écrit :

$$\hat{E}\left[\max\left(S_T - K{,}0\right)\right]$$

où $\hat{E}$ désigne l'opérateur d'espérance dans un univers risque-neutre. Selon cette approche, la valeur du call européen, c, est égale à l'espérance de la valeur de l'option à l'échéance, actualisée au taux sans risque :

$$c = e^{-rT}\hat{E}\left[\max\left(S_T - K{,}0\right)\right] \qquad (13.22)$$

L'annexe de ce chapitre montre que cette formulation conduit au résultat présenté dans l'équation (13.20). Afin de fournir ici une interprétation des termes de cette équation, écrivons :

$$c = e^{-rT}\left[S_0 N(d_1)\, e^{rT} - KN(d_2)\right] \qquad (13.23)$$

$N(d_2)$ est la probabilité, dans l'univers risque-neutre, que l'option soit exercée. $KN(d_2)$ est donc l'espérance du décaissement à l'échéance. Toujours dans l'univers risque-neutre, l'expression $S_0N(d_1)e^{rT}$ est l'espérance d'une variable valant S_T, si $S_T > K$, et zéro sinon. C'est donc l'encaissement espéré à l'échéance. Le prix de l'option peut

5. L'EDP fournit la valeur du call et du put à une date quelconque t. Par exemple, la valeur du call qui satisfait l'EDP est $c = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$, avec :
$d_1 = \frac{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$. Voir l'exercice 13.17 pour vérifier que l'EDP est bien satisfaite.

donc être vu comme la valeur actuelle nette espérée du projet d'investissement « achat de l'option ».

Puisque la valeur d'un call européen est égale à celle d'un call américain quand il n'y a pas de dividendes (voir section 9.5), l'équation (13.20) nous donne aussi la valeur d'un call américain sur cette action.

Malheureusement, aucune formule analytique ne donne la valeur d'un put américain sur une action qui ne verse pas de dividendes. Des solutions quasi analytiques et des approximations numériques applicables à l'évaluation des puts américains sont détaillées au chapitre 17.

Dans la pratique, la formule de Black et Scholes est appliquée avec un taux sans risque égal au taux actuariel d'un zéro-coupon sans risque de maturité T. Comme nous le verrons dans les chapitres suivants, cette pratique se révèle exacte d'un point de vue théorique quand r est une fonction connue du temps. Elle est aussi exacte quand le taux d'intérêt est stochastique, tant que le cours de l'action à la date T suit une loi log-normale et que le paramètre de volatilité est choisi de façon appropriée.

Les propriétés des formules de Black et Scholes

Nous allons maintenant montrer que les formules de Black et Scholes vérifient les propriétés générales des options, en étudiant ce que devient la formule lorsque certains paramètres tendent vers des valeurs limites.

Quand le cours S_0 de l'action sous-jacente devient très élevé, il est presque sûr qu'un call est dans la monnaie – et donc exercé – à l'échéance. L'option est alors semblable à un contrat forward ayant un prix d'exercice K. En utilisant l'expression (5.5), nous pouvons estimer la valeur de l'option par :

$$S_0 - Ke^{-rT}$$

Cette expression est en fait le résultat donné par l'équation (13.20). En effet, quand S_0 tend vers l'infini, il en est de même pour d_1 et d_2 ; $N(d_1)$ et $N(d_2)$ tendent donc vers 1,00. De même, le prix de l'option de vente correspondante, p, tend vers 0. En effet, plus on se rapproche de l'échéance, moins l'option a de chances de se retrouver dans la monnaie – et donc exercée – en T. Ceci est cohérent avec l'équation (13.21) car $N(-d_1)$ et $N(-d_2)$ tendent tous deux vers 0.

Considérons maintenant l'impact d'une volatilité σ qui tend vers zéro. L'action est alors virtuellement sans risque et sa valeur doit croître au taux d'intérêt sans risque, r, jusqu'à S_0e^{rT} en date T. Le payoff du call, dans ce cas, s'écrit :

$$\max\left(S_0e^{rT} - K; 0\right)$$

Si l'on actualise cette expression au taux r, on obtient la valeur du call :

$$e^{-rT}\max\left(S_0e^{rT} - K; 0\right) = \max\left(S_0 - Ke^{-rT}; 0\right)$$

Afin de montrer que ce résultat est cohérent avec l'équation (13.20), considérons d'abord le cas où $S_0 > Ke^{-rT}$. Cette inégalité implique que $\ln(S_0/K) + rT > 0$. Quand σ tend vers zéro, d_1 et d_2 tendent vers $+\infty$, et donc $N(d_1)$ et $N(d_2)$ tendent vers 1. L'équation (13.20) devient :

$$c = S_0 - Ke^{-rT}$$

Lorsque, au contraire, $S_0 < Ke^{-rT}$, $\ln(S_0/K) + rT < 0$. Quand σ tend vers zéro, d_1 et d_2 tendent vers $-\infty$, donc $N(d_1)$ et $N(d_2)$ tendent vers zéro et l'équation (13.20) indique que le call a une valeur nulle.

Par conséquent, la valeur du call s'écrit $\max(S_0 - Ke^{-rT}\ ;\ 0)$ quand σ tend vers zéro. De même, le prix d'un put s'écrit $\max(Ke^{-rT} - S_0\ ;\ 0)$ quand σ tend vers zéro.

13.9 La fonction de répartition de la loi normale

L'unique problème lié à la mise en œuvre des équations (13.20) et (13.21) est le calcul de la fonction de répartition, N. Les tables de la loi normale sont fournies à la fin de cet ouvrage. On peut aussi utiliser une approximation polynomiale d'une précision à 6 décimales, donnée ci-après[6] :

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)\left(a_1k + a_2k^2 + a_3k^3 + a_4k^4 + a_5k^5\right) \text{ si } x \geqslant 0 \\ 1 - N(-x) \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

avec :

$$k = \frac{1}{1+\gamma x} \qquad \gamma = 0{,}2316419$$

$$a_1 = 0{,}319381530,\ a_2 = -0{,}356563782,\ a_3 = 1{,}781477937,$$

$$a_4 = -1{,}821255978,\ a_5 = 1{,}330274429$$

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

■ **Exemple 13.6**

À six mois de l'échéance d'une option, le cours de l'action sous-jacente est 42 €, le prix d'exercice de l'option est 40 €, le taux d'intérêt sans risque 10 %, et la volatilité annuelle 20 %.

On a donc : $S_0 = 42$, $K = 40$, $r = 0{,}1$, $\sigma = 0{,}2$ et $T = 0{,}5$.

$$d_1 = \frac{\ln(42/40) + \left(0{,}1 + 0{,}2^2/2\right) \times 0{,}5}{0{,}2\sqrt{0{,}5}} = 0{,}7693$$

$$d_2 = \frac{\ln(42/40) + \left(0{,}1 - 0{,}2^2/2\right) \times 0{,}5}{0{,}2\sqrt{0{,}5}} = 0{,}6278$$

6. Voir M. Abramowitz et I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1972. La fonction d'Excel « LOI.NORMALE.STANDARD » (ou « NORMSDIST » dans la version anglaise) peut également être utilisée.

et :

$$Ke^{-rT} = 40e^{-0,05} = 38{,}049$$

Ainsi, si cette option est un call européen, sa valeur, c, est donnée par :

$$c = 42N(0{,}7693) - 38{,}049N(0{,}6278)$$

Si cette option est un put européen, sa valeur, p, est donnée par :

$$p = 38{,}049N(-0{,}6278) - 42N(-0{,}7693)$$

En utilisant l'approximation polynomiale, on obtient :

$$N(0{,}7693) = 0{,}7791, \quad N(-0{,}7693) = 0{,}2209,$$

$$N(0{,}6278) = 0{,}7349, \quad N(-0{,}6278) = 0{,}2651$$

et donc :

$$c = 4{,}76, \quad p = 0{,}81$$

Si on néglige l'actualisation, le cours de l'action doit augmenter de 2,76 € d'ici à l'échéance pour que la position globale de l'acheteur du call soit à l'équilibre, c'est-à-dire que son gain compense le prix d'achat de l'option. De même, le cours de l'action doit baisser de 2,81 € d'ici à l'échéance pour atteindre le point mort de l'acheteur du put.

13.10 Les warrants émis par une société sur ses propres titres

L'exercice d'une option classique n'a pas d'influence sur le nombre d'actions d'une entreprise. Si le vendeur d'un call doit livrer le sous-jacent à l'échéance et qu'il ne le possède pas, il lui suffit de l'acheter sur le marché. Comme nous l'avons évoqué au chapitre 8, les warrants et les stock-options sont différents de ce point de vue puisque leur exercice implique la création d'actions supplémentaires qui sont livrées au détenteur de l'option ou du warrant en échange du paiement du prix d'exercice. Comme le prix d'exercice est forcément inférieur au prix de marché en cas d'exercice, il y a un phénomène de dilution supporté par les actionnaires.

Comment cette dilution potentielle affecte-t-elle la méthode d'évaluation des warrants et des stock-options ? La réponse est qu'elle ne devrait avoir aucun effet. Si les marchés sont efficients, le prix de l'action intègre déjà la dilution potentielle (voir encadré 13.3)[7].

7. Les analystes supposent parfois que la somme des valeurs des warrants et des actions suit une loi log-normale. Cela permet d'obtenir une équation du type Black-Scholes pour la valeur du warrant. Voir la note technique n° 3 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr) pour une présentation de ce modèle.

Encadré 13.3 Warrants, stock-options et dilution

Considérons une entreprise dont le capital comprend 100 000 actions valant 50 € chacune. Elle annonce brutalement qu'elle va distribuer 100 000 stock-options à ses employés, stock-options dont le prix d'exercice est 50 € et qui seront exerçables dans trois ans. Si le marché n'interprète pas cette annonce comme la promesse d'une réduction des salaires ou comme un indice de l'accroissement de la motivation des salariés dans le futur, le prix de l'action va diminuer immédiatement. Si, par exemple, il tombe à 45 €, le coût de dilution est de 5 € par titre, soit 500 000 € au total.

Supposons maintenant que, pendant la période de trois ans suivant l'émission, l'entreprise a de bons résultats qui amènent le cours de ses actions à 100 €. L'exercice des options va rapporter 50 € par stock-option aux détenteurs. Il serait tentant de dire que cela correspond à une dilution supplémentaire puisque 100 000 titres valant 100 € chacun ont été ajoutés à 100 000 titres pour lesquels les acheteurs ont payé un prix unitaire de 50 €, et cela devrait (a) baisser le prix à 75 € et (b) diminuer le revenu du détenteur de stock-option à 25 € par titre. Ce raisonnement ne tient pas, car l'exercice des options est anticipé sans difficulté par le marché et déjà reflété dans le prix de l'action.

Cet exemple montre que, quand les marchés sont efficients, l'impact de la dilution créée par des warrants ou des stock-options est traduit dans le prix dès l'annonce de l'émission. Il n'a pas besoin d'être à nouveau intégré dans l'évaluation des options.

Considérons une entreprise dont le capital comprend N actions et qui a émis M warrants européens. Supposons que chaque warrant confère à son détenteur le droit d'acheter une action de cette entreprise, à la date T, à un prix unitaire K.

Si NS_T représente la valeur des actions de cette société (warrants inclus) à la date T et si les détenteurs des warrants décident d'exercer, alors l'entreprise émettrice percevra un flux de trésorerie égal aux paiements des prix d'exercice MK. La valeur des actions de la société augmentera donc pour atteindre $NS_T + MK$. Cette valeur est redistribuée aux $N + M$ actions et le cours de l'action, après exercice, devient alors égal à :

$$\frac{NS_T + MK}{N + M}$$

Quand le warrant est exercé, la valeur du revenu obtenu par son détenteur est de :

$$\frac{NS_T + MK}{N + M} - K$$

ou encore :

$$\frac{N}{N + M}(S_T - K)$$

Les warrants ne devraient être exercés que si le payoff est positif. Le payoff accordé au détenteur d'un warrant est par conséquent :

$$\frac{N}{N+M}\max(S_T - K{,}0)$$

Ceci nous montre que la valeur d'un warrant est équivalente à :

$$\frac{N}{N+M}$$

options d'achat sur l'action de l'entreprise. Le coût total de ces options est donc égal à M fois cette quantité.

13.11 Les volatilités implicites

Dans la formule d'évaluation d'options de Black et Scholes, un seul paramètre ne peut être observé directement : la volatilité de l'action. À la section 13.4, nous avions expliqué comment il était possible de l'estimer à partir d'historiques de cours. En pratique, les traders travaillent avec la volatilité implicite. Cette volatilité est calculée à partir des prix des options cotées sur le marché.

Pour illustrer ce calcul, supposons que le prix d'un call sur action soit 1,875 € quand $S_0 = 21$, $K = 20$, $r = 0{,}1$, et $T = 0{,}25$. La volatilité implicite est la valeur de σ qui, quand elle est substituée dans l'équation (13.20), donne $c = 1{,}875$ €. Malheureusement, il n'est pas possible d'inverser l'équation (13.20) et d'exprimer σ en fonction de S_0, K, r, T et c. Cependant, il est possible de déterminer la valeur de cette volatilité implicite en utilisant un processus itératif. Par exemple, en débutant la résolution avec $\sigma = 0{,}20$, on trouve $c = 1{,}76$. Cette valeur est trop faible, la volatilité implicite est donc supérieure à 0,20. Pour $\sigma = 0{,}30$, on a $c = 2{,}10$ qui est trop élevé. Choisir le milieu de l'intervalle précédent (0,20 ; 0,30) permet d'approcher, puis de trouver la valeur de σ[8], avec le degré de précision souhaité. Dans cet exemple, on finit par trouver la volatilité implicite $\sigma = 23{,}5$ % par an.

Le niveau de volatilité implicite appréhende la volatilité, telle qu'elle est perçue par les opérateurs, pour les semaines ou mois à venir. Les traders calculent très souvent les volatilités implicites des options liquides et, par des méthodes d'interpolation, estiment la volatilité d'options, portant sur un même sous-jacent, mais nettement moins liquides. Cette procédure est expliquée au chapitre 16. Il est aussi important de noter que les options très dans la monnaie et très en dehors de la monnaie sont peu sensibles aux variations de volatilité. Les volatilités implicites calculées sur ces options tendent donc à manquer de fiabilité.

8. Cette méthode est présentée à titre d'exemple. D'autres méthodes plus puissantes, comme celle de Newton-Raphson, sont généralement utilisées dans la pratique (voir la note de bas de page n° 5 du chapitre 4). Le logiciel DerivaGem peut être employé pour calculer les volatilités implicites.

13.12 Les dividendes

Jusqu'à maintenant, nous avions supposé que les actions sous-jacentes aux options ne versaient pas de dividendes. Dans cette section, nous allons modifier le modèle de Black et Scholes afin de prendre en compte ces dividendes. Nous supposons que les dividendes payables pendant la durée de vie de l'option ainsi que les dates de paiement sont connus. Cette hypothèse n'est pas contraignante pour les options d'échéance courte. En revanche, pour les options longues (dont la durée de vie est de plusieurs années par exemple), la détermination d'un taux de croissance des dividendes est plus délicate et complique l'évaluation.

Il est raisonnable de penser qu'une action versant un dividende suit le processus stochastique présenté au chapitre 12, sauf au moment du détachement. À cet instant, le cours de l'action diminue d'un montant à peu près égal au dividende[9].

Les options européennes

Les options européennes peuvent être étudiées en supposant que le prix de l'action est la somme de deux composantes : la première, sans risque, est le montant connu du dividende qui sera payé pendant la durée de vie de l'option ; la seconde est risquée. À tout moment, la composante sans risque est la valeur actualisée au taux sans risque de tous les dividendes susceptibles d'être distribués pendant la durée de vie de l'option. Au fur et à mesure que les options se rapprochent de l'échéance, les dividendes sont versés et la composante sans risque disparaît. La formule de Black et Scholes est alors correcte si S_0 est égal à la composante risquée de l'action, et σ est la volatilité du processus suivi par cette partie risquée[10]. En pratique, cela revient à dire que la formule de Black et Scholes est applicable, à condition de déduire du cours de l'action la valeur actualisée des dividendes payables pendant la durée de vie de l'option. L'actualisation s'effectue au taux sans risque à partir des dates de détachement.

■ **Exemple 13.7**

Considérons un call européen ayant pour sous-jacent une action qui paie un dividende dans 2 mois, puis un autre dans 5 mois. Le montant attendu pour chaque dividende, à la date de son détachement, s'élève à 0,50 €. Le cours de l'action

9. Pour des raisons fiscales, il est possible que le cours de l'action diminue d'un peu moins que le montant du dividende. Afin d'en tenir compte, il convient – dans cette section – d'entendre par dividende le montant D égal à la différence $D = S_1 - S_0$, où S_0 représente le cours de l'action avant le paiement du dividende, et S_1 le cours de l'action postdividende. Ainsi, si nous anticipons par exemple un dividende de 1 €, mais que, le jour du détachement, le cours de l'action ne baisse que de 0,80 €, nous retiendrons, pour le propos de notre analyse, un dividende de 0,80 €.

10. En théorie, ce n'est pas tout à fait la même volatilité que celle du processus stochastique suivi par le cours de l'action dans son ensemble. La volatilité de la composante risquée est approximativement égale à celle de l'action multipliée par $S_0/(S_0 - D)$, où D est la valeur actuelle des dividendes. Cependant, un ajustement n'est nécessaire que si les volatilités sont estimées d'après des données historiques. Une volatilité implicite est calculée après que la valeur actuelle des dividendes a été soustraite du cours de l'action, et elle représente donc bien la volatilité de la composante risquée.

est actuellement de 40 €, le prix d'exercice de l'option est de 40 €, la volatilité historique annuelle de l'action est 30 %, le taux sans risque 9 %, et l'échéance à six mois. La valeur actualisée des dividendes est donc :

$$0{,}5e^{-0{,}1667\times 0{,}09} + 0{,}5e^{-0{,}4167\times 0{,}09} = 0{,}9741$$

L'application de la formule de Black et Scholes, avec :
$S_0 = 39{,}0259$, $K = 40$, $r = 0{,}09$, $\sigma = 0{,}3$ et $T = 0{,}5$, conduit à :

$$d_1 = \frac{\ln(39{,}0259/40) + \left(0{,}09 + 0{,}3^2/2\right) \times 0{,}5}{0{,}3\sqrt{0{,}5}} = 0{,}2017$$

$$d_2 = \frac{\ln(39{,}0259/40) + \left(0{,}09 - 0{,}3^2/2\right) \times 0{,}5}{0{,}3\sqrt{0{,}5}} = -0{,}0104$$

À l'aide de l'approximation polynomiale présentée à la section 13.9, nous trouvons :

$$N(d_1) = 0{,}5800, \quad N(d_2) = 0{,}4959$$

Le prix du call, c, par l'équation (13.20), est égal à :

$$39{,}0259 \times 0{,}5800 - 40e^{-0{,}09\times 0{,}5} \times 0{,}4959 = 3{,}67$$

soit 3,67 €.

Les options américaines

Penchons-nous à présent sur les calls américains. À la section 9.5, nous avons montré qu'en l'absence de dividendes les calls américains ne sont jamais exercés prématurément. L'extension de ce raisonnement montre que lorsqu'une action verse un dividende, il peut être judicieux d'exercer juste avant la date de détachement. Supposons que n dates de détachement soient prévues et que $t_1, t_2, \ldots t_n$ soient les dates précédant ces détachements, avec $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$. Les dividendes correspondants sont notés $D_1, D_2, \ldots D_n$.

Considérons d'abord le cas où l'option est exercée juste avant le détachement du dernier dividende (c'est-à-dire en t_n). L'investisseur reçoit alors :

$$S(t_n) - K$$

Si, en revanche, l'option n'est pas exercée, le cours de l'action diminue et vaut $S(t_n) - D_n$. Ainsi, comme nous l'avons démontré dans l'équation (9.5), le prix de l'option est alors supérieur à :

$$S(t_n) - D_n - Ke^{-r(T-t_n)}$$

Ce qui conduit à dire que si :

$$S(t_n) - D_n - Ke^{-r(T-t_n)} \geqslant S(t_n) - K$$

c'est-à-dire :

$$D_n \leqslant K\left(1 - e^{-r(T-t_n)}\right) \tag{13.24}$$

il n'est alors pas optimal d'exercer cette option à l'instant t_n.

D'un autre côté, si :

$$D_n > K\left(1 - e^{-r(T-t_n)}\right) \tag{13.25}$$

il est possible de montrer qu'exercer l'option à l'instant t_n, si la valeur de $S(t_n)$ est suffisamment élevée, est optimal, quelles que soient les hypothèses (raisonnables) émises sur le processus stochastique suivi par le cours de l'action. L'inégalité (13.25) tendra donc à être vérifiée quand la date de détachement du dernier dividende est proche de l'échéance de l'option et quand le montant du dividende est important.

Considérons maintenant l'instant t_{n-1} auquel l'avant-dernier dividende est détaché. Si l'option est exercée en t_{n-1}, l'investisseur reçoit alors :

$$S(t_{n-1}) - K$$

Si l'option n'est pas exercée en t_{n-1},le cours de l'action diminue et devient $S(t_{n-1}) - D_{n-1}$. L'exercice ultérieur le plus rapproché de l'option considérée est alors t_n. L'équation (9.5) fournit la borne inférieure suivante pour le prix de l'option, dans le cas où elle n'est pas exercée en t_{n-1} :

$$S\left(t_{n-1}\right) - D_{n-1} - Ke^{-r(t_n - t_{n-1})}$$

Ceci conduit à dire que si :

$$S\left(t_{n-1}\right) - D_{n-1} - Ke^{-r(t_n - t_{n-1})} \geqslant S\left(t_{n-1}\right) - K$$

soit :

$$D_{n-1} \leqslant K\left(1 - e^{-r(t_n - t_{n-1})}\right)$$

il n'est alors pas optimal d'exercer l'option en t_{n-1}.

De même, pour tout $i < n$, si :

$$D_i \leqslant K\left(1 - e^{-r(t_{i+1} - t_i)}\right) \tag{13.26}$$

il n'est pas optimal d'exercer à la date t_i.

L'inégalité (13.26) est approximativement équivalente à :

$$D_i \leqslant Kr\left(t_{i+1} - t_i\right)$$

Si nous émettons l'hypothèse selon laquelle K est relativement proche du cours de l'action, il faudrait alors que le taux de dividende soit proche ou supérieur au taux sans risque pour que cette inégalité ne soit pas vérifiée. C'est rarement le cas.

Nous pouvons conclure de cette analyse que, dans la plupart des cas, le seul moment où l'exercice anticipé d'une option d'achat américaine peut être envisagé est à la date précédant juste le détachement du dernier dividende, en t_n. Cependant, si l'inégalité (13.26) est vérifiée pour les valeurs de $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, et si l'inégalité (13.24) est également vérifiée, alors nous pouvons être sûr qu'un exercice prématuré de cette option n'est jamais optimal.

L'approximation de Black

Black propose une procédure d'approximation qui tient compte des possibilités d'exercice anticipé d'un call[11]. Elle implique de calculer, comme nous l'avons expliqué auparavant, les valeurs des options européennes dont les échéances sont T et t_n. On définit alors la valeur de l'option américaine comme étant la plus grande de ces deux valeurs[12].

■ **Exemple 13.8**

Revenons à la situation de l'exemple 13.7, mais supposons que l'option est cette fois de type américain et non plus européen. Dans ce cas, $D_1 = D_2 = 0{,}5$, $S_0 = 40$, $K = 40$, $r = 0{,}09$, $t_1 = 2/12$ et $t_2 = 5/13$. Puisque :

$$K\left(1 - e^{-r(t_2-t_1)}\right) = 40\left(1 - e^{-0{,}09\times0{,}25}\right) = 0{,}89$$

est supérieur à 0,5, on en déduit (d'après l'inégalité (13.26)) que l'option ne devra jamais être exercée juste avant la date de détachement du premier dividende. De plus, comme :

$$K\left(1 - e^{-r(T-t_2)}\right) = 40\left(1 - e^{-0{,}09\times0{,}0833}\right) = 0{,}30$$

est inférieur à 0,5 (d'après l'inégalité (13.25)), il s'ensuit que, à condition d'être suffisamment dans la monnaie, l'option devra être exercée juste avant la date de détachement du deuxième dividende.

La valeur actuelle du premier dividende est égale à :

$$0{,}5.e^{-0{,}1667\times0{,}09} = 0{,}4926$$

La valeur de l'option, dont l'échéance se situe juste avant celle du détachement du dernier dividende, peut être calculée par la formule de Black et Scholes avec $S_0 = 39{,}5074$, $K = 40$, $r = 0{,}09$, $\sigma = 0{,}30$ et $T = 0{,}4167$. Elle est alors égale à 3,52 €. L'approximation de Black consiste à prendre la plus grande des valeurs de l'option entre cette dernière (correspondant à un exercice anticipé) et celle qui correspond à une échéance à la fin des six mois (option de type européen). Nous savons, grâce à l'exemple 13.7, que celle-ci est de 3,67 €. L'approximation de Black permet donc d'estimer la valeur de l'option américaine à 3,67 €.

La valeur de l'option fournie par la formule de Roll, Geske et Whaley (RGW) est égale à 3,72 €. Deux raisons expliquent les différences entre la formule de RGW et l'approximation de Black (AB) : la première concerne les dates des décisions d'exercice anticipé et tend à augmenter la valeur calculée par RGW par

11. Voir F. Black, « Fact and Fantasy in the Use of Options », *Financial Analysts Journal*, 31 (juillet/août 1975), 36-41, 61-72.

12. Cette approximation semble bien fonctionner dans la plupart des cas. Une procédure plus précise est proposée par Roll (1977), Geske (1979) et Whaley (1981) (voir note technique n° 4 sur le site de l'éditeur : www.pearsoneducation.fr). Elle fait intervenir la fonction de répartition d'une loi normale bivariée dont le calcul est donné dans la note technique n° 5 sur le site de l'éditeur.

rapport à celle de l'AB. Dans l'AB, le porteur de l'option décide aujourd'hui s'il exercera dans cinq mois ou dans six mois ; alors que dans RGW l'investisseur prend sa décision au cinquième mois, en fonction du cours du sous-jacent atteint à ce moment-là. La seconde vient de l'hypothèse sur la volatilité ; elle tend à augmenter la valeur de l'AB par rapport à celle de RGW. Dans l'AB, lorsque nous supposons un exercice de l'option après cinq mois, la volatilité s'applique au cours de l'action moins la valeur actuelle du premier dividende détaché. Lorsque nous supposons un exercice de l'option au bout de six mois, la volatilité s'applique au cours de l'action moins la valeur actuelle des deux dividendes détachés. Dans RGW, la volatilité est toujours appliquée au cours de l'action moins la valeur actuelle des deux dividendes.

Résumé

Nous avons débuté ce chapitre par l'examen des propriétés du processus suivi par le cours des actions, tel que nous l'avions introduit au chapitre 12. Ce processus implique que le cours des actions à une date future donnée, conditionnée par la valeur de l'action aujourd'hui, suit une loi log-normale. Il implique également que la rentabilité de l'action pour une période de temps donnée, calculée en taux composé continu, suit une distribution normale. L'incertitude quant à la valeur future de l'action augmente avec l'horizon temporel. L'écart-type du logarithme du cours de l'action est en fait proportionnel à la racine carrée de l'horizon considéré.

Pour estimer la volatilité, σ, du cours d'une action de façon empirique, le cours est observé selon une périodicité régulière (par exemple, chaque jour, chaque semaine ou chaque mois). Pour chaque période, on calcule le logarithme népérien du ratio : cours de l'action à la fin de la période sur cours de l'action au début de la période. La volatilité est estimée par l'écart-type de ces résultats, divisé par la racine carrée de la longueur de la période (définie en années). Généralement, les jours où la Bourse est fermée sont ignorés pour le calcul de la volatilité.

L'équation aux dérivées partielles, vérifiée par la valeur de tout actif dérivé dont le sous-jacent est une action, peut être obtenue par la création d'une position sans risque en actif dérivé et en actions. Puisque la valeur du produit dérivé et le cours de l'action dépendent tous deux de la même source d'incertitude, une telle position peut toujours être réalisée. Cette position ne demeure sans risque que durant une très courte période de temps. Néanmoins, la rentabilité d'une position sans risque doit toujours être égale au taux sans risque s'il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage.

L'espérance de rentabilité de l'action n'intervient pas dans l'EDP de Black et Scholes. La méthode d'évaluation risque-neutre établit que lorsqu'un produit dérivé sur action est évalué, il est possible de se placer dans un univers risque-neutre. L'espérance de rentabilité de l'action est alors égale au taux sans risque et il suffit d'actualiser les payoffs à ce taux. Les formules de Black et Scholes pour les options européennes peuvent être obtenues soit en résolvant l'EDP, soit en utilisant l'évaluation risque-neutre.

La volatilité implicite est la volatilité qui, lorsqu'elle est utilisée dans la formule d'évaluation de Black et Scholes, fournit le prix de marché de l'option. Les traders surveillent les volatilités implicites et utilisent fréquemment celles qui sont calculées à partir des options liquides pour évaluer les options moins liquides portant sur les mêmes sous-jacents. Les résultats empiriques montrent que la volatilité d'une action est plus élevée lorsque la Bourse est ouverte que lorsqu'elle est fermée. Cela suggère que ce sont les échanges eux-mêmes qui engendrent une grande part de la volatilité.

Les résultats de Black et Scholes peuvent être étendus aux calls et aux puts européens sur des actions versant des dividendes. La procédure consiste à utiliser la formule de Black et Scholes en réduisant le cours de l'action de la valeur anticipée des dividendes versés durant la vie de l'option. La volatilité est, quant à elle, égale à la volatilité du cours de l'action dont on a déduit la valeur actuelle de ces dividendes.

En théorie, les calls américains sont susceptibles d'être exercés prématurément, juste avant la date de détachement d'un quelconque dividende. En pratique, seule la date de détachement du dernier dividende nécessite d'être étudiée. Fischer Black a suggéré une méthode d'approximation. Celle-ci consiste à définir la valeur du call américain comme la plus grande des valeurs de deux calls européens. Le premier a la même date d'échéance que le call américain ; le second a une date d'échéance égale à celle qui précède juste la date de détachement du dernier dividende.

Références complémentaires

Concernant la distribution des variations de cours d'action

BLATTBERG R. et N. GONEDES, « A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices », *Journal of Business*, 47 (avril 1974), 244-80.

FAMA E. F., « The Behavior of Stock Prices », *Journal of Business*, 38 (janvier 1965), 34-105.

KO S. J., « Models of Stock Returns-A Comparison », *Journal of Finance*, 39 (mars 1984), 147-65.

RICHARDSON M. et T. SMITH, « A Test for Multivariate Normality in Stock Returns », *Journal of Business*, 66 (1993), 295-321.

Concernant l'analyse de Black et Scholes

BLACK F., « Fact and Fantasy in the Use of Options », *Financial Analysts Journal*, 31 (juillet/août 1975), 36-41, 61-72.

BLACK F., « How we came up with the Option Pricing Formula », *Journal of Portfolio Management*, 15, 2 (1989), 4-8.

BLACK F. et M. SCHOLES, « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, 81 (mai/juin 1973), 637-59.

MERTON R. C., « Theory of Rational Option Pricing », *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (printemps 1973), 141-183.

Concernant l'évaluation risque-neutre

Cox J. C. et S. A. Ross, « The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes », *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), 145-66.

Smith C. W., « Option Pricing : A Review », *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), 3-54.

Concernant les modèles d'évaluation des options d'achat américaines

Geske R., « Comments on Whaley's Note », *Journal of Financial Economics*, 9 (juin 1981), 213-15.

Geske R., « A Note on an Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends », *Journal of Financial Economics*, 7 (1979), 375-80.

Roll R., « An Analytical Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends », *Journal of Financial Economics*, 5 (1977), 251-58.

Whaley R., « On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends », *Journal of Financial Economics*, 9 (1981), 207-11.

Concernant les causes de la volatilité

Fama E. E., « The Behavior of Stock Market Prices », *Journal of Business*, 38 (janvier 1965), 34-105.

French K. R., « Stock Returns and the Weekend Effect », *Journal of Financial Economics*, 8 (mars 1980), 55-69.

French K. R. et R. Roll, « Stock Return Variances : The Arrival of Information and the Reaction of Traders », *Journal of Financial Economics*, 17 (septembre 1986), 5-26.

Roll R., « Orange Juice and Weather », *American Economic review*, 74, 5 (décembre 1984), 861-80.

Problèmes et exercices

13.1 Que suppose le modèle d'évaluation de Black et Scholes à propos de la distribution de probabilité du cours de l'action sur une année ? Que suppose-t-il à propos du taux de rentabilité composé continu des actions sur l'année ?

13.2 La volatilité d'un cours d'action est de 30 % par an. Quel est l'écart-type du pourcentage de variation sur un jour de cotation ?

13.3 Expliquez le principe de l'évaluation risque-neutre.

13.4 Calculez la valeur d'un put européen à 3 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes avec un prix d'exercice de 50 €, alors que le cours actuel de l'action est de 50 €. Le taux sans risque est de 10 % par an et la volatilité est de 30 % par an.

13.5 Comment modifiez-vous les calculs de l'exercice 13.4 si un dividende de 1,50 € est attendu dans deux mois ?

13.6 Qu'est-ce que la volatilité implicite ? Comment peut-elle être calculée ?

13.7 Une action est actuellement cotée 40 €. Supposez que son espérance de rentabilité soit de 15 % et que la volatilité soit de 25 %. Quelle est la distribution de probabilité suivie par le taux de rentabilité (en taux composé continu) sur une période de deux ans ?

13.8 Un cours d'action suit un mouvement brownien géométrique avec une espérance de rentabilité de 16 % et une volatilité de 35 %. Le cours actuel est de 38 €.

a. Quelle est la probabilité qu'un call européen sur cette action, avec un prix d'exercice de 40 € et une échéance à 6 mois, soit exercé ?

b. Quelle est la probabilité qu'un put européen sur cette action, avec le même prix d'exercice et la même échéance, soit exercé ?

13.9 En reprenant les notations de ce chapitre, démontrez qu'un intervalle de confiance à 95 % pour S_T est compris entre :

$$S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T-1{,}96\sigma\sqrt{T}}$$

et

$$S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T+1{,}96\sigma\sqrt{T}}$$

13.10 Un gestionnaire de portefeuille annonce que la moyenne des rentabilités réalisées chaque année sur les 10 dernières années est de 20 % par an. En quoi cette annonce peut-elle être trompeuse ?

13.11 Supposons qu'une action ne versant pas de dividendes ait une espérance de rentabilité μ et une volatilité σ. Une institution financière innovante vient d'annoncer qu'un titre allait être coté, qui verserait à l'échéance un montant en euros égal à $\ln(S_T)$ à la date T, avec S_T représentant la valeur de l'action à la date T.

a. Utilisez l'évaluation risque-neutre pour calculer la valeur de ce titre à la date t, en fonction du cours de l'action en t, noté S.

b. Vérifiez que votre résultat satisfait l'EDP (13.16).

13.12 Soit un produit dérivé qui verse à l'échéance T un montantS_T^n, avec S_T le cours de l'action à cette date. Lorsque ce cours suit un mouvement brownien géométrique, sa valeur, en t $(t = T)$, est de la forme :

$$h(t,T)S^n$$

où S est le cours de l'action en t et h est une fonction de t et de T uniquement.

a. Par substitution dans l'équation différentielle de Black et Scholes, exprimez l'équation différentielle ordinaire vérifiée par $h(t,T)$.

b. Quelle est la condition aux bornes pour l'équation différentielle de $h(t,T)$?

c. Montrez que :

$$h(t,T) = e^{\left[0{,}5\sigma^2 n(n-1)+r(n-1)\right](T-t)}$$

où r est le taux sans risque et σ est la volatilité de l'action.

13.13 Quelle est la valeur d'un call européen sur une action ne versant pas de dividendes lorsque le cours de l'action est de 52 €, le prix d'exercice de 50 €, le taux d'intérêt sans risque de 12 % par an, la volatilité de 30 % par an et l'échéance à 3 mois ?

13.14 Quelle est la valeur d'un put européen sur une action ne versant pas de dividendes lorsque le cours de l'action est de 69 €, le prix d'exercice de 70 €, le taux d'intérêt sans risque de 5 % par an, la volatilité de 35 % par an et l'échéance à 6 mois ?

13.15 Soit un call américain sur une action actuellement cotée 70 € ; l'échéance de l'option est dans huit mois, le taux sans risque est de 10 % par an, le prix d'exercice de 65 € et la volatilité de 32 %. Un dividende de 1 € est attendu dans trois mois, puis de nouveau dans six mois. Montrez qu'il n'est jamais optimal d'exercer l'option à aucune de ces deux dates de versement des dividendes. Utilisez DerivaGem pour calculer la valeur de l'option.

13.16 Un call sur une action ne versant pas de dividendes est coté 2,50 € sur le marché. Le cours de l'action est de 15 €, le prix d'exercice de 13 €, l'échéance à 3 mois et le taux sans risque de 5 % par an. Quelle est la volatilité implicite ?

13.17 En utilisant les notations de ce chapitre :

a. Que représente $N'(x)$?

b. Montrez que $SN'(d_1) = Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)$, où S est le cours de l'action en t et :

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r + \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + \left(r - \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

c. Calculez $\partial d_1/\partial S$ et $\partial d_2/\partial S$.

d. Montrez que, quand $c = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$, on a :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -rKe^{-r.(T-t)}N(d_2) - SN'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

e. Montrez que $\partial c/\partial S = N(d_1)$.

f. Montrez que c satisfait l'équation différentielle de Black et Scholes.

g. Montrez que c satisfait la condition aux bornes d'un call européen, c'est-à-dire que $c = \max(S - K\ ;\ 0)$ lorsque t tend vers T.

13.18 Montrez que les formules de Black et Scholes pour les options d'achat et de vente satisfont la parité call-put.

13.19 Une action est actuellement cotée 50 € et le taux d'intérêt sans risque est de 5 %. Utilisez le logiciel DerivaGem pour convertir le tableau suivant concernant des calls européens en un tableau des volatilités implicites. Vous supposerez qu'il n'y a aucun versement de dividendes.

Prix d'exercice (en €)	Maturité (en mois)		
	3	6	12
45	7,0	8,3	10,5
50	3,7	5,2	7,5
55	1,6	2,9	5,1

Les valeurs des options valident-elles le modèle de Black et Scholes ?

13.20 Expliquez en détail pourquoi l'approche de Black pour évaluer un call américain sur une action versant des dividendes peut donner une réponse approximative seulement, même lorsqu'un seul dividende est anticipé. Est-ce que le résultat fourni par l'approche de Black surévalue ou sous-évalue l'option ? Justifiez votre réponse.

13.21 Soit un call américain sur une action cotée 50 € ; l'échéance est à 15 mois, le taux sans risque est 8 % par an, le prix d'exercice 55 € et la volatilité 25 %. Des dividendes de 1,50 € sont attendus au bout de 4 mois et au bout de 10 mois. Montrez qu'il n'est jamais optimal d'exercer l'option à aucune de ces deux dates de versement de dividendes. Calculez la valeur de l'option.

13.22 Montrez que la probabilité qu'un call européen soit exercé dans un univers risque-neutre est $N(d_2)$. Donnez une expression pour la valeur d'un produit dérivé qui verserait 100 € à l'échéance si le cours de l'action à la date T est plus élevé que K.

13.23 Montrez que S^{-2r/σ^2} pourrait être la valeur d'un titre coté.

13.24 Une entreprise a émis des stock-options La dilution doit-elle être prise en compte dans l'évaluation des options ? Justifiez votre réponse.

13.25 Le prix d'une action d'une société est de 50 € et 10 millions d'actions sont en circulation. Cette société envisage de donner à ses employés trois millions d'options à la monnaie sur ses propres actions. L'exercice des options donnera lieu à l'émission d'actions nouvelles. La volatilité de la rentabilité de l'action est de 25 %, le taux sans risque à 5 ans est de 5 % et l'entreprise ne paie pas de dividendes. Estimez le coût d'émission de ces options pour l'entreprise.

Questions complémentaires

13.26 Le cours d'une action est actuellement de 50 €. L'espérance de rentabilité de l'action est 18 % et sa volatilité est 30 %. Quelle est la distribution de

probabilité pour le cours de l'action dans deux ans ? Calculez la moyenne et l'écart-type de cette distribution. Déterminez un intervalle de confiance à 95 %.

13.27 Supposons que les observations du cours d'une action (en €) à la fin de 15 semaines consécutives soient les suivantes :

30,2 ; 32,0 ; 31,1 ; 30,1 ; 30,2 ; 30,3 ; 30,6 ; 33,0 ; 32,9 ; 33,0 ; 33,5 ; 33,5 ; 33,7 ; 33,5 ; 33,2

Estimez la volatilité du cours de l'action. Quelle est l'erreur type de votre estimation ?

13.28 Une institution financière planifie d'offrir un titre qui verse à l'échéance un montant en euros égal à S_T^2 à la date T.

a. Utilisez l'évaluation risque-neutre pour calculer la valeur de ce titre à la date t en fonction du cours de l'action S en t. (Conseil : l'espérance de la valeur de S_T^2 peut être calculée à partir de la moyenne et de la variance de S_T donnée à la section 13.1.)

b. Confirmez que cette valeur satisfait l'EDP (13.16).

13.29 Soit une option sur une action ne versant pas de dividendes et cotée actuellement 30 € ; le prix d'exercice est de 29 €, le taux sans risque annuel de 5 %, la volatilité de 25 % par an et l'échéance à 4 mois.

a. Quelle est la valeur de l'option s'il s'agit d'un call européen ?

b. Quelle est la valeur de l'option s'il s'agit d'un call américain ?

c. Quelle est la valeur de l'option s'il s'agit d'un put européen ?

d. Vérifiez que la parité call-put est satisfaite.

13.30 Supposons que l'action de l'exercice précédent (13.29) verse un dividende de 0,50 € qui sera détaché au bout d'un mois et demi.

a. Quelle est la valeur de l'option s'il s'agit d'un call européen ?

b. Quelle est la valeur de l'option s'il s'agit d'un put européen ?

c. Si l'option est un call américain, un exercice prématuré peut-il être optimal ?

13.31 Soit un call américain sur une action cotée 18 € ; le prix d'exercice est de 20 €, l'échéance à 6 mois, la volatilité de 30 % par an et le taux sans risque de 10 %. Deux versements de dividende de même montant sont attendus au cours de la vie de l'option, et les dates de détachement de ces dividendes sont situées dans deux mois et dans cinq mois. Le montant de chaque dividende est 0,40 €. Utilisez l'approximation de Black et le logiciel DerivaGem pour évaluer l'option. Jusqu'à quel montant le dividende peut-il s'élever sans que la valeur de l'option américaine soit supérieure à celle de l'option européenne correspondante ?

Annexe

Démonstration de la formule de Black-Scholes-Merton

Nous allons démontrer le résultat de Black et Scholes en étudiant tout d'abord un autre résultat fondamental dont l'utilité sera confirmée dans les chapitres à venir.

Le résultat fondamental

Si V suit une loi log-normale et si s désigne l'écart-type de $\ln(V)$, alors :

$$E\left[\max\left(V-K;0\right)\right]=E(V)N(d_1)-KN(d_2) \tag{13A.1}$$

où :

$$d_1=\frac{\ln\left[E\left(V\right)/K\right]+s^2/2}{s}$$

$$d_2=\frac{\ln\left[E\left(V\right)/K\right]-s^2/2}{s}$$

et E désigne l'espérance mathématique.

Démonstration de ce résultat

Notons $g(V)$ la fonction de densité de probabilité de V ; on a alors :

$$E\left[\max\left(V-K;0\right)\right]=\int_K^{+\infty}\left(V-K\right)g\left(V\right)dV \tag{13A.2}$$

La variable $\ln V$ est distribuée selon une loi normale d'écart-type s. Grâce aux propriétés de la distribution log-normale, la moyenne de $\ln V$ est égale à m, où[13] :

$$m=\ln[E(V)]-s^2/2 \tag{13A.3}$$

Procédons au changement de variable :

$$Q=\frac{\ln\left(V\right)-m}{s} \tag{13A.4}$$

Cette variable est gaussienne centrée-réduite. Notons $h(Q)$ la fonction de densité de Q, définie par :

$$h\left(Q\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-Q^2/2}$$

En utilisant l'équation (13A.4) pour transformer le membre de droite de l'équation (13A.2) en intégrale par rapport à Q au lieu de V, nous obtenons :

$$E\left[\max\left(V-K;0\right)\right]=\int_{(\ln(K)-m)/s}^{+\infty}\left(e^{Qs+m}-K\right)h\left(Q\right)dQ$$

13. Pour une démonstration de ce point, voir la note technique n° 2 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr).

ou encore :

$$E\left[\max\left(V-K;0\right)\right]=\int_{\left(\ln(K)-m\right)/s}^{+\infty}e^{Qs+m}h\left(Q\right)dQ-K\int_{\left(\ln(K)-m\right)/s}^{+\infty}h\left(Q\right)dQ \tag{13A.5}$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned} e^{Qs+m}h\left(Q\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\left(-Q^2+2Qs+2m\right)/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\left[-(Q-s)^2+2m+s^2\right]/2} \\ &= \frac{e^{m+\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}e^{\left[-(Q-s)^2\right]/2} \\ &= e^{m+\frac{s^2}{2}}h\left(Q-s\right) \end{aligned}$$

L'équation (13A.5) devient alors :

$$E\left[\max\left(V-K;0\right)\right]=e^{m+\frac{s^2}{2}}\int_{\left(\ln(K)-m\right)/s}^{+\infty}h\left(Q-s\right)dQ-K\int_{\left(\ln(K)-m\right)/s}^{+\infty}h\left(Q\right)dQ \tag{13A.6}$$

Si on note $N(x)$ la probabilité qu'une variable normale centrée-réduite soit inférieure à x, la première intégrale de l'équation (13A.6) est égale à :

$$1-N\left[\left(\ln\left(K\right)-m\right)/s-s\right]$$

ou encore :

$$N\left[\left(-\ln\left(K\right)+m\right)/s+s\right]$$

En substituant à m son expression déduite de l'équation (13A.3), nous obtenons :

$$N\left(\frac{\ln\left[E\left(V\right)/K\right]+s^2/2}{s}\right)=N(d_1)$$

De même, la seconde intégrale de l'équation (13A.6) est $N(d_2)$. L'équation (13A.6) devient donc :

$$E\left[\max\left(V-K;0\right)\right]=e^{m+\frac{s^2}{2}}N(d_1)-KN(d_2)$$

En substituant à nouveau à m son expression d'après l'équation (13A.3), nous obtenons le résultat fondamental que nous souhaitions démontrer.

La formule de Black-Scholes-Merton

Considérons à présent un call d'échéance T sur une action ne versant pas de dividendes. Le prix d'exercice est K, le taux sans risque r, le cours de l'action S_0 et la volatilité σ. Comme nous l'avons montré dans l'équation (13.22), la valeur du call, c, est donnée par :

$$c=e^{-rT}\hat{E}\left[\max\left(S_T-K;0\right)\right] \tag{13A.7}$$

où S_T est le cours de l'action à la date T et $\hat{E}$ l'opérateur d'espérance mathématique dans l'univers risque-neutre. Selon l'hypothèse de Black et Scholes concernant le processus stochastique suivi par le cours de l'action, S_T suit une loi log-normale. Ainsi,

à partir des équations (13.3) et (13.4), $\hat{E}(S_T) = S_0 e^{rT}$ et l'écart-type de $\ln S_T$ est $\sigma\sqrt{T}$.

Grâce au résultat démontré ci-avant, l'équation (13A.7) implique que :

$$c = e^{-rT}\left[S_0 e^{rT} N(d_1) - KN(d_2)\right]$$

ou encore :

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

avec :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left[\hat{E}\left(S_T\right)/K\right] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln\left(S_0/K\right) + \left(r + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\ln\left[\hat{E}\left(S_T\right)/K\right] - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln\left(S_0/K\right) + \left(r - \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

Chapitre 14

Les options sur indices, devises et contrats futures

Ce chapitre est consacré à l'évaluation des options sur indices, sur devises et sur contrats futures. En premier lieu, nous considérons les options européennes sur actions quand le taux de dividende est connu. Nous expliquons ensuite que les indices, les devises et les futures peuvent être assimilés à des actions versant un taux de dividende connu. Cette remarque permet d'appliquer à d'autres types de supports les premiers résultats obtenus dans les chapitres précédents pour les options sur actions.

14.1 Cas d'une action versant un taux de dividende connu

Quelle est la différence entre une action qui verse un taux de dividende annuel q et une autre action identique qui ne verse pas de dividendes ? Les deux titres procurent le même profit global (incluant dividendes et gain en capital). Cependant, le détachement d'un dividende entraîne une baisse du cours égale au montant de ce dividende. Le paiement d'un taux de dividende q induit donc un taux de croissance du cours de l'action diminué de q par rapport à ce qu'il serait sans dividende. Si, avec un taux de dividende q, le cours de l'action passe de S_0 à S_T entre 0 et T, alors, en l'absence de dividendes et toutes choses égales par ailleurs, il passerait de S_0 à $S_T e^{qT}$.

Ce raisonnement montre que la valeur de l'action suit la même loi de probabilité à la date T pour chacun de ces deux cas suivants :

1. La valeur initiale de l'action est S_0 et elle verse un dividende au taux q.
2. La valeur initiale de l'action est $S_0 e^{-qT}$ et elle ne verse aucun dividende.

Une règle simple en découle : pour évaluer une option européenne d'échéance T sur une action versant un taux de dividende connu et égal à q, il suffit de réduire la valeur de l'action à S_0e^{-qT} et de procéder ensuite comme si elle ne versait pas de dividendes.

Les bornes inférieures de la valeur des options

La remarque précédente permet de déterminer simplement les bornes inférieures de la valeur d'une option européenne sur une action payant un taux de dividende q. Il suffit de remplacer S_0 par S_0e^{-qT} dans l'équation (9.1) et l'on obtient :

$$c \geqslant \max(S_0e^{-qT} - Ke^{-rT} \,; 0) \tag{14.1}$$

Pour obtenir la limite inférieure du prix du put européen, on procède à la même substitution dans l'équation (8.2), ce qui donne :

$$p \geqslant \max(Ke^{-rT} - S_0e^{-qT} \,; 0) \tag{14.2}$$

Ces résultats peuvent également être montrés directement en utilisant l'hypothèse d'absence d'arbitrage (voir exercice 14.36).

La parité call-put

En substituant S_0e^{-qT} à S_0 dans l'équation (9.3), une relation de parité call-put est obtenue pour une action versant un taux de dividende q :

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0e^{-qT} \tag{14.3}$$

Ce résultat peut également être montré directement en utilisant l'hypothèse d'absence d'arbitrage (voir exercice 14.36).

14.2 Les formules d'évaluation

Les valeurs des calls et puts européens se déduisent du remplacement de S_0 par S_0e^{-qT} dans les équations (13.20) et (13.21) :

$$c = S_0e^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{14.4}$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0e^{-qT}N(-d_1) \tag{14.5}$$

Puisque :

$$\ln\left(\frac{S_0e^{-qT}}{K}\right) = \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) - qT$$

d_1 et d_2 sont alors égaux à :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Ces résultats sont dus à Merton[1]. Comme nous l'avons expliqué à la section 13.12, le terme « dividende » peut être défini comme la réduction de la valeur de l'action à la date de détachement du dividende. Si le taux de dividende n'est pas constant au cours de la vie de l'option, les équations (14.4) et (14.5) restent vérifiées si q est égal à la moyenne annualisée du taux de dividende durant la vie de l'option.

L'évaluation risque-neutre

Pour démontrer formellement les égalités (14.4) et (14.5), on peut soit résoudre l'EDP que le prix d'une option doit satisfaire, soit passer dans l'univers risque-neutre. Quand on introduit un taux de dividende q, dans l'analyse de la section 13.6, l'équation (13.16) devient[2] :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q)\,S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \tag{14.6}$$

Comme l'équation (13.16), celle-ci n'est affectée par aucune variable dépendant de l'attitude des investisseurs envers le risque, à l'exception du prix de l'action qui intègre déjà cet élément. Par conséquent, la procédure d'évaluation risque-neutre, décrite à la section 13.7, reste valide. Dans un univers de neutralité face au risque, le rendement total de l'action doit être égal à r, le taux sans risque. Avec un taux de dividende q, l'espérance du taux de croissance du prix de l'action doit être égale à $(r - q)$. Le processus risque-neutre du prix de l'action est alors :

$$dS = (r - q)Sdt + \sigma Sdz$$

Pour évaluer un produit dérivé qui dépend d'une action versant un taux de dividende q, il suffit donc de considérer un taux de croissance du prix de l'action égal à $(r - q)$; on actualise ensuite l'espérance du payoff au taux r. Cette approche s'applique en particulier à l'évaluation de calls européens, en notant $S_0 e^{(r-q)T}$ l'espérance de la valeur de l'action à la date T. Un raisonnement analogue à celui utilisé dans l'annexe du chapitre 13 conduit à écrire l'espérance du payoff du call à la date T sous la forme :

$$e^{(r-q)T} S_0 N(d_1) - KN(d_2)$$

où d_1 et d_2 sont définis comme précédemment. Actualiser au taux r sur la période allant jusqu'à l'échéance T conduit à l'équation (14.4).

1. Voir R. Merton, « Theory of Rational Option Pricing », *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (printemps 1973), 141-83.

2. Voir la note technique n° 6 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr) pour une démonstration.

Les arbres binomiaux

Quel est l'effet d'un taux de dividende égal à q sur le modèle binomial développé au chapitre 11 ? La rentabilité procurée par l'action dans l'univers risque-neutre doit être égale au taux sans risque, r. Les dividendes procurent un rendement égal à q. La rentabilité liée à la valorisation du capital doit donc être égale à $(r - q)$. Par conséquent, p doit satisfaire :

$$pS_0u + (1 - p)S_0d = S_0e^{(r-q)T}$$

ou encore :

$$p = \frac{e^{(r-q)T} - d}{u - d}$$

C'est l'équation déjà utilisée à la section 11.9. La valeur du produit dérivé est ici encore l'espérance du payoff dans l'univers risque-neutre, actualisée au taux sans risque, c'est-à-dire : $f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$ si f est le prix de l'actif dérivé en date 0 et f_u, f_d sont les payoffs de cet actif en date T.

14.3 Les options sur indices

Les options sur indices se négocient à la fois sur les marchés de gré à gré et sur les marchés organisés. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 8, certains indices reproduisent les variations de l'ensemble du marché, d'autres sont fondés sur les performances d'un secteur en particulier (mines, technologies, etc.).

Les cotations

La plupart des grands indices sont supports de contrats d'options. On peut citer pour les marchés américains : le Dow Jones Industrial Average (DJX), le Nasdaq (NDX), le Russell 2000 (RUS), le S&P100 (OEX) et le S&P500 (SPX). Les options sur ces indices sont échangées sur le Chicago Board Options Exchange et toutes sont européennes, excepté celles qui portent sur le S&P100, qui sont américaines. Sur le MONEP, les options sur indices les plus échangées portent sur le CAC 40 et les indices DJ Stoxx. Le tableau 14.1 donne un exemple de cotations d'options sur indice. Dans la première colonne apparaît l'intitulé du contrat, précisant le type d'option (C pour call et P pour put), l'échéance (janvier 2007), les cours, plus haut, plus bas, de clôture et de compensation.

Un contrat d'option sur indice porte en général sur un multiple de l'indice (1 fois, 10 fois ou 100 fois selon le marché) ; dans le cas du CAC 40 c'est une fois l'indice, et pour le S&P500, cent fois l'indice. Les options sur indices sont, pour des raisons techniques évidentes, dénouées en cash. À l'exercice de l'option, le détenteur d'un call reçoit donc le montant $S - K$ versé par le vendeur de l'option ; S représente ici la valeur de l'indice à la clôture du jour d'exercice, et K est le prix d'exercice. Pareillement, le détenteur d'un put reçoit $K - S$, versé par le vendeur de l'option.

Tableau 14.1 : Exemples de cotations d'options sur l'indice INDX

Intitulé	+ haut	+ bas	Clôture	Compensation
INDX	3617,52	3567,49	3612,55	
C 30 jan 3 700	15,60	9,10	15,60	11,24
C 30 jan 3 650	31,50	20,00	31,00	31,00
C 30 jan 3 600	56,70	39,00	55,00	41,46
P 30 jan 3 500	23,00	16,00	16,00	22,96
P 30 jan 3 650	81,20	69,00	70,00	90,34

La plupart des options sur indices ont une échéance relativement courte, mais il existe aussi des options de plus long terme, connues sous le sigle LEAPS (*Long-Term Equity Anticipation Securities*) sur le Chicago Board Options Exchange (CBOE). Les LEAPS sont des options négociables dont la maturité n'excède pas trois ans. La valeur de l'indice est divisée par cinq, de même que le prix d'exercice pour la définition des contrats. Dans ce cas, un contrat est une option portant sur 100 fois un cinquième de l'indice (ou 20 fois l'indice). Les LEAPS sur indices ont leurs dates d'échéance en décembre. Le CBOE, comme bien d'autres marchés, propose des LEAPS sur de nombreuses actions individuelles. Leurs dates d'échéance sont alors en janvier. Sur le MONEP, il existe aussi des options longues sur le CAC 40. Les maturités vont jusqu'à quatre ans par échéances semestrielles et le contrat porte, comme pour les options de court terme, sur une fois l'indice. Une description détaillée de ces contrats est disponible sur le site du MONEP (www.monep.fr).

Exemple 14.1

Soit un call européen sur le S&P500 dont l'échéance est dans 2 mois ; la valeur actuelle de l'indice est de 930, le prix d'exercice est de 900, le taux d'intérêt sans risque est de 8 % par an et la volatilité de l'indice est de 20 % par an. Des rendements en dividende de 0,2 % et 0,3 % sont attendus respectivement pour le premier et le second mois. Dans ce cas, $S_0 = 930$, $K = 900$, $r = 0{,}08$, $\sigma = 0{,}2$ et $T = 2\ /\ 12$. Le rendement en dividende total durant la vie de l'option est de $0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$ %, c'est-à-dire 3 % par an. Puisque $q = 0{,}03$ et que :

$$d_1 = \frac{\ln(930/900) + \left(0{,}08 - 0{,}03 + 0{,}2^2/2\right) \times 2/12}{0{,}2\sqrt{2/12}} = 0{,}5444$$

$$d_2 = \frac{\ln(930/900) + \left(0{,}08 - 0{,}03 - 0{,}2^2/2\right) \times 2/12}{0{,}2\sqrt{2/12}} = 0{,}4628$$

$$N(d_1) = 0{,}7069, \quad N(d_2) = 0{,}6782$$

la valeur du call, c, est donnée par l'équation (14.4).

$$c = 930 \times 0{,}7069e^{-0{,}03\times 2/12} - 900 \times 0{,}6782e^{-0{,}08\times 2/12} = 51{,}83$$

Un contrat de call coûte donc 5 183 $ puisqu'il porte sur 100 fois l'indice.

L'assurance de portefeuille

Les gestionnaires de portefeuille peuvent utiliser les options sur indices pour limiter leurs risques de perte. Supposons que la valeur d'un indice soit aujourd'hui S_0 et considérons le gestionnaire d'un portefeuille bien diversifié dont le bêta est égal à 1,0. Un bêta de 1,0 implique que les rentabilités du portefeuille répliquent celles de l'indice. Si le taux de dividende du portefeuille est le même que celui qui est procuré par l'indice, le pourcentage de variation de la valeur du portefeuille sur une période donnée devrait être très proche de celui de l'indice. Chaque contrat sur le CAC 40 porte sur une fois l'indice. Il en découle que la valeur du portefeuille est protégée contre le fait que l'indice puisse descendre en dessous de K si, pour chaque montant de S_0 euros détenus en portefeuille le gestionnaire achète un put de prix d'exercice K. Supposons, par exemple, que le portefeuille vaille 400 000 € et que la valeur de l'indice soit de 4000. Le portefeuille représente 100 fois l'indice en valeur. Le gestionnaire peut obtenir une assurance contre le risque de chute brutale du portefeuille en dessous de 350 000 €, dans les trois mois qui viennent, en achetant cent contrats de puts avec un prix d'exercice de 3 500. Pour illustrer le mécanisme, supposons que l'indice chute à 3200 dans trois mois. Le portefeuille vaudrait alors 320 000 €. Le payoff des options serait alors égal à :

$$100 \times (3\,500 - 3\,200) = 30\,000 \text{ €}$$

La valeur totale du portefeuille assuré serait bien :

$$320\,000 + 30\,000 = 350\,000 \text{ €}$$

Bien sûr, cette couverture n'est pas gratuite puisque 100 contrats de put ont été achetés.

On évoque parfois le fait qu'un portefeuille d'actions performe toujours mieux sur le long terme qu'un portefeuille d'obligations. Si c'était le cas, contracter une assurance, par l'intermédiaire d'un achat de puts dont le prix d'exercice est la valeur future d'un portefeuille obligataire de même valeur initiale, ne coûterait pas cher. En fait, comme le montre l'encadré 14.1, ce n'est pas le cas.

Encadré 14.1 Peut-on garantir sur le long terme un rendement des fonds aussi élevé que celui des obligations d'État ?

Considérons un gérant de fonds qui essaie de persuader des investisseurs de placer leur argent dans un fonds qui réplique le S&P500. Il peut être tenté de leur garantir que leur rendement sera au moins aussi élevé que celui des obligations d'État sur les 10 années à venir.

Historiquement, les actions américaines ont surperformé les obligations sur pratiquement toutes les périodes de 10 ans pour lesquelles on possède des données. Cela laisse penser que le gérant ne s'engage pas beaucoup en faisant cette proposition, alors qu'en fait cette assurance peut être très coûteuse. Supposons que l'indice vaille 1 000 aujourd'hui, que son taux de dividende soit de 1 %, sa volatilité de 15 % et que le taux sans risque à 10 ans soit de 5 % par an. Pour surperformer les obligations, les actions doivent dégager une rentabilité annuelle supérieure à 5 % sur la période considérée. Comme l'indice paie 1 % de dividendes, la valeur de l'indice doit progresser de 4 % par an en moyenne, ce qui amène dans 10 ans à une valeur de 1 492. Avec ces paramètres, la valeur d'un put à 10 ans sur cet indice avec un prix d'exercice de 1 492 est égale à 169,7. Cela montre que la valeur de la garantie proposée par le gérant représente presque 17 % de la valeur du fonds !

Cas d'un bêta du portefeuille différent de 1,0

Si le bêta du portefeuille n'est pas égal à 1, le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF ou CAPM) peut être utilisé. Ce modèle stipule que l'espérance de rentabilité d'un portefeuille en excès du taux sans risque est égale à bêta fois la rentabilité, en excès du taux sans risque, du portefeuille de marché. Supposons que le portefeuille de 400 000 € considéré ci-dessus ait un bêta de 2,0 au lieu de 1,0. Supposons également que le taux sans risque actuel soit de 5 % par an et que les taux de dividende espérés du portefeuille et de l'indice soient de 2 % par an. Le tableau 14.2 montre la relation entre le niveau de l'indice et la valeur du portefeuille dans trois mois. Pour illustrer les étapes de calcul nécessaires aux résultats du tableau 14.2, le tableau 14.3 montre les conséquences d'une augmentation de l'indice à 4 160 dans trois mois.

Tableau 14.2 : Relation entre la valeur de l'indice et la valeur du portefeuille pour un bêta égal à 2,0

Valeur de l'indice dans trois mois	Valeur du portefeuille dans trois mois (€)
4320	461 000
4160	429 000
4000	397 000
3840	365 000
3680	333 000
3520	301 000

Si S_0 est la valeur de l'indice, on peut montrer que, pour chaque montant de S_0 euros dans le portefeuille, bêta options de vente doivent être acquises. Le prix d'exercice doit être égal à la valeur que devrait atteindre l'indice pour que la valeur du portefeuille soit égale à la valeur que l'on souhaite assurer. Si cette valeur est de 365 000 €, le

Tableau 14.3 : Calculs du tableau 14.2 lorsque la valeur de l'indice dans trois mois est de 4160

Valeur de l'indice dans trois mois	4160
Rentabilité due à la variation de l'indice	160/4000, soit 4 % pour trois mois
Dividendes de l'indice	$0{,}25 \times 2 = 0{,}5$ % pour trois mois
Rentabilité totale de l'indice	$4 + 0{,}5 = 4{,}5$ % pour trois mois
Taux d'intérêt sans risque	$0{,}25 \times 5 = 1{,}25$ % pour trois mois
Prime de risque de l'indice	$4{,}5 - 1{,}25 = 3{,}25$ % pour trois mois
Prime de risque du portefeuille	$2 \times 3{,}25 = 6{,}5$ % pour trois mois
Rentabilité du portefeuille	$6{,}5 + 1{,}25 = 7{,}75$ % pour trois mois
Dividendes du portefeuille	$0{,}25 \times 2 = 0{,}5$ % pour trois mois
Augmentation de la valeur du portefeuille	$7{,}75 - 0{,}5 = 7{,}25$ % pour trois mois
Valeur du portefeuille	400 000 € × 1,0725 = 429 000 €

tableau 14.2 montre que le prix d'exercice approprié de l'option de vente à acheter est de 3 840 (on prend en fait le prix d'exercice coté le plus proche). Puisque bêta = 2,0 et que $100S_0$ = 400 000 €, 200 puts sont nécessaires pour assurer le portefeuille au niveau désiré.

Pour illustrer ce résultat, supposons que l'indice chute à 3680, c'est-à-dire une baisse de 8 %. Comme on le voit dans le tableau 14.2, la valeur du portefeuille est alors de 333 000 €. Les options de vente permettent d'obtenir (3 840 – 3 680) × 200 = 32 000 €, ce qui est exactement la somme nécessaire pour que la valeur du portefeuille du gestionnaire passe de 333 000 € à 365 000 €. Bien sûr, cette couverture n'est pas gratuite puisque 200 puts ont été achetés.

14.4 Les options de change

Les options européennes et américaines sur devises sont activement négociées, aussi bien sur les marchés OTC que sur les marchés organisés. Le Philadelphia Stock Exchange a débuté la négociation des options de change en 1982. Les devises qui y sont échangées comprennent notamment l'euro, le dollar australien, la livre sterling, le dollar canadien, le yen japonais et le franc suisse. La plupart des devises sont supports de contrats d'options européennes et américaines sur le marché de Philadelphie.

Pour une entreprise souhaitant se prémunir contre une exposition au risque de change, les options sur devises constituent une alternative intéressante aux contrats forward. Une société devant, par exemple, recevoir des livres sterling à une date future connue peut couvrir son risque en achetant des puts sur la livre sterling dont l'échéance correspond à la date de livraison. Cette stratégie garantit que la valeur des livres sterling obtenues ne sera pas inférieure au prix d'exercice, tout en permettant à la société de réaliser un bénéfice en cas de variation favorable du taux de change. De même, une société devant payer en livres sterling à une date future connue peut se couvrir en

achetant des calls sur la livre sterling avec une échéance correspondant à cette date. Cette approche garantit que le coût du règlement en livres sterling ne dépassera pas un montant connu, tandis que la société pourra toujours profiter d'une variation favorable du taux de change. Alors qu'un contrat forward fixe le taux de change auquel se réalisera une transaction à venir, une option fournit une sorte d'assurance. Cette assurance n'est évidemment pas gratuite. Alors qu'il ne coûte pratiquement rien d'établir un contrat forward, une option nécessite le paiement immédiat d'un premium.

L'évaluation

Notons S le taux de change actuel (la valeur d'une unité de la devise étrangère mesurée en monnaie nationale). S est supposé suivre un mouvement brownien géométrique semblable à celui qui est utilisé au chapitre 13 pour les actions. Dans l'univers risque-neutre, la dynamique du processus s'écrit :

$$dS = (r - r_f)Sdt + \sigma Sdz$$

où r est le taux sans risque domestique, r_f est le taux sans risque étranger et σ représente la volatilité du taux de change. Ce processus stochastique est analogue à celui de l'équation (14.6) si l'on pose $q = r_f$. En effet, comme nous l'avions remarqué à la section 3.11, une devise peut être analysée comme une action versant un taux de dividende connu. Le détenteur de devise reçoit un « taux de dividende » égal au taux sans risque, r_f, de cette devise. Puisque le processus stochastique de valeur d'une devise est le même que celui d'une action versant un taux de dividende connu, les formules de la section 14.2 sont correctes si q est remplacé par r_f. La valeur du call européen, c, et celle du put, p, sont donc données par :

$$c = S_0 e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \tag{14.7}$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} N(-d_1) \tag{14.8}$$

où S_0 est la valeur du taux de change en $t = 0$ et :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + \left(r - r_f + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + \left(r - r_f - \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Le taux d'intérêt domestique, r, et le taux d'intérêt étranger, r_f, sont tous deux des taux pour la maturité T. Le put et le call sur une devise sont symétriques. De ce fait, un put permettant de vendre la devise A au taux de change K est équivalent à un call permettant d'acheter la devise B au prix $1/K$.

■ **Exemple 14.2**

Considérons un call européen à 4 mois sur la livre sterling ; le taux de change actuel est de 1,6000 EUR/GBP, le prix d'exercice de 1,6000, le taux d'intérêt sans risque français de 8 % par an, le taux sans risque britannique de 11 %

par an, et la valeur de l'option est 4,3 centimes d'euro. Dans ce cas, $S_0 = 1{,}6$, $K = 1{,}6$, $r = 0{,}08$, $r_f = 0{,}11$, $T = 4/12$ et $c = 0{,}043$. La volatilité implicite peut être calculée par itération. Une volatilité de 20 % produit une valeur d'option de 0,0639, une volatilité de 10 % produit une valeur d'option de 0,0285, etc. La volatilité implicite est en fait égale à 14,1 %.

L'équation (5.9) donne le taux de change forward, F_0, pour une maturité T sous la forme :

$$F_0 = S_0 e^{(r-r_f)T}$$

On peut alors simplifier les équations (14.7) et (14.8) ainsi :

$$c = e^{-rT}\left[F_0 N(d_1) - KN(d_2)\right] \tag{14.9}$$

$$p = e^{-rT}\left[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)\right] \tag{14.10}$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Pour appliquer les équations (14.9) et (14.10), il faut bien sûr que l'échéance du contrat forward et celle de l'option soient identiques.

Dans certains cas, il peut être optimal d'exercer une option de change américaine avant l'échéance. De ce fait, ces options ont une valeur supérieure à celle de leurs homologues européennes. En général, les calls sur devises aux taux d'intérêt élevés et les puts sur devises aux taux bas sont les options dont l'exercice anticipé est le plus probable. C'est dû au fait qu'une devise dont le taux d'intérêt est très élevé est plus susceptible de se déprécier face à une devise au taux d'intérêt plus faible. Malheureusement, il n'existe pas de formules analytiques pour l'évaluation des options de change américaines. Mais on peut utiliser les arbres binomiaux décrits dans la section 11.9. L'exemple 11.2, associé au graphique 11.12, en est une illustration.

14.5 Les options sur futures

Les options sur contrats futures, appelées aussi options sur futures, sont aujourd'hui échangées sur de nombreux marchés. Ce sont généralement des options américaines et elles sont dénouées, en cas d'exercice, par la livraison du contrat futures sous-jacent. Si un call sur futures est exercé, son détenteur obtient une position longue sur le contrat futures sous-jacent, ainsi qu'un montant égal à la différence entre le prix futures de compensation le plus récent et le prix d'exercice. Si c'est un put sur futures qui est exercé, son détenteur obtient une position courte sur le contrat futures sous-jacent, ainsi qu'un montant égal à la différence entre le prix d'exercice et le prix futures de compensation le plus récent. Comme le montrent les exemples suivants, le payoff effectif d'un call sur futures est égal au prix futures à la date d'exercice moins le prix d'exercice. De façon réciproque, le payoff effectif d'un put sur futures est le prix d'exercice moins le prix futures à la date d'exercice.

■ **Exemple 14.3**

Le 15 août, un investisseur détient un call sur contrat futures de cuivre échéance septembre avec un prix d'exercice de 70 cents la livre (lb). Un contrat futures porte sur 25 000 lb de cuivre. Le prix futures du cuivre pour une échéance septembre est à cette date de 81 cents et le prix de compensation de la veille était de 80 cents. Si l'option est exercée, l'investisseur reçoit une somme de :

$$25\ 000 \times (0{,}80 - 0{,}70) = 2\ 500\ \$$$

ainsi qu'une position longue dans un contrat futures pour acheter 25 000 lb de cuivre en septembre. S'il le désire, la position sur le contrat futures peut être dénouée immédiatement. Cela permet à l'investisseur d'encaisser un payoff de 2 500 \$ plus une somme de :

$$25\ 000 \times (0{,}81 - 0{,}80) = 250\ \$$$

reflétant la variation du prix futures depuis le dernier cours de compensation (la veille en général). Le payoff total produit par l'exercice de l'option le 15 août est de 2 750 €, montant égal à 25 000 × $(F - K)$, où F représente le prix futures à la date d'exercice et K le prix d'exercice.

■ **Exemple 14.4**

Un investisseur dispose d'un put sur contrat futures de maïs échéance décembre avec un prix d'exercice de 200 cents le boisseau. Un contrat futures porte sur 5 000 boisseaux de maïs. Supposons que le prix futures du maïs pour l'échéance décembre soit actuellement de 180 cents et que son cours, à la dernière compensation, ait été de 179 cents. Si l'option est exercée, l'investisseur recevra une somme de :

$$5\ 000 \times (2{,}00 - 1{,}79) = 1\ 050\ \$$$

ainsi qu'une position courte sur un contrat futures échéance décembre. S'il le désire, la position sur le contrat futures peut être dénouée immédiatement. Cela permet alors à l'investisseur d'encaisser un payoff de 1 050 \$ moins une somme de :

$$5\ 000 \times (1{,}80 - 1{,}79) = 50\ \$$$

reflétant la variation du prix futures depuis la dernière compensation. Le payoff total produit par l'exercice de l'option est de 1 000 \$. Il est égal à 5 000 × $(K - F)$, où F est le prix futures à la date d'exercice et K le prix d'exercice.

La cotation

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la plupart des options sur futures sont américaines. Elles sont référencées par le mois d'échéance du contrat futures sous-jacent et non par le mois d'échéance de l'option. La date d'échéance d'une option sur futures est généralement la plus proche date de livraison du contrat futures sous-jacent, ou quelques jours avant. Par exemple, l'option sur futures du S&P500 expire à la même date que le futures sous-jacent. L'option sur futures de devises du CME expire deux jours ouvrés avant la date d'échéance du futures. L'option sur futures sur obligations du Trésor du CBOT expire le premier vendredi, précédant d'au moins

cinq jours ouvrés la fin du mois précédant le mois d'échéance du contrat futures. Une exception : le contrat Eurodollar CME moyen terme, pour lequel les contrats futures expirent entre un et deux ans après les options. De la même façon, les options sur futures cotées sur l'Eurex ou le LIFFE portent sur les futures d'obligations d'État (contrat FGBL) et sur le futures Euribor 3 mois.

Le tableau 14.4 montre les cours des options sur futures tels qu'ils figuraient dans le *Wall Street Journal* du 5 février 2004. Les contrats les plus échangés portent, en ce qui concerne les matières premières, sur le maïs, le soja, le blé, le sucre, le pétrole et ses dérivés, le gaz, et en ce qui concerne les futures financiers, sur les obligations d'État, les contrats Eurodollar, Euribor, Eurobund et S&P500.

Les options sur futures de taux

Une option sur futures d'obligations est une option portant sur un contrat futures d'obligations d'État. Comme nous l'avons mentionné au chapitre 6, un contrat futures sur obligations d'État conduit à la livraison d'obligations d'État d'une valeur nominale de 100 000 $ (aux États-Unis) ou 100 000 € (en Europe). La valeur d'une option sur futures d'obligations est cotée en pourcentage de la valeur faciale de l'obligation sous-jacente ; ce pourcentage est arrondi au 1/64 le plus proche aux USA et à deux chiffres après la virgule en Europe. Le tableau 14.4 montre que le cours des calls sur futures sur obligations du Trésor américain échéance mars (Mar) s'établit à 2-06, c'est-à-dire $2\frac{06}{64}\%$ (= 2,09375 %) du nominal lorsque le prix d'exercice est de 110 (ce qui implique qu'un contrat coûte 2 093,75 $).

Une option sur futures Eurodollar ou Euribor est une option qui permet, en cas d'exercice, de prendre position sur un contrat futures Eurodollar ou Euribor. Lorsque le cours des futures Eurodollar ou Euribor varie d'un point de base, soit 0,01, il s'ensuit un gain ou une perte sur un contrat futures de 25 $ ou 25 € selon le marché (voir chapitre 6). De même, dans l'évaluation des options sur futures Eurodollar, un point de base représente 25 $ ou 25 €. Dans les contrats dont l'échéance est la plus proche, les cours sont présentés au quart de point de base le plus proche sur le CME. Les cours des contrats dont l'échéance est à 2 mois sont arrondis au demi-point de base le plus proche. De même, sur le contrat Euribor du LIFFE, la variation minimale est de 0,5 point de base, soit 12,5 €. Les cours présentés par le *Wall Street Journal* dans le tableau 14.4, concernant les contrats futures Eurodollar CME, doivent être multipliés par 10 pour obtenir la cotation en points de base. Par exemple, dans le tableau 14.4, le cours de 5,90 du call sur futures échéance mars du CME, lorsque le prix d'exercice est de 98,25, indique un premium de 59,0 points de base ; un contrat coûte ainsi 59,0 × 25 $ = 1 475,00 $.

Tableau 14.4 : Cours de clôture des options sur futures le 5 février 2004

Wednesday, February 4, 2004

Final or settlement prices of selected contracts. Volume and open interest are totals in all contract months.

Grain and Oilseed

Corn (CBT)

5,000 bu.; cents per bu.

STRIKE	CALLS-SETTLE			PUTS-SETTLE		
Price	Mar	May	Jly	Mar	May	Jly
260	11.875	20.250	26.750	1.625	5.250	8.500
270	5.500	14.750	21.250	5.250	9.500	13.500
280	2.250	10.500	17.250	12.000	15.500	19.000
290	.750	7.375	14.000	20.500	22.000	25.625
300	.250	5.125	11.375	30.000	29.625	32.625
310	.125	3.500	9.250	...	...	...

Est vol 14,610 Tu 8,885 calls 6,364 puts
Op int Tues 323,990 calls 227,010 puts

Soybeans (CBT)

5,000 bu.; cents per bu.

Price	Mar	May	Jly	Mar	May	Jly
760	47.500	58.500	60.000	1.875	13.000	28.500
780	31.250	46.500	50.250	5.500	20.750	38.500
800	18.875	36.250	42.000	13.125	30.750	50.000
820	10.250	28.500	35.000	24.500	42.250	62.750
840	5.125	22.000	29.500	39.375	56.000	77.000
860	2.500	17.000	24.750	56.625	70.750	92.000

Est vol 17,482 Tu 16,204 calls 6,863 puts
Op int Tues 153,237 calls 125,007 puts

Soybean Meal (CBT)

100 tons; $ per ton

Price	Mar	May	Jly	Mar	May	Jly
235	...	...	...	...	...	...
240	9.00	13.50	14.50	2.00	7.25	11.75
245	...	...	...	...	...	...
250	3.75	9.30	10.90	6.75	12.60	18.25
255	...	...	...	...	...	...
260	1.35	6.50	8.50	14.40	19.75	25.70

Est vol 2,445 Tu 2,767 calls 2,418 puts
Op int Tues 39,831 calls 36,748 puts

Soybean Oil (CBT)

60,000 lbs.; cents per lb.

Price	Mar	May	Jly	Mar	May	Jly
290	1.080	1.770	2.070	.250	1.000	1.620
295	.750	1.545	1.870	.400	1.280	...
300	.550	1.325	1.700	.700	1.570	2.240
305	...	...	...	...	...	...
310	.250	1.000	1.410	...	...	...
315	...	...	...	...	...	...

Est vol 6,036 Tu 2,484 calls 2,045 puts
Op int Tues 55,851 calls 44,819 puts

Wheat (CBT)

5,000 bu.; cents per bu.

Price	Mar	May	Jly	Mar	May	Jly
360	19.250	32.375	34.500	3.250	10.000	17.250
370	12.750	26.500	29.750	6.750	14.000	22.500
380	8.000	21.500	25.250	12.000	19.000	28.000
390	4.500	17.500	21.500	18.500	25.000	34.250
400	2.500	14.125	18.250	26.375	31.500	41.000
410	1.375	11.250	15.500	35.250	38.625	48.000

Est vol 4,768 Tu 2,369 calls 1,615 puts
Op int Tues 76,609 calls 56,869 puts

Wheat (KC)

5,000 bu.; cents per bu.

Price	Mar	May	Jly	Mar	May	Jly
360	22.500	30.625	36.375	2.000	10.250	16.000
370	15.000	24.875	31.250	4.500	14.500	20.750
380	9.125	20.000	26.625	8.625	19.500	26.125
390	5.250	16.125	22.750	14.750	25.625	32.125
400	2.875	14.000	19.375	22.375	32.500	38.750
410	2.000	10.500	16.500	31.000	...	...

Est vol 2,045 Tu 437 calls 315 puts
Op int Tues 21,347 calls 19,365 puts

STRIKE CALLS-SETTLE PUTS-SETTLE

Food and Fiber

Cotton (NYCE)

50,000 lbs.; cents per lb.

Price	Mar	May	Jly	Mar	May	Jly
67	2.44	5.85	7.13	.19	1.60	1.87
68	1.64	5.21	6.47	.39	1.95	2.20
69	.90	4.60	5.86	.65	2.34	2.58
70	.46	4.04	5.28	1.21	2.78	3.00
71	.28	3.54	4.75	2.03	3.27	3.46
72	.15	3.07	4.25	2.90	3.80	3.95

Est vol 9,021 Tu 8,443 calls 5,904 puts
Op int Tues 217,446 calls 113,615 puts

Orange Juice (NYCE)

15,000 lbs.; cents per lb.

Price	Mar	May	Jly	Mar	May	Jly
50	11.65	14.45	17.10	.05	.15	.25
55	6.75	9.75	12.60	.10	.40	.75
60	2.40	5.75	8.25	.75	1.35	1.40
65	.45	3.05	5.05	3.50	3.50	3.00
70	.15	1.55	2.95	8.35	7.05	5.90
75	.10	.80	1.70	13.35	11.40	9.55

Est vol 412 Tu 1,547 calls 843 puts
Op int Tues 42,351 calls 14,369 puts

Coffee (CSCE)

37,500 lbs.; cents per lb.

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
67.5	5.40	8.17	9.06	0.30	0.98	1.94
70	3.35	6.38	7.53	0.75	1.85	2.90
72.5	1.85	4.94	6.24	1.75	2.79	4.10
75	1.00	3.82	5.18	3.30	4.17	5.52
77.5	0.49	2.98	4.30	5.39	5.82	7.14
80	0.23	2.34	3.58	7.63	7.68	8.91

Est vol 9,420 Tu 2,864 calls 2,718 puts
Op int Tues 78,119 calls 38,500 puts

Sugar-World (CSCE)

112,000 lbs.; cents per lb.

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
450	1.19	1.39	1.40	0.01	0.01	0.02
500	0.69	0.89	0.93	0.01	0.02	0.06
550	0.25	0.47	0.55	0.07	0.09	0.17
600	0.02	0.18	0.27	0.34	0.30	0.39
650	0.01	0.05	0.12	0.83	0.67	0.74
700	0.01	0.01	0.06	1.33	1.13	1.17

Est vol 2,533 Tu 1,814 calls 1,889 puts
Op int Tues 154,632 calls 112,414 puts

Cocoa (CSCE)

10 metric tons; $ per ton

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
1500	84	108	133	3	39	64
1550	42	78	105	11	59	86
1600	14	54	81	33	85	112
1650	4	36	61	73	117	142
1700	1	24	45	120	155	176
1750	1	15	34	170	196	214

Est vol 1,663 Tu 439 calls 341 puts
Op int Tues 18,472 calls 15,125 puts

Petroleum

Crude Oil (NYM)

1,000 bbls.; $ per bbl.

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
3200	1.53	1.36	1.39	0.43	1.37	2.07
3250	1.20	1.12	1.18	0.60	1.63	2.36
3300	0.91	0.93	1.00	0.81	1.94	2.67
3350	0.66	0.75	0.84	1.06	2.26	3.01
3400	0.49	0.61	0.70	1.39	2.62	3.37
3450	0.33	0.50	0.00	1.73	3.00	...

Est vol 43,517 Tu 13,264 calls 17,244 puts
Op int Tues 341,383 calls 486,295 puts

Heating Oil No.2 (NYM)

42,000 gal.; $ per gal.

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
87	.0437	.0426	.0335	.0240	.0540	...
88	.0381	.0386	.0303	.0284	.0600	.0850
89	.0330	.0348	.0275	.0333	.0661	...
90	.0290	.0314	.0248	.0393	.0727	...
91	.0245	.0282	.0224	.0448	.0795	...
92	.0210	.0254	...	.0513	.0866	...

Est vol 815 Tu 800 calls 300 puts
Op int Tues 27,374 calls 19,492 puts

Gasoline-Unlead (NYM)

42,000 gal.; $ per gal.

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
97	.0462	...	.0932	.0305	.0301	.0484
98	.0409	.0842	.0877	.0352	.0338	.0528
99	.0361	...	.0823	.0404	.0378	.0574
100	.0318	.0725	.0773	.0461	.0421	.0623
101	.0279	.0671	.0724	.0522	.0466	.0674
102	.0243	.0619	.0680	.0586	.0514	...

Est vol 2,854 Tu 1,831 calls 1,008 puts
Op int Tues 21,736 calls 17,368 puts

Natural Gas (NYM)

10,000 MMBtu.; $ per MMBtu.

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
555	.382	.276	...	.278	.486	...
560	.358	.260	.238	.304	.519	...
565	.334	.244	...	.330	.553	...
570	.313	.230	.210	.359	.589	...
575	.293	.216	.197	.389	.625	...
580	.275	.203	.185	.421	.662	...

Est vol 37,627 Tu 17,111 calls 19,795 puts
Op int Tues 316,788 calls 386,608 puts

Brent Crude (IPE)

1,000 net bbls.; $ per bbl.

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
	Data not available from source.				...	...
...	...	...				...
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...

Est vol Tu calls puts
Op int Tues calls puts

Livestock

Cattle-Feeder (CME)

50,000 lbs.; cents per lb.

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
8000	4.00	5.50	6.28	3.00	2.80	3.10
8100	...	...	...	...	...	...
8200	2.50	4.00	...	3.50	3.30	3.90
8300	2.10	...	...	4.10	...	...
8400	1.60	3.10	4.00	4.60	4.40	4.80
8500	1.20	...	...	5.20	...	...

Est vol 534 Tu 183 calls 261 puts
Op int Tues 3,298 calls 5,427 puts

Cattle-Live (CME)

40,000 lbs.; cents per lb.

Price	Feb	Mar	Apr	Feb	Mar	Apr
73	1.50	...	2.00	0.50	...	4.05
74	0.80	...	1.70	0.80	...	4.75
75	0.35	...	1.50	1.35	...	5.55
76	0.18	...	1.25	2.18	...	6.28
77	0.08	...	1.05	3.08	...	7.08
78	0.03	...	0.85	4.03	...	7.88

Est vol 1,903 Tu 690 calls 855 puts
Op int Tues 40,381 calls 42,076 puts

Hogs-Lean (CME)

40,000 lbs.; cents per lb.

Price	Feb	Apr	May	Feb	Apr	May
57	2.63	3.80	...	0.20	1.93	...
58	1.78	3.18	4.80	0.35	2.30	2.18
59	1.08	2.65	...	0.65	2.78	...
60	0.53	2.15	3.63	1.10	3.28	2.98
61	0.28	1.73	...	...	...	...
62	0.15	1.35	2.68	2.73	...	...

Est vol 243 Tu 207 calls 358 puts
Op int Tues 5,619 calls 6,176 puts

STRIKE CALLS-SETTLE PUTS-SETTLE

Metals

Copper (CMX)

25,000 lbs.; cents per lb.

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
114	5.00	6.00	7.15	1.55	2.90	4.65
116	3.70	4.90	6.15	2.25	3.80	5.60
118	2.55	3.95	5.20	3.10	4.85	6.65
120	1.75	3.10	4.40	4.30	6.00	7.85
122	1.15	1.80	3.70	5.70	9.65	9.10
124	0.70	1.00	3.05	7.25	13.90	10.50

Est vol 1,650 Tu 247 calls 23 puts
Op int Tues 12,848 calls 3,638 puts

Gold (CMX)

100 troy ounces; $ per troy ounce

Price	Mar	Apr	Jun	Mar	Apr	Jun
390	13.50	16.80	21.80	1.90	5.10	9.20
395	10.00	13.70	19.00	3.30	7.00	11.40
400	7.00	11.00	17.50	5.30	9.30	14.90
405	4.80	8.80	14.30	8.10	12.10	16.60
410	3.20	6.60	12.50	11.50	14.90	19.70
415	2.10	5.50	10.80	15.40	18.80	23.00

Est vol 18,000 Tu 4,487 calls 5,463 puts
Op int Tues 306,159 calls 227,854 puts

Silver (CMX)

5,000 troy ounces; cts per troy ounce

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
610	20.30	30.50	38.40	15.50	24.40	32.20
620	15.90	26.30	34.30	21.10	30.10	38.10
625	14.00	24.40	32.40	24.20	33.20	41.20
630	12.40	22.70	30.70	27.60	36.40	44.40
640	9.70	19.50	27.50	34.90	43.20	51.20
650	7.60	16.80	24.70	42.70	50.50	58.40

Est vol 1,800 Tu 1,474 calls 1,954 puts
Op int Tues 66,669 calls 26,556 puts

Interest Rate

T-Bonds (CBT)

$100,000; points and 64ths of 100%

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
110	2-06	2-03	2-35	0-36	1-61	2-29
111	1-28	1-36	...	0-58	2-30	...
112	0-58	1-11	1-42	1-24	3-04	...
113	0-34	0-54	...	2-00	3-48	...
114	0-19	0-39	...	2-49	4-32	...
115	0-10	0-27	0-49	3-40	5-20	...

Est vol 23,701;
Tu vol 14,191 calls 17,000 puts
Op int Tues 412,644 calls 444,891 puts

T-Notes (CBT)

$100,000; points and 64ths of 100%

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
112	2-00	1-30	1-52	0-20	1-25	1-46
113	1-17	1-00	...	0-37	1-58	...
114	0-44	0-41	0-59	1-00	...	...
115	0-20	0-24	0-40	1-40	...	...
116	0-08	0-14	0-26	2-28	...	...
117	0-03	0-08	0-16	...	...	...

Est vol 150,806 Tu 61,052 calls 65,301 puts
Op int Tues 1,045,055 calls 1,083,950 puts

5 Yr Treas Notes (CBT)

$100,000; points and 64ths of 100%

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
11150	1-16	0-49	0-62	0-15	1-08	1-21
11200	0-56	0-36	...	0-22	1-27	...
11250	0-36	0-25	...	0-34	...	...
11300	0-22	0-17	...	0-52	...	...
11350	0-12	0-11	...	1-10	...	...
11400	0-06	...	...	1-36	...	...

Est vol 17,994 Tu 4,736 calls 25,086 puts
Op int Tues 125,023 calls 426,615 puts

30 Day Federal Funds (CBT)

$5,000,000; 100 minus daily average

Price	Feb	Mar	Apr	Feb	Mar	Apr
988750	.127	.117	.120	.002	.002	.005
989375	.065	.062	.060	.002	.007	.007
990000	.007	.007	.007	.007	.017	.017
990625	...	.002	.002	...	...	...

STRIKE CALLS-SETTLE PUTS-SETTLE

991250	.002	.002	...	...	...	...
991875	...	...	...	...	...	...

Est vol 330 Tu 1,199 calls 1,303 puts
Op int Tues 128,420 calls 162,873 puts

Eurodollar (CME)

$ million; pts. of 100%

Price	Feb	Mar	Apr	Feb	Mar	Apr
9825	...	5.90	...	0.00	0.00	0.12
9850	...	3.42	2.22	0.00	0.02	0.37
9875	0.95	1.02	0.45	0.05	0.12	1.10
9900	...	0.05	0.02	...	1.65	...
9925	...	0.00	...	...	4.10	...
9950	...	0.00	...	...	6.60	...

Est vol 288,753;
Tu vol 83,303 calls 142,595 puts
Op int Tues 4,268,863 calls 4,408,535 puts

1 Yr. Mid-Curve Eurodlr (CME)

$1,000,000 contract units; pts. of 100%

Price	Feb	Mar	Apr	Feb	Mar	Apr
9725	4.02	4.65	2.75	0.17	0.80	2.95
9750	2.05	2.87	1.60	0.70	1.52	...
9775	0.70	1.55	0.82	1.85	2.70	...
9800	0.15	0.65	0.35	3.80	4.30	...
9825	0.02	0.20	0.15	...	6.35	...
9850	0.00	0.05	...	...	...	...

Est vol 210,600 Tu 61,545 calls 129,840 puts
Op int Tues 934,544 calls 932,093 puts

2 Yr. Mid-Curve Eurodlr (CME)

$1,000,000 contract units; pts. of 100%

Price	Mar	Jun	Sep	Mar	Jun	Sep
9575	6.00	5.70	...	0.50	2.45	...
9600	4.00	4.10	4.05	1.00	3.35	5.40
9625	2.45	2.82	2.90	1.95	4.57	...
9650	1.27	1.85	...	3.27	6.07	...
9675	0.60	1.12	...	5.10	...	...
9700	0.17	0.50	...	7.17	...	...

Est vol 800 Tu 8,400 calls 0 puts
Op int Tues 158,035 calls 33,178 puts

Euribor (LIFFE)

Euro 1,000,000

Price	Feb	Mar	Apr	Feb	Mar	Apr
97750	0.18	0.19	0.17	...	0.00	0.02
97875	0.06	0.07	0.08	0.00	0.01	0.06
98000	0.01	0.03	0.03	0.07	0.09	0.13
98125	...	0.01	0.01	0.19	0.20	0.24
98250	...	0.00	0.00	0.31	0.32	0.35
98375	...	...	0.00	0.44	0.44	0.48

Vol Wd 327,805 calls 29,183 puts
Op int Tues 5,655,304 calls 1,807,541 puts

Euro-BUND (EUREX)

100,000; pts. In 100%

Price	Mar	Apr	May	Mar	Apr	May
11350	1.01	0.78	1.02	0.25	1.00	1.24
11400	0.68	0.56	0.78	0.42	1.28	1.50
11450	0.42	0.39	0.61	0.66	1.61	1.83
11500	0.22	0.26	0.46	0.96	1.98	2.18
11550	0.11	0.17	0.34	1.35	2.39	2.56
11600	0.06	0.10	...	1.80	2.82	...

Vol Wd 35,857 calls 42,186 puts
Op int Tues 366,384 calls 479,188 puts

Currency

Japanese Yen (CME)

12,500,000 yen; cents per 100 yen

Price	Feb	Mar	Apr	Feb	Mar	Apr
9400	1.03	1.72	2.30	0.06	0.75	1.04
9450	0.60	1.44	2.03	0.13	0.97	1.27
9500	0.30	1.19	1.78	0.33	1.22	1.52
9550	0.13	0.98	1.56	0.66	...	...
9600	0.06	0.81	1.36	1.09	1.84	...
9650	0.04	0.67	...	...	...	...

Est vol 1,352 Tu 1,271 calls 531 puts
Op int Tues 23,459 calls 20,676 puts

Canadian Dollar (CME)

100,000 Can.$, cents per Can.$

Price	Feb	Mar	Apr	Feb	Mar	Apr
7400	...	1.35	...	0.07	0.50	...
7450	0.51	1.04	...	0.16	0.69	...

STRIKE CALLS-SETTLE PUTS-SETTLE

7500	0.23	0.77	1.03	0.38	0.92	1.38
7550	0.10	0.57	...	0.75	1.22	...
7600	0.05	0.42	...	1.19	1.57	...
7650	0.02	0.31	...	1.67	1.96	...

Est vol 419 Tu 219 calls 163 puts
Op int Tues 12,761 calls 9,409 puts

British Pound (CME)

62,500 pounds; cents per pound

Price	Feb	Mar	Apr	Feb	Mar	Apr
1810	2.01	3.13	...	0.24	1.36	...
1820	1.13	2.53	...	0.36	1.76	...
1830	0.68	2.04	...	0.91	2.27	...
1840	0.34	1.60	...	1.57	2.83	...
1850	0.16	1.24	1.66	...	...	...
1860	0.08	0.96	1.42	3.31	...	...

Est vol 755 Tu 242 calls 625 puts
Op int Tues 6,257 calls 5,097 puts

Swiss Franc (CME)

125,000 francs; cents per franc

Price	Feb	Mar	Apr	Feb	Mar	Apr
7900	1.10	1.70	...	0.08	0.68	...
7950	0.69	1.39	...	0.17	0.87	...
8000	0.37	1.11	...	0.35	1.09	...
8050	0.18	0.89	...	0.66	1.37	...
8100	0.10	0.71	...	1.08	1.69	...
8150	0.05	0.55	...	1.53	2.03	...

Est vol 189 Tu 44 calls 384 puts
Op int Tues 1,690 calls 2,356 puts

Euro Fx (CME)

125,000 euros; cents per euro

Price	Feb	Mar	Apr	Feb	Mar	Apr
12400	1.35	2.36	2.82	0.15	1.16	1.91
12450	0.98	2.07	2.55	0.28	1.37	2.14
12500	0.66	1.81	2.31	0.46	1.61	2.40
12550	0.42	1.56	2.08	0.72	1.86	2.67
12600	0.26	1.34	1.87	1.06	2.14	2.96
12650	0.15	1.14	1.68	1.45	2.44	3.27

Est vol 3,767 Tu 3,252 calls 2,088 puts
Op int Tues 39,137 calls 43,286 puts

Index

DJ Industrial Avg (CBOT)

$100 times premium

Price	Feb	Mar	Apr	Feb	Mar	Apr
102	28.50	37.00	42.40	4.50	13.25	20.50
103	21.00	30.00	35.50	7.00	16.25	...
104	14.50	24.00	29.75	10.50	20.00	...
105	9.00	18.50	24.25	15.00	24.50	...
106	5.50	14.00	19.50	21.50	30.00	...
107	3.00	10.00	...	29.00	...	...

Est vol 124 Tu 111 calls 72 puts
Op int Tues 5,861 calls 5,480 puts

S&P 500 Stock Index (CME)

$250 times premium

Price	Feb	Mar	Apr	Feb	Mar	Apr
1115	19.70	29.90	37.80	10.80	21.00	29.90
1120	16.60	26.90	34.90	12.70	23.00	32.00
1125	13.80	24.00	32.00	14.90	25.10	34.10
1130	11.30	21.40	29.30	17.40	27.50	36.40
1135	9.10	19.00	26.80	20.20	30.10	...
1140	7.20	16.70	24.30	23.30	32.80	41.30

Est vol 14,455 Tu 4,759 calls 10,464 puts
Op int Tues 88,723 calls 228,763 puts

Other Options

Nasdaq 100 (CME)

$100 times NASDAQ 100 Index

Price	Feb	Mar	Apr	Feb	Mar	Apr
1460	...	...	...	...	...	...

Est vol 41 Tu 3 calls 2 puts
Op int Tues 2,185 calls 958 puts

NYSE Composite (NYFE)

$50 times premium

Price	Feb	Mar	Apr	Feb	Mar	Apr
6500	7450	12100	16400	6500	11150	16450

Est vol 0 Tu 3 calls 20 puts
Op int Tues 1 calls 9,514 puts

Les contrats futures sur les taux d'intérêt fonctionnent de la même façon que les autres contrats futures. Par exemple, le payoff d'un call s'écrit $\max(F-K\,;\,0)$, avec F le prix futures à la date d'exercice et K le prix d'exercice. En plus du payoff en numéraire, le détenteur de l'option obtient, à l'exercice, une position longue sur un contrat futures, et le vendeur de cette option s'engage dans la position courte correspondante.

Les cours des futures de taux augmentent lorsque les valeurs des obligations augmentent (c'est-à-dire lorsque les taux chutent). Réciproquement, ils diminuent lorsque les cours des obligations diminuent (en raison d'une hausse des taux). Un investisseur anticipant une hausse des taux à court terme peut spéculer en achetant des puts sur futures Eurodollar. Un investisseur qui, au contraire, anticipe une baisse peut spéculer en achetant des calls sur futures Eurodollar.

■ **Exemple 14.5**

En février, le prix futures Eurodollar échéance juin est 93,82 (ce qui correspond à un taux Eurodollar à 3 mois de 6,18 % par an). Le premium d'un call sur ce contrat avec un prix d'exercice de 94,00 s'établit à 0,10. Cette option peut intéresser un investisseur qui anticipe une baisse des taux. Supposons que les taux d'intérêt à court terme diminuent de 100 points de base dans les trois prochains mois et que l'investisseur exerce le call lorsque le prix futures s'établit à 94,78 (ce qui correspond à un taux à 3 mois de 5,22 % par an). Le payoff est donc égal à $25 \times 78 = 1\ 950$ \$. Comme le coût du contrat est de $10 \times 25 = 250$ \$, le gain de l'investisseur se monte à 1 700 \$.

■ **Exemple 14.6**

Supposons qu'en août le prix futures du contrat FGBL coté sur l'Eurex soit de 96,28. Un investisseur anticipant une baisse des taux d'ici à décembre peut choisir d'acheter des calls d'échéance décembre et de prix d'exercice 98. Supposons que le cours de ces calls soit de 1,06. Si le prix futures des obligations monte à 100,00, l'investisseur encaissera, pour 100 € d'obligations, un profit net de :

$$100{,}00 - 98{,}00 - 1{,}06 = 0{,}94$$

Puisqu'une option porte sur l'achat ou la vente d'instruments dont la valeur faciale est de 100 000 €, l'investisseur réalisera un profit de 940 € par option achetée.

Les raisons de la popularité des options sur futures

Il est logique de s'interroger sur le plus grand attrait des options sur futures par rapport à celui des options sur l'actif sous-jacent. La raison essentielle est qu'un contrat futures est, presque toujours, plus liquide et plus facile à vendre que l'actif sous-jacent. En outre, le prix futures est immédiatement connu du fait de la liquidité des marchés de futures correspondants.

Le marché des futures d'obligations d'État est bien plus actif que celui de n'importe quelle obligation d'État particulière. Là aussi, les prix futures sont connus

immédiatement grâce aux échanges sur le CBOT ou l'Eurex. Au contraire, la valeur de marché d'une obligation ne peut être obtenue qu'en contactant un ou plusieurs vendeurs. Il n'est donc pas surprenant que les investisseurs préfèrent prendre livraison d'un contrat futures d'obligations plutôt que des obligations elles-mêmes. De même, les futures de matières premières sont souvent bien plus simples à échanger que lesdites matières premières. Par exemple, il est plus commode de prendre livraison ou de livrer un contrat futures de porcs vivants que de le faire avec les porcs eux-mêmes !

Un point important doit être mentionné : l'exercice d'options sur futures ne conduit généralement pas à la livraison de l'actif sous-jacent au contrat futures. En effet, dans la plupart des cas, le futures est liquidé avant la livraison. Les options sur futures sont donc, dans la plupart des cas, dénouées en cash. C'est ce qui rend ces produits attractifs pour de nombreux investisseurs, notamment ceux dont les capitaux sont limités et pour qui il est difficile de présenter les fonds nécessaires à l'achat de l'actif sous-jacent lorsque l'option est exercée. Ces options possèdent un avantage supplémentaire : les futures et les options sur futures sont négociés sur les mêmes marchés organisés. Cela facilite les couvertures, les arbitrages et les spéculations et tend également à rendre le marché plus efficient. Enfin, le dernier point a trait aux coûts de transaction : les options sur futures sont sujettes à des coûts généralement plus faibles que les options sur l'actif sous-jacent.

La parité call-put

Au chapitre 9, nous avons présenté une relation de parité call-put pour les options européennes sur actions. Un raisonnement analogue est appliqué ci-après pour montrer une relation de parité call-put pour les options européennes sur contrats futures dans l'hypothèse où il n'y a pas de différence entre les payoffs des contrats futures et forward. Considérons un call et un put européens sur futures, de même prix d'exercice K et de même date d'échéance T. Notons A et B les deux portefeuilles suivants :

Portefeuille A : un call européen sur futures plus un montant $\mathrm{K}e^{-rT}$

Portefeuille B : un put européen sur futures plus une position longue sur un contrat futures plus un montant F_0e^{-rT}

Dans le portefeuille A, la trésorerie peut être investie au taux sans risque, r, jusqu'à valoir K à la date T. Notons F_T le prix futures à la date d'échéance de l'option ; si $F_T > K$, le call du portefeuille A est exercé et le portefeuille vaut F_T. Si $F_T \leqslant K$, le call n'est pas exercé et le portefeuille A vaut K. La valeur du portefeuille A à la date T est donc égale à :

$$\max(F_T; K)$$

Dans le portefeuille B, la trésorerie peut être investie au taux sans risque de façon à valoir F_0 à la date T. Le put génère un payoff égal à $\max(K - F_T\ ;\ 0)$, et le contrat futures engendre un payoff de $F_T - F_0$. La valeur du portefeuille B à la date T est donc égale à :

$$F_0 + (F_T - F_0) + \max(K - F_T\ ;\ 0) = \max(F_T\ ;\ K)$$

Puisque les deux portefeuilles ont la même valeur à la date T et qu'il n'y a pas d'opportunités d'exercice prématuré, les deux portefeuilles ont la même valeur aujourd'hui. La valeur initiale du portefeuille A est :

$$c + Ke^{-rT}$$

où c est la valeur du call sur futures. Le marking to market assure que la valeur actuelle du contrat futures du portefeuille B est égale à zéro. Par conséquent, le portefeuille B vaut :

$$p + F_0 e^{-rT}$$

où p désigne la valeur du put. Ainsi on a :

$$c + Ke^{-rT} = p + F_0 e^{-rT}$$

C'est le même type de relation que celle obtenue pour les options sur actions à l'équation (9.3), excepté le fait que le prix de l'action est remplacé par le prix futures, actualisé au taux sans risque. Pour les options américaines sur futures (voir problème 14.38), la relation de parité call-put est :

$$F_0 e^{-rT} - K \leqslant C - P \leqslant F_0 - Ke^{-rT}$$

■ **Exemple 14.7**

Le premium d'un call européen sur futures portant sur l'argent, de maturité 6 mois, est de 0,56 $ l'once, avec un prix d'exercice de 8,50 $. Le prix futures correspondant, pour une échéance à 6 mois, est actuellement de 8,00 $, et le taux d'intérêt sans risque à 6 mois est de 10 % par an. En utilisant l'équation (14.11), la valeur du put européen de mêmes caractéristiques est alors de :

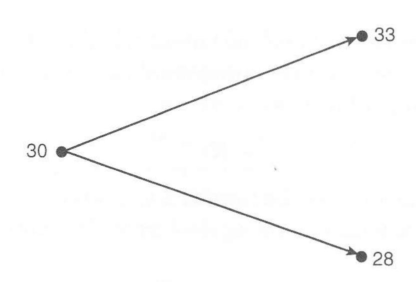
$$0{,}56 + 8{,}50e^{-0{,}1\times 0{,}5} - 8{,}00e^{-0{,}1\times 0{,}5} = 1{,}04$$

14.6 L'évaluation des options sur futures par les arbres binomiaux

Cette section utilise une approche par arbre binomial, identique à celle du chapitre 11, pour évaluer les options sur futures. La différence fondamentale entre les options sur futures et les options sur actions réside dans l'absence de décaissement liée à une prise de position sur un contrat futures.

Supposons que le prix futures soit de 30 aujourd'hui et qu'il puisse atteindre 33 ou 28 dans un mois. Considérons un call sur ce futures, d'échéance 1 mois avec un prix d'exercice de 29, et ignorons le marking to market quotidien. La situation est représentée dans le graphique 14.1. Si le prix futures monte à 33, le payoff de l'option sera égal à 4 et la valeur du contrat futures sera de 3. Si le prix futures tombe à 28, le payoff de l'option sera nul et le contrat futures vaudra –2 [3].

3. Il s'agit ici d'une approximation puisque gains ou pertes ne sont pas réalisés à la date T. Ils sont en fait réalisés progressivement sur toute la période séparant 0 et T. Cependant la qualité de l'approximation est d'autant meilleure que les sous-périodes sont courtes. À la limite, quand cette longueur tend vers 0, on obtient la valeur exacte.



Graphique 14.1 : Variations du cours du futures de l'exemple numérique.

Pour établir une couverture contre le risque, considérons un portefeuille consistant en une position courte sur une option et une position longue sur Δ contrats futures. Si le prix futures atteint 33, la valeur du portefeuille sera égale à $3\Delta - 4$; s'il descend à 28, la valeur du portefeuille sera -2Δ. Le portefeuille est sans risque lorsque ces deux valeurs sont identiques, c'est-à-dire lorsque :

$$3\Delta - 4 = -2\Delta$$

ce qui équivaut à $\Delta = 0{,}8$.

Pour cette valeur de Δ, la valeur du portefeuille sera égale à $3 \times 0{,}8 - 4 = -1{,}6$ dans un mois. Avec un taux sans risque à 6 %, la valeur actuelle correspondante est alors :

$$-1{,}6e^{-0{,}06\times 0{,}08333} = -1{,}592$$

Le portefeuille consiste en une position courte sur une option et Δ contrats futures. Puisque la valeur du contrat futures est nulle, la valeur de l'option doit être, aujourd'hui, égale à 1,592.

Généralisation

Cette analyse se généralise facilement en considérant un prix futures, égal à F_0 en date 0, pouvant devenir F_0u ou F_0d à la date T. Considérons un produit dérivé engendrant un payoff égal à f_u si le prix futures augmente et à f_d s'il diminue. La situation est résumée dans le graphique 14.2.

Le portefeuille sans risque consiste en une position courte sur une option combinée avec une position longue sur Δ contrats futures avec :

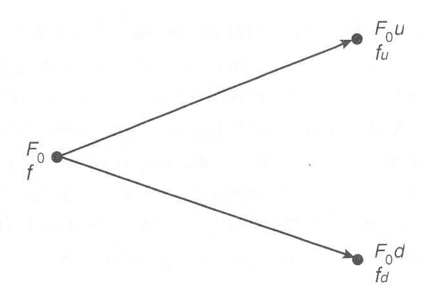
$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{F_0u - F_0d}$$

La valeur du portefeuille en T est toujours égale à :

$$(F_0u - F_0)\Delta - f_u$$

En notant r le taux sans risque, la valeur actuelle s'écrit :

$$[(F_0u - F_0)\,\Delta - f_u]\,e^{-rT}$$



Graphique 14.2 : Prix futures et cours de l'option dans le cas général.

Cette valeur actuelle peut aussi s'écrire $-f$, où f est la valeur actuelle de l'option. Il s'ensuit que :

$$-f = [(F_0u - F_0)\,\Delta - f_u]\,e^{-rT}$$

En remplaçant Δ par sa valeur et en simplifiant l'expression obtenue, on aboutit à :

$$f = e^{-rT}\,[pf_u + (1-p)\,f_d] \qquad (14.11)$$

où :

$$p = \frac{1-d}{u-d} \qquad (14.12)$$

Dans l'exemple numérique du graphique 14.1, $u = 1{,}1$, $d = 0{,}9333$, $r = 0{,}06$, $T = 0{,}08333$, $f_u = 4$ et $f_d = 0$. L'équation (14.13) permet d'écrire :

$$p = \frac{1 - 0{,}9333}{1{,}1 - 0{,}9333} = 0{,}4$$

et grâce à l'équation (14.12), on obtient la valeur de l'actif dérivé :

$$f = e^{-0{,}06 \times 0{.}08333}[0{,}4 \times 4 + 0{,}6 \times 0] = 1{,}592$$

qui concorde avec la réponse obtenue précédemment pour cet exemple.

14.7 Le taux de croissance des prix futures dans l'univers risque-neutre

Une règle générale permet d'analyser les options sur futures comme des options sur actions versant un dividende. Cette règle se déduit de la remarque selon laquelle un prix futures se comporte comme le prix d'une action versant un dividende dont le taux est égal au taux sans risque r. Une autre justification réside dans la relation de parité call-put pour les options sur futures. En effet, elle est identique à celle qui est énoncée pour les options sur actions versant un taux de dividende q, lorsque le cours de l'action est remplacé par celui du futures et que le taux de dividende q est remplacé par r.

En fait, un contrat futures nécessite un investissement nul. Dans un univers risque-neutre, l'espérance mathématique de gain liée à une position de coût nul doit être nulle. Par conséquent, l'espérance du payoff d'un contrat futures est égale à zéro. De ce fait, l'espérance du taux de croissance du prix futures dans l'univers risque-neutre est également nulle. Comme nous l'avons souligné à la section 14.2, une action versant un taux de dividende q a un taux de croissance espéré égal à $r-q$. Si $q=r$, l'espérance de ce taux de croissance s'annule, rendant l'action semblable au contrat futures. Ce résultat est très général et ne dépend pas d'hypothèses sur les taux d'intérêt ou sur les volatilités[4].

On peut donc écrire :

$$F_0 = \hat{E}(F_T)$$

où F_T est le prix futures à l'échéance du contrat, F_0 est le prix futures à la date 0 et $\hat{E}$ représente l'opérateur d'espérance dans un univers risque-neutre.

En conséquence, dans l'univers risque-neutre, la dynamique d'un prix futures F peut s'écrire :

$$dF = \sigma F dz \tag{14.13}$$

où σ est une constante.

L'EDP correspondante

Une autre façon de voir qu'un prix futures F se comporte (dans l'univers risque-neutre) comme le prix d'une action payant un taux de dividende égal au taux sans risque consiste à écrire l'EDP à laquelle obéit le prix d'un actif dérivé, noté f, dépendant de F. Elle s'écrit[5] :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2 F^2 = rf \tag{14.14}$$

Cette équation est similaire à l'équation (14.6) en posant $q=r$. Cela confirme que, dans le cadre de l'évaluation des actifs dérivés, un prix futures peut bien être vu comme un prix d'action payant un taux de dividende r.

4. Nous verrons au chapitre 25 que la formulation précise de cette propriété s'écrit : « Un prix futures a un drift nul dans l'univers risque-neutre classique quand le numéraire est le compte d'épargne. »Une martingale est en particulier un processus stochastique dont le drift est nul. Un processus de prix forward est aussi une martingale mais dans un univers risque-neutre où le numéraire est une obligation zéro-coupon d'échéance T.

5. Voir la note technique n° 7 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr) pour une démonstration.

14.8 Le modèle de Black pour évaluer les options sur futures

Les options européennes sur futures peuvent être évaluées en étendant les résultats précédents, comme l'a montré Fischer Black dans un article publié en 1976[6]. L'hypothèse sous-jacente est que les prix futures suivent des lois log-normales, hypothèse déjà posée pour le prix des actions au chapitre 13. Les valeurs d'un call européen, c, et d'un put européen, p, dont le sous-jacent est un contrat futures, sont données par les équations (14.4) et (14.5) en remplaçant S_0 par F_0 et q par r.

$$c = e^{-rT}\left[F_0 N(d_1) - KN(d_2)\right] \tag{14.15}$$

$$p = e^{-rT}\left[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)\right] \tag{14.16}$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

et σ est la volatilité du prix futures. Lorsque le coût de détention et le rendement d'opportunité (convenience yield) ne varient qu'en fonction du temps, on peut montrer que la volatilité du prix futures est la même que celle de l'actif sous-jacent. On notera que le modèle de Black n'impose pas que l'échéance de l'option soit la même que celle du futures.

■ **Exemple 14.8**

Soit un put européen sur futures de pétrole brut ; l'échéance de l'option est à 4 mois, le prix futures actuel est de 20 \$, le prix d'exercice est aussi de 20 \$, le taux sans risque est de 9 % par an et la volatilité du prix futures est de 25 % par an. Dans ce cas, $F_0 = 20$, $K = 20$, $r = 0{,}09$, $T = 4/12$, $\sigma = 0{,}25$ et $\ln(F_0/K) = 0$. Ainsi :

$$d_1 = \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} = 0{,}07216, \quad d_2 = -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2} = -0{,}07216$$

$$N(-d_1) = 0{,}4712, \quad N(-d_2) = 0{,}5288$$

et la valeur du put, p, est donnée par :

$$p = e^{-0{,}09\times 4/12}(20 \times 0{,}5288 - 20 \times 0{,}4712) = 1{,}12$$

soit 1,12 \$.

6. Voir F. Black, « The Pricing of Commodity Contracts », *Journal of Financial Economics*, 3 (mars 1976), 167-79.

14.9 Options sur futures versus options sur le sous-jacent

Dans cette section, nous comparons les options sur futures avec les options portant directement sur le sous-jacent du contrat futures (nous dirons *option spot*), lorsque les deux types d'options ont le même prix d'exercice et la même date d'échéance.

Le payoff d'un call européen spot avec un prix d'exercice K est égal à :

$$\max(S_T - K\ ; 0)$$

où S_T est le cours du sous-jacent à la date d'échéance. Le payoff du call européen sur futures correspondant est égal à :

$$\max(F_T - K\ ; 0)$$

où F_T est le prix futures à la date d'échéance de l'option. Si cette dernière est identique à celle du contrat futures, $F_T = S_T$ et les deux options sont, en théorie, équivalentes. Si l'échéance du call européen sur futures précède celle du contrat futures, la valeur du call sur futures est supérieure à celle de l'option spot dans un marché normal (où les prix futures sont supérieurs aux prix au comptant) et inférieure dans un marché inversé (où les prix futures sont inférieurs aux prix au comptant).

De même, un put européen sur futures a la même valeur que son homologue spot lorsque l'échéance de l'option sur futures est la même que celle du contrat futures. Si l'échéance du put sur futures précède celle du contrat futures, l'option de vente sur futures a un prix inférieur à celui de l'option spot correspondante dans un marché normal. Elle vaut plus cher dans un marché inversé.

Les résultats pour les options américaines

Le plus souvent, les options sur futures, cotées sur les marchés organisés, sont américaines. Si le taux sans risque, r, est positif, il existe toujours des circonstances dans lesquelles il sera optimal d'exercer prématurément une option américaine sur futures. Les options américaines sur futures valent donc davantage que leurs homologues européennes.

En général, une option américaine sur futures n'a pas la même valeur que l'option américaine spot correspondante, même lorsque le contrat futures et le contrat d'option ont la même échéance. Supposons par exemple que le marché soit normal, c'est-à-dire que les prix futures sont régulièrement supérieurs aux cours au comptant avant l'échéance. C'est le cas pour la plupart des indices boursiers, pour l'or, l'argent, les devises aux taux d'intérêt bas et diverses matières premières. Un call américain sur futures doit valoir plus que le call américain spot correspondant. En effet, dans certaines situations, l'option sur futures sera exercée prématurément et, dans ce cas, procurera un gain plus important à son détenteur. De même, un put américain sur futures doit valoir moins que l'option américaine spot correspondante.

En cas de marché inversé, avec des prix futures régulièrement inférieurs aux cours au comptant avant l'échéance, comme dans le cas des devises aux taux d'intérêt élevés et de certaines matières premières, l'inverse doit être vrai. Les calls américains sur futures doivent valoir moins que les calls américains spot correspondants, tandis que les puts américains sur futures doivent valoir plus que les puts américains spot correspondants.

Les différences entre options américaines sur futures et options américaines spot, telles qu'elles sont décrites ci-dessus, apparaissent aussi bien lorsque la date d'échéance du contrat futures est plus éloignée que celle du contrat d'option que lorsque les deux ont la même date d'expiration. En fait, plus la date d'échéance du contrat d'option est éloignée, plus la différence devient importante.

Résumé

La formule de Black et Scholes pour les options européennes sur actions ne versant pas de dividendes peut être étendue aux options européennes sur actions payant un taux de dividende connu. En pratique, les actions ne payent pas un taux de dividende connu. Cependant, beaucoup d'autres actifs servant de support aux options peuvent être analysés comme des actions versant un taux de dividende connu. C'est le cas pour :

1. Les indices boursiers : le taux de dividende est égal à la moyenne des taux de dividende des différentes actions composant l'indice.
2. Les devises : le taux de dividende est égal au taux d'intérêt sans risque du pays étranger concerné.
3. Les contrats futures : le taux de dividende est égal au taux sans risque domestique.

L'extension du modèle de Black et Scholes s'applique donc aux options européennes sur indices, devises et contrats futures.

Le dénouement des options sur indices s'effectue en cash. À l'exercice d'un call sur indice, l'investisseur reçoit le montant duquel l'indice dépasse le prix d'exercice à la clôture du jour d'exercice. De même, à l'exercice d'un put sur indice, l'investisseur reçoit le montant duquel le prix d'exercice dépasse la valeur de l'indice à la clôture du jour d'exercice. Les options sur indices peuvent aussi être employées pour assurer un portefeuille. Si le portefeuille a un bêta égal à 1,0, il est pertinent d'acheter un put pour chaque montant de nS_0 euros dans le portefeuille si l'option porte sur n fois l'indice, avec S_0 désignant la valeur de l'indice. Lorsque β est différent de 1,0, ce sont β puts qui devront être achetés pour chaque montant de nS_0 euros présents dans le portefeuille. Le bêta du portefeuille est calculé en utilisant le MEDAF (modèle d'équilibre des actifs financiers ou CAPM). Le prix d'exercice des puts retenus dépend du niveau d'assurance requis pour la valeur du portefeuille.

Les options de change sont négociées sur les marchés organisés et sur les marchés de gré à gré. Elles peuvent être utilisées par les trésoriers d'entreprise pour se couvrir contre le risque de change. Par exemple, le trésorier d'une firme européenne sachant qu'il va recevoir des dollars américains à une certaine date future peut se couvrir en

achetant des puts sur USD dont l'échéance correspond à cette date. Réciproquement, un trésorier européen qui doit payer des USD à une certaine date future peut se couvrir en achetant un call dont l'échéance est la date correspondante.

Les options sur futures sont dénouées par la livraison du contrat futures sous-jacent en cas d'exercice. Lorsqu'un call est exercé, son détenteur prend une position longue sur le futures et reçoit un montant égal à la différence (forcément positive) entre le prix futures et le prix d'exercice. De même, lorsqu'un put est exercé, son détenteur prend une position courte sur le futures et reçoit un montant égal à la différence (forcément positive) entre le prix d'exercice et le prix futures. Le contrat futures qui est livré expire généralement peu de temps après l'option. Si l'on suppose que les deux dates d'échéance coïncident, la valeur d'une option européenne sur futures est égale à celle de l'option européenne spot correspondante. Cependant, cela ne se vérifie pas pour les options américaines. Si le marché des futures est normal, un call américain sur futures vaudra plus que le call américain spot correspondant. Si le marché des futures est inversé, c'est le contraire.

Références complémentaires

Générales

BODIE Z., « On the Risk of Stocks in the Long Run », *Financial Analysts Journal*, 51, 3 (1995), 18-22.

MERTON R. C., « Theory of Rational Option Pricing », *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (printemps 1973), 141-83.

Sur les options de change

AMIN K. et R. A. JARROW, « Pricing Foreign Currency Options under Stochastic Interest Rates », *Journal of International Money and Finance*, 10 (1991), 310-29.

BIGER N. et J. HULL, « The Valuation of Currency Options », *Financial Management*, 12 (printemps 1983), 24-28.

GARMAN M. B. et S. W. KOHIHAGEN, « Foreign Currency Option Values », *Journal of International Money and Finance*, 2 (décembre 1983), 231-37.

GIDDY I. H. et J. DUFEY, « Uses and Abuses of Currency Options », *Journal of Applied Corporate Finance*, 8, 3 (1995), 49-57.

GRABBE J. O., « The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange », *Journal of International Money and Finance*, 2 (décembre 1983), 239-53.

JORION P., « Predicting Volatility in the Foreign Exchange Markets », *Journal of Finance*, 50, 2 (1995), 507-28.

Sur les options sur indices

CHANCE D. M., « Empirical Tests of the Pricing of Index Call Options », *Advances in Futures and Options Research*, 1, pt. A (1986), 141-66.

Sur les options sur futures

BLACK F., « The Pricing of Commodity Contracts », *Journal of Financial Economics*, 3 (mars 1976), 167-79.

HILLIARD J. E. et J. REIS, « Valuation of Commodity Futures and Options under Stochastic Convenience Yields, Interest Rates, and Jump Diffusions in the Spot », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, n° 1 (mars 1998), 61-86.

MILTERSEN K. R. et E. S. SCHWARTZ, « Pricing of Options on Commodity Futures with Stochastic Term Structures of Convenience Yields and Interest Rates », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, n° 1 (mars 1998), 33-59.

Problèmes et exercices

14.1 Un portefeuille diversifié d'actions françaises vaut actuellement 10 millions d'euros et a un bêta de 1,0. Le CAC 40 est actuellement à 4 000 points. Expliquez comment un put sur cet indice avec un prix d'exercice de 3 800 peut être utilisé pour pratiquer de l'assurance de portefeuille.

14.2 « Si l'on est en mesure d'évaluer une option portant sur une action versant un taux de dividende connu, on peut alors évaluer des options sur indices, devises et contrats futures. » Expliquez cette assertion.

14.3 Un indice boursier est actuellement à 300 points, son rendement en dividende est de 3 % par an et le taux sans risque est de 8 % par an. Quelle est la limite inférieure du prix d'un call européen à 6 mois sur cet indice si le prix d'exercice est de 290 ?

14.4 Une devise vaut actuellement 0,80 €. Dans chacun des deux prochains mois, sa valeur augmentera ou diminuera de 2 %. Le taux sans risque domestique est de 6 % et le taux sans risque étranger est de 8 %. Quelle est la valeur d'un call européen à 2 mois sur cette devise si le prix d'exercice est de 0,80 € ?

14.5 Expliquez les différences entre un call sur yen et un call sur un futures dont le sous-jacent est le yen.

14.6 Expliquez de quelle manière les options de change peuvent être utilisées pour se couvrir.

14.7 Calculez la valeur d'un call européen à 3 mois, à la monnaie, sur un indice valant aujourd'hui 250 points. Le taux sans risque est de 10 % par an, la volatilité de l'indice est de 18 % par an et le rendement en dividende de l'indice est de 3 % par an.

14.8 Soit un call américain sur futures de même date d'échéance que le contrat futures sous-jacent. Dans quel cas l'option sur futures vaut-elle plus que l'option américaine spot correspondante ?

14.9 Calculez la valeur d'un put européen sur devise à 8 mois, de prix d'exercice 0,50. Le taux de change est actuellement de 0,52, la volatilité de ce taux de change est de 12 %, le taux sans risque domestique est de 4 % par an et le taux sans risque étranger est de 8 % par an.

14.10 Pourquoi les options sur futures d'obligations sont-elles plus liquides que les options sur obligations ?

14.11 « Un prix futures peut être analysé comme le prix d'une action versant un taux de dividende connu. » Que représente le taux de dividende dans le cas du contrat futures ?

14.12 Un prix futures est actuellement de 50. Dans six mois, il sera soit à 56, soit à 46. Le taux sans risque est de 6 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen à 6 mois et de prix d'exercice 50 ?

14.13 Calculez la valeur d'un put européen sur futures à 5 mois, de prix d'exercice 20 €, sachant que le prix futures vaut 19 €, que le taux sans risque est de 12 % par an et que la volatilité du prix futures est de 20 % par an.

14.14 On suppose que la rentabilité totale (incluant les dividendes) d'un indice réplique la rentabilité d'un certain portefeuille. Expliquez comment vous évalueriez (a) des contrats forward et (b) des options européennes sur cet indice.

14.15 L'indice S&P100 est actuellement à 696 points et présente une volatilité annuelle de 30 %. Le taux sans risque est de 7 % par an et l'indice procure un rendement en dividende de 4 % par an. Calculez la valeur d'un put européen à 3 mois et de prix d'exercice 700 sur cet indice.

14.16 Quelle est la relation de parité call-put pour les options de change européennes ?

14.17 Une devise vaut actuellement 1,50 €. Les taux d'intérêt sans risque domestique et étranger sont respectivement de 5 % et 9 %. Calculez une limite inférieure de la valeur d'un call sur cette devise, d'échéance 6 mois et de prix d'exercice 1,40 €, s'il s'agit d'un call de type (a) européen et (b) américain.

14.18 Un indice boursier vaut actuellement 250. Le rendement en dividende de cet indice est de 4 % par an et le taux sans risque est de 6 % par an. Un call européen à 3 mois a un prix d'exercice de 245 ; il cote actuellement 10 €. Quelle est la valeur d'un put européen à 3 mois de mêmes caractéristiques ?

14.19 Attendriez-vous de la volatilité d'un indice d'actions qu'elle soit plus grande ou plus petite que celle d'une action individuelle ? Justifiez votre réponse.

14.20 Est-ce que le coût de couverture d'un portefeuille augmente ou diminue lorsque le bêta du portefeuille augmente ? Justifiez votre réponse.

14.21 Considérons un portefeuille d'une valeur de 60 millions de dollars alors que le S&P500 est à 1 200 points. Si le portefeuille réplique l'indice, quelles options doivent être achetées pour fournir une protection contre une chute de la valeur du portefeuille en dessous de 54 millions de dollars dans un an ?

14.22 Considérons à nouveau la situation de l'exercice 14.21 en supposant que le portefeuille a un bêta de 2,0, que le taux sans risque est de 5 % par an et que le rendement en dividende du portefeuille est égal à celui de l'indice, soit 3 % par an. Quelles options doivent être achetées pour fournir une protection contre une chute de la valeur du portefeuille en dessous de 54 millions de dollars dans un an ?

14.23 Supposez que vous achetiez un put sur un futures sur l'or, échéance octobre, de prix d'exercice 400 $ l'once. Chaque contrat porte sur la livraison de 100 onces. Que se passe-t-il si vous exercez lorsque le prix futures est de 377 $ alors que le cours de compensation le plus récent est de 380 $?

14.24 Supposez que vous achetiez un call sur futures de bétail pour avril avec un prix d'exercice de 70 cents la livre. Chaque contrat porte sur la livraison de 40 000 livres. Que se passe-t-il si vous exercez lorsque le prix futures est de 76 cents et que le cours de compensation le plus récent est de 75 cents ?

14.25 Considérons un call sur futures d'échéance 2 mois et de prix d'exercice 40. Le taux sans risque est de 10 % par an. Le prix futures est de 47. Quelle est la limite inférieure de la valeur de l'option si elle est (a) européenne et (b) américaine ?

14.26 Considérons un put sur futures d'échéance 4 mois et de prix d'exercice égal à 50. Le taux d'intérêt sans risque est de 10 % par an. Le prix futures est de 47. Quelle est la limite inférieure de la valeur de l'option si elle est (a) européenne et (b) américaine ?

14.27 Un prix futures est actuellement de 60. On sait que dans chacun des deux trimestres à venir, il peut augmenter ou baisser de 10 %. Le taux sans risque est de 8 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance 6 mois sur ce futures, si son prix d'exercice est de 60 ? Si le call est de type américain, peut-il être optimal de l'exercer prématurément ?

14.28 Dans l'exercice 14.27, quelle est la valeur d'un put européen d'échéance 6 mois sur le même futures si le prix d'exercice est de 60 également ? Si ce put est américain, sera-t-il éventuellement exercé avant l'échéance ? Vérifiez que la valeur du call calculée dans l'exercice 14.27 et celle du put calculée ici satisfont bien la relation de parité call-put.

14.29 Un prix futures est actuellement de 25, sa volatilité est de 30 % par an et le taux sans risque est de 10 % par an. Quelle est la valeur d'un call sur ce futures, d'échéance 9 mois et de prix d'exercice égal à 26 ?

14.30 Un prix futures est actuellement de 70, sa volatilité est de 20 % par an et le taux sans risque est de 6 % par an. Quelle est la valeur d'un put sur ce futures, d'échéance 5 mois et de prix d'exercice égal à 65 ?

14.31 Un prix futures est actuellement de 35. Un call et un put européens sur ce futures avec un prix d'exercice de 34 sont tous deux cotés 2 sur le marché. Le taux d'intérêt sans risque est de 10 % par an. Identifiez une opportunité d'arbitrage. Les options sont toutes deux d'échéance 1 an.

14.32 « La valeur d'un call européen à la monnaie portant sur un futures est toujours égale à celle d'un put européen de mêmes caractéristiques. » Expliquez pourquoi cette assertion est vraie.

14.33 Un prix futures est actuellement de 30. Le taux d'intérêt sans risque est de 5 % par an. Un call américain sur ce futures, d'échéance 3 mois et de prix d'exercice 28, vaut 4. Calculez les limites de la valeur d'un put américain sur le même futures avec le même prix d'exercice et la même échéance.

14.34 Une option sur le taux de change yen-euro peut-elle être créée à partir de deux autres options : une portant sur le taux de change dollar-euro et l'autre portant sur le taux de change dollar-yen ? Justifiez votre réponse.

14.35 Une société sait que, dans trois mois, elle aura à investir 5 millions d'euros pour 90 jours au LIBOR moins 50 points de base et espère que le taux obtenu sera au moins égal à 6,5 %. Quelle position en options de taux devrait-elle prendre ?

14.36 Démontrez les résultats des équations (14.1), (14.2) et (14.3) à l'aide des portefeuilles A, B, C et D suivants :

a. **Portefeuille A** : un call européen plus un montant Ke^{-rT} de liquidités

b. **Portefeuille B** : e^{-qT} actions dont les dividendes sont réinvestis en actions

c. **Portefeuille C** : un put européen plus e^{-qT} actions dont les dividendes sont réinvestis en actions

d. **Portefeuille D** : des liquidités d'un montant égal à Ke^{-rT}

14.37 Démontrez que si C représente la valeur d'un call américain portant sur une action versant un taux de dividende q, de prix d'exercice K et de maturité T, et si P est la valeur d'un put américain de mêmes caractéristiques, alors :

$$S_0e^{-qT} - K \leqslant C - P \leqslant S_0 - Ke^{-rT}$$

où S_0 est le cours actuel de l'action et r le taux sans risque ($r > 0$). (Indication : pour obtenir une des inégalités, considérez les valeurs possibles de :

- **Portefeuille A** : un call européen plus un montant K investi au taux sans risque
- **Portefeuille B** : un put américain plus un montant e^{-qT} investi dans l'action, les dividendes étant aussi réinvestis dans l'action

Pour obtenir l'autre inégalité, considérez les valeurs possibles de :

- **Portefeuille C** : un call américain plus un montant Ke^{-rT} investi au taux sans risque
- **Portefeuille D** : un put européen plus une action, les dividendes étant réinvestis dans l'action.)

14.38 Démontrez que si C représente la valeur d'un call américain portant sur un contrat futures de prix d'exercice K et de maturité T, et si P représente la valeur d'un put américain sur ce même contrat futures avec le même prix d'exercice et la même date d'échéance, alors :

$$F_0e^{-rT} - K \leqslant C - P \leqslant F_0 - Ke^{-rT}$$

où F_0 est le prix futures actuel et r le taux sans risque. On suppose que $r > 0$ et qu'il n'y a pas de différences entre les contrats forward et futures. (Indication : utilisez une approche analogue à celle du problème précédent.)

14.39 Si le cours d'une devise A exprimé en fonction du cours de la devise B suit le processus :

$$dS = (r_B - r_A)Sdt + \sigma Sdz$$

où r_A est le taux d'intérêt sans risque de la devise A et r_B celui de la devise B, quel est le processus suivi par le cours de la devise B en unités de la devise A ?

Questions complémentaires

14.40 Un indice d'actions est actuellement à 300 points. Cette valeur peut augmenter ou diminuer de 10 % à chacune des deux prochaines périodes de trois mois. Le taux d'intérêt sans risque est de 8 % par an et le rendement en dividende de l'indice est de 3 % par an. Quelle est la valeur d'un put sur l'indice, d'échéance 6 mois et de prix d'exercice 300, s'il est (a) européen et (b) américain ?

14.41 Supposons que le cours au comptant du dollar soit de 0,75 € et que le taux de change dollar-euro ait une volatilité de 4 % par an. Les taux sans risque aux États-Unis et en Europe sont respectivement de 9 % et 7 %. Calculez la valeur d'un call européen permettant d'acheter un dollar pour 0,75 € dans neuf mois. Utilisez la relation de parité call-put pour calculer la valeur d'un put européen permettant de vendre un dollar pour 0,75 € dans neuf mois. Quelle est la valeur d'une option permettant d'acheter 0,75 € avec un dollar dans neuf mois ?

14.42 Une société d'investissement annonce que le salaire des gérants de fonds dépendra dorénavant des performances du fonds. Si le fonds perd de l'argent, les salaires seront nuls. Si le fonds réalise un gain, les salaires seront proportionnels au profit. Décrivez le salaire d'un gérant en termes d'options. Quel comportement un gestionnaire de fonds est-il incité à suivre avec ce type de rémunération ?

14.43 La valeur d'un futures est actuellement de 40. On sait que, dans trois mois, son cours sera de 35 ou de 45. Quelle est la valeur d'un call européen à 3 mois portant sur ce futures si le prix d'exercice est égal à 42 et si le taux d'intérêt sans risque est de 7 % par an ?

14.44 Calculez la volatilité implicite des cours d'un futures de soja à partir des informations suivantes concernant un put européen sur futures de soja :

Prix futures aujourd'hui	525
Prix d'exercice	525
Taux sans risque	6 % par an
Durée avant l'échéance	5 mois
Valeur du put	20

14.45 Utilisez DerivaGem pour calculer les volatilités implicites sur les options sur contrat futures de maïs échéance juillet du tableau 14.4, sachant que le prix futures était de 278,25 le 5 février 2004. Considérez qu'il s'agit d'options américaines et utilisez 100 pas de temps. La date d'échéance des options était le 19 juin 2004. Quelles conclusions pouvez-vous tirer sur la forme des volatilités implicites obtenues ?

Chapitre 15

Les lettres grecques

Une institution financière qui vend une option, de gré à gré, à un client est confrontée au problème de gestion de son risque. Si cette option se révèle identique à une autre option échangée sur un marché organisé, l'institution financière peut neutraliser son exposition au risque en achetant, sur le marché, la même option que celle qui est vendue au client. Mais lorsque l'option a été « taillée sur mesure », pour répondre à un besoin bien précis, elle ne correspond pas aux produits standard échangés en Bourse, et la couverture contre le risque devient bien plus compliquée.

Dans ce chapitre, nous examinons différentes approches de ce problème. Nous traitons ce qu'on appelle généralement « les grecques ». Chaque lettre grecque mesure une dimension différente du risque d'une position en options, et l'objectif du trader est de gérer les grecques de telle manière que les risques pris soient acceptables. L'analyse présentée dans ce chapitre est applicable par les market-makers sur les marchés organisés et par les traders des institutions financières.

Vers la fin de ce chapitre, nous présentons la création d'options synthétiques. Ce sujet présente, en effet, une problématique proche de celle de la couverture. Créer une option synthétique équivaut à créer une position couvrant l'option symétrique. Par exemple, créer un call synthétique revient à construire une position permettant de couvrir la vente d'un call équivalent.

15.1 Illustration

Dans les prochaines sections, nous utilisons comme exemple le cas d'une institution financière qui a vendu pour 300 000 € de calls européens sur 100 000 actions ne versant pas de dividendes. Le cours de l'action est de 49 € , le prix d'exercice de 50 € , le taux d'intérêt sans risque de 5 % par an, la volatilité de l'action de 20 % par an, l'échéance à 20 semaines (0,3846 année), et l'espérance de rentabilité de l'action de

13 % par an[1]. Avec les notations habituelles, on a :

$$S_0 = 49\,;\ K = 50\,;\ r = 0{,}05\,;\ \sigma = 0{,}20\,;\ T = 0{,}3846\,;\ \mu = 0{,}13$$

L'option vaut, selon le modèle de Black et Scholes, 240 000 €. L'institution financière a donc vendu l'option 60 000 € de plus que sa valeur théorique. Mais elle est confrontée au problème de gestion des risques[2].

15.2 Les positions nues et les positions couvertes

Une des stratégies possibles pour une institution financière est de ne rien faire. C'est ce qu'on appelle parfois adopter une position nue. C'est une stratégie qui fonctionne bien si le cours de l'action est en dessous de 50 € au bout des 20 semaines. L'option ne coûte finalement rien à l'institution financière et lui a rapporté 300 000 €. Mais une position nue est très risquée ; si l'option est exercée, l'institution financière aura à acheter 100 000 actions au prix du marché dans 20 semaines afin de respecter le contrat. Le coût est alors de 100 000 fois le montant duquel le cours de l'action dépasse le prix d'exercice. Par exemple, si au bout des 20 semaines le cours de l'action s'établit à 60 €, le coût pour l'institution financière est de 1 000 000 €. C'est considérablement plus élevé que la prime de 300 000 € qu'elle a reçue à la vente du call[3].

Une stratégie alternative consiste à couvrir la position. Cela suppose d'acheter 100 000 actions au moment de la vente de l'option. Si l'option est exercée, cette stratégie fonctionne bien, mais dans le cas contraire, elle peut engendrer une perte significative. Par exemple, si le cours de l'action chute à 40 € , l'institution perd 900 000 € sur sa position en actions, somme bien plus élevée que les 300 000 € reçus en contrepartie de la vente du call.

Ni une position nue ni une position couverte n'apportent une protection satisfaisante. Si les hypothèses sous-jacentes à la formule de Black et Scholes sont vérifiées, le coût pour l'institution financière sera toujours de 240 000 € en moyenne pour les deux approches[4]. Mais selon le cas, le coût peut se situer entre 0 et plus de 1 000 000 €. Une couverture parfaite devrait assurer un coût fixe toujours égal à 240 000 €. Pour une telle couverture, l'écart-type du coût de mise en place de l'option et de sa couverture est nul.

---

1. Comme nous l'avons expliqué aux chapitres 11 et 13, l'espérance de rentabilité n'est pas nécessaire à l'évaluation des options. Elle est donnée ici parce qu'elle peut influer sur l'efficacité du procédé de couverture.

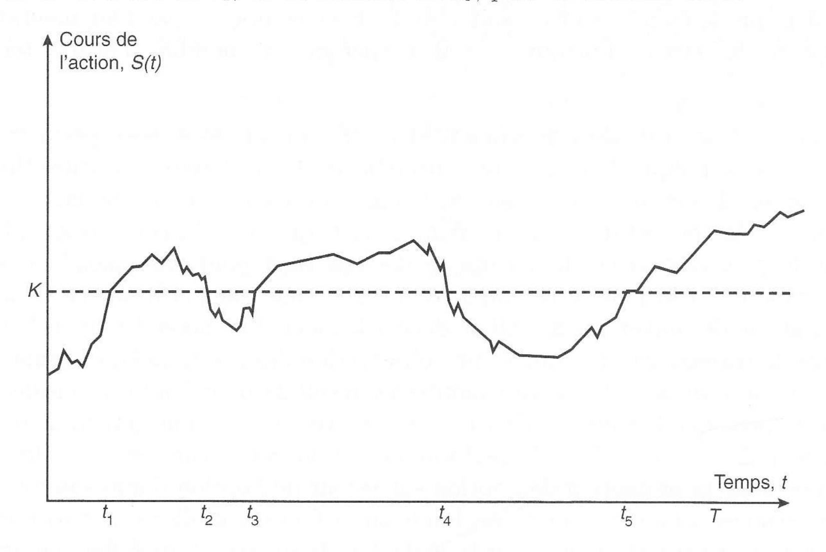
2. Une option sur une action ne payant pas de dividendes est un exemple simple pour exposer les idées principales, mais les méthodes s'appliquent à d'autres types d'options ou d'actifs dérivés.

3. La parité call-put montre que l'exposition provoquée par la vente d'un call couvert est la même que celle qui est due à la vente d'un put nu.

4. De manière plus précise, la valeur actuelle de l'espérance du coût sera de 240 000 € pour les deux approches, en supposant que le taux d'actualisation utilisé soit approprié et ajusté au risque.

15.3 Une stratégie stop-loss

Un procédé de couverture intéressant parfois envisagé est appelé stratégie « stop-loss » (à seuil de déclenchement). Pour illustrer l'idée de base, considérons une institution qui a vendu un call de prix d'exercice K sur une action. La technique de couverture consiste à acheter l'action lorsque son cours dépasse le prix d'exercice K et à la vendre sitôt qu'il descend en dessous de K. L'idée est de détenir une position nue lorsque le cours de l'action est inférieur à K et d'être couvert lorsque le cours dépasse K. Le procédé est conçu de façon que, à la date T, l'institution financière possède bien l'action si l'option est dans la monnaie et qu'elle ne la possède pas si l'option est en dehors de la monnaie. La stratégie produit un revenu à l'échéance identique à celui que procure l'option à son détenteur. Dans le cas illustré par le graphique 15.1, cette stratégie implique d'acheter l'action en t_1, de la vendre en t_2, de l'acheter à nouveau en t_3, de la revendre en t_4, de la racheter en t_5, puis de la livrer en T.



Graphique 15.1 : Une stratégie à seuil de déclenchement.

Le cours initial de l'action est encore noté S_0. Le coût initial de création de la couverture est S_0 si $S_0 > K$ et zéro sinon. Le coût total, Q, lié à la vente et à la couverture de l'option est égal à la valeur intrinsèque de l'option, soit :

$$Q = \max(S_0 - K\ ; 0) \tag{15.1}$$

En fait, tous les achats et ventes postérieurs à la date zéro sont réalisés au prix K. Si cet argument était correct, la couverture fonctionnerait parfaitement en l'absence de coûts de transaction. De plus, le coût de couverture de l'option serait toujours inférieur à la valeur de Black et Scholes. Ainsi, un investisseur pourrait générer des profits sans risque en vendant des options et en couvrant le risque.

Il y a deux raisons essentielles qui prouvent que l'équation (15.1) est incorrecte. La première est que les flux de trésorerie engendrés par la couverture doivent être actualisés. La seconde est que les achats et les ventes ne se font pas exactement au prix K.

Ce second point est crucial. Si nous supposons un univers risque-neutre avec des taux d'intérêt nuls, nous pouvons justifier d'ignorer la valeur temps de l'argent. Mais nous ne pouvons pas raisonnablement supposer qu'à la fois les achats et les ventes s'effectuent au même cours. Si les marchés sont efficients, l'arbitragiste cherchant à couvrir le risque ne peut pas savoir si, au moment où le cours de l'action devient égal à K, il va évoluer au-dessus de K ou en dessous.

En pratique, les achats s'effectuent au prix $K + \varepsilon$ et les ventes au prix $K - \varepsilon$, pour de petites valeurs positives de ε. Ainsi, tout achat et toute vente ultérieure impliquent un coût (en dehors des coûts de transaction) de 2ε. La réponse naturelle des arbitragistes est de surveiller plus attentivement les variations du cours de l'action, de manière à réduire la valeur de ε. En supposant que les cours des actions varient en continu, ε peut alors être arbitrairement réduit par une surveillance très minutieuse des cours. Mais, plus ε est réduit, plus les ordres d'achat et de vente vont se répéter fréquemment. Ainsi, bien que le coût par ordre soit réduit, il est compensé par l'augmentation de la fréquence de ceux-ci. Lorsque $\varepsilon \to 0$, l'espérance du nombre d'ordres tend vers l'infini[5].

Une stratégie à seuil de déclenchement, bien qu'étant attrayante au premier abord, n'est pas une technique de couverture très efficace. Considérons son utilisation pour une option en dehors de la monnaie. Si le cours de l'action n'atteint jamais le prix d'exercice K, la couverture ne coûte rien. Si la trajectoire du cours passe plusieurs fois par le prix d'exercice, la technique devient bien plus onéreuse. Une simulation de Monte Carlo peut être employée pour estimer la performance d'ensemble d'une stratégie de couverture à seuil de déclenchement. Elle nécessite des échantillons aléatoires de trajectoires de cours et une observation des résultats en utilisant la couverture en question. Le tableau 15.1 montre les résultats pour l'option considérée plus tôt. On suppose que le cours de l'action est observé au bout d'un intervalle de temps de longueur Δt [6]. La mesure de performance de la couverture est le ratio : écart-type du coût de la protection de l'option sur valeur de l'option d'après la formule de Black et Scholes. Chaque résultat est fondé sur 1 000 échantillons de trajectoires de cours d'action et présente une erreur type de 2 %. Il apparaît impossible d'établir une valeur de la mesure de performance inférieure à 0,70, quelle que soit la longueur de l'intervalle Δt.

15.4 La couverture par le delta

Une majorité de traders utilise des procédés de couverture bien plus sophistiqués que ceux qui ont été mentionnés jusque-là. Ils nécessitent le calcul de mesures telles que le delta, le gamma et le vega. Nous analysons ici le rôle joué par le delta.

5. Comme cela est mentionné à la section 12.2, l'espérance du nombre de fois qu'un processus de Wiener passe par une valeur donnée, dans un intervalle de temps spécifié, est infinie.

6. Les règles précises de constitution de la couverture étaient les suivantes : si le cours de l'action passe d'inférieur à K à supérieur à K dans un intervalle de temps de longueur Δt, l'action est achetée à la fin de cet intervalle. S'il passe de supérieur à K à inférieur à K dans l'intervalle de temps, il est vendu à la fin de l'intervalle. Sinon, aucune action n'est réalisée.

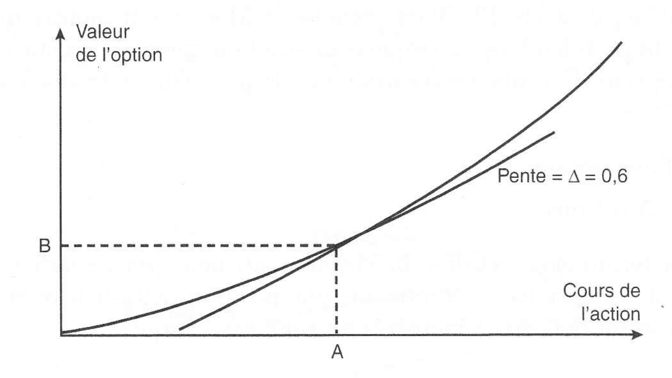
Tableau 15.1 : Performance d'une stratégie à seuil de déclenchement (la mesure de performance est le ratio : écart-type du coût de vente et de protection de l'option sur valeur théorique de l'option)

Δt (semaines)	5	4	2	1	0,5	0,25
Performance de la couverture	1,02	0,93	0,82	0,77	0,76	0,76

Le delta d'une option, Δ, a été introduit au chapitre 11. Il est défini comme le taux de variation de la valeur de l'option par rapport à celle du sous-jacent. C'est la pente de la courbe reliant la valeur de l'option à celle du sous-jacent. Supposons que le delta d'un call sur action soit 0,6. Cela signifie que lorsque le cours de l'action varie d'un faible montant, la valeur de l'option varie de 0,6 fois ce montant. Le graphique 15.2 montre la relation entre la valeur du call et le cours de l'action sous-jacente. Lorsque le cours de l'action est au point A, la valeur de l'option est au point B, et Δ est la pente de la tangente indiquée dans le graphique. En général :

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$$

où c est la valeur du call et S le cours de l'action.



Graphique 15.2 : Calcul du delta.

Supposons que, dans le graphique 15.2, le cours de l'action soit de 100 € et la valeur de l'option de 10 €. Imaginons un investisseur qui a vendu 20 calls qui portent sur 100 actions chacun ; sa position peut être couverte en achetant $0,6 \times 2\ 000 = 1\ 200$ actions. Le gain (la perte) sur la position en options tendrait à être compensé par la perte (le gain) sur la position en actions. Par exemple, si le cours de l'action augmente de 1 € (produisant un gain de 1 200 € grâce aux actions achetées), la valeur de l'option augmentera d'environ 0,6 × 1 € = 0,60 € (entraînant une perte de 1 200 € sur les options puisque la valeur des 20 contrats d'options vendus pour 10 € × 100 × 20 = 20 000 € passera à 10,60 € × 100 × 20 = 21 200 €). Si, au contraire, le cours de l'action baisse de 1 € (entraînant une perte de 1 200 € sur les actions détenues), la

valeur de l'option diminuera de 0,60 € (produisant un gain de 1 200 € sur les options vendues).

Dans cet exemple, le delta de la position en options est $0{,}6 \times (-2\,000) = -1\,200$. Autrement dit, l'investisseur perd $1\,200\ \Delta S$ sur sa position de vendeur d'options lorsque le cours de l'action augmente de ΔS. Le delta de l'action est égal à 1,0 et la position longue sur 1 200 actions a un delta de +1 200. Le delta global de l'investisseur est donc nul. Le delta de la position sur actions compense donc le delta de la position sur options. Une position dont le delta est nul est appelée position delta-neutre.

Il est important de comprendre que, puisque le delta varie, la position de l'investisseur demeure couverte en delta-neutre seulement dans un intervalle de temps relativement court. La couverture doit être réajustée périodiquement. Dans notre exemple, au bout de trois jours, le cours de l'action pourrait avoir augmenté jusqu'à 110 €. Comme on peut le voir dans le graphique 15.2, une augmentation du cours de l'action entraîne une augmentation de la pente de la droite tangente à la courbe en ce point, donc une augmentation du delta. Supposons que le delta passe d'une valeur de 0,60 à 0,65. Ce sont $0{,}05 \times 2\,000 = 100$ actions supplémentaires qui devront être achetées pour maintenir la couverture. La technique de couverture par le delta, décrite ci-dessus, est un exemple de *couverture dynamique*. Elle se différencie des techniques de *couverture statique*, dans lesquelles la couverture est définie dès le départ et n'est plus jamais ajustée. Ces méthodes sont parfois qualifiées de *hedge-and-forget* (couvrir et oublier).

Le delta est très étroitement lié à l'analyse de Black-Scholes-Merton. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 12, Black, Scholes et Merton ont montré qu'il était possible d'établir un portefeuille sans risque consistant en une position sur l'action et une position sur l'option. Exprimé en termes de Δ, le portefeuille de Black et Scholes est constitué par :

- la vente d'une option ;
- l'achat de Δ actions.

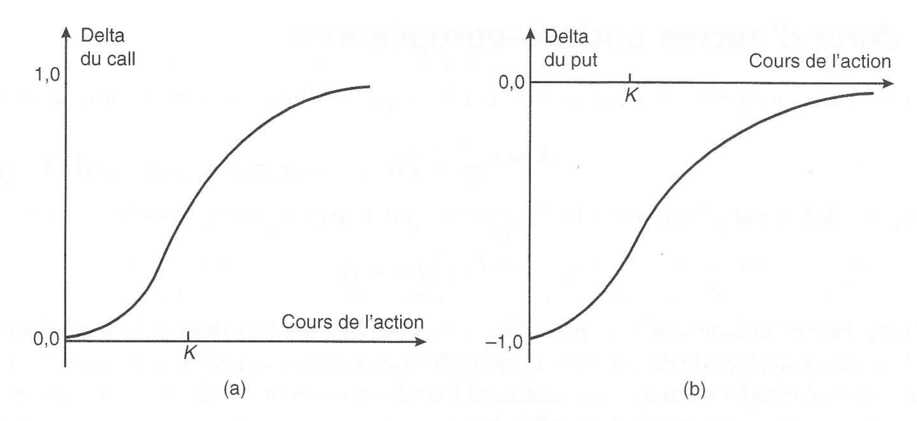
En utilisant la terminologie établie précédemment, nous pouvons dire que Black et Scholes évaluent les options en établissant une position delta-neutre et en montrant qu'une telle position doit être rémunérée au taux sans risque.

Le delta d'une option européenne sur action

Pour un call européen portant sur une action ne versant pas de dividendes, on peut montrer que :

$$\Delta = N(d_1)$$

où d_1 est défini dans l'équation (13.20). Constituer une couverture delta-neutre pour une position courte sur un call européen implique de conserver une position longue sur $N(d_1)$ actions à tout instant. De façon analogue, la couverture en delta pour un achat de call européen implique de maintenir une position courte de $N(d_1)$ actions à tout instant.

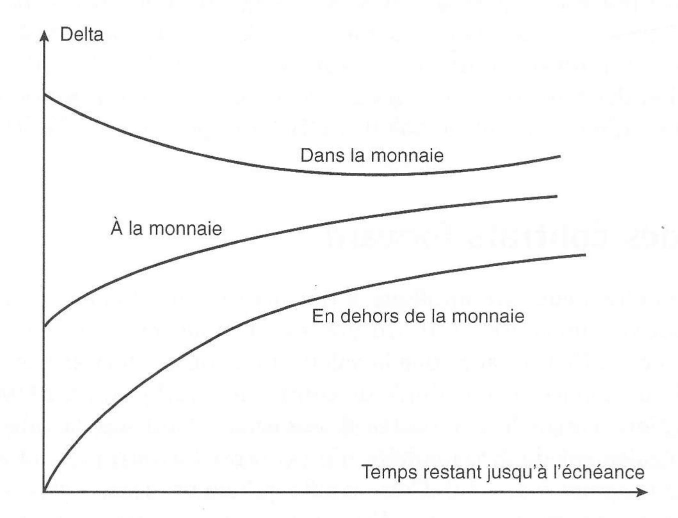


Graphique 15.3 : Variation du delta en fonction du cours de l'action : (a) option d'achat et (b) option de vente, sur une action ne versant pas de dividendes.

Pour un put européen portant sur une action ne versant pas de dividendes, le delta est égal à :

$$\Delta = N(d_1) - 1$$

Le delta est négatif, une position longue sur un put doit donc être couverte par une position longue sur l'action sous-jacente. À l'inverse, une vente de put doit être couverte par une position courte sur $N(d_1) - 1$ actions. Le graphique 15.3 montre les variations du delta d'un call et d'un put en fonction du cours de l'action. Le graphique 15.4 montre les variations du delta en fonction du temps restant jusqu'à l'échéance pour des calls dans la monnaie, à la monnaie et en dehors de la monnaie.



Graphique 15.4 : Variation du delta en fonction du temps restant à courir jusqu'à l'échéance pour un call.

Le delta d'autres options européennes

Pour les calls européens portant sur un actif versant un flux continu au taux q, on a :

$$\Delta = e^{-qT} N(d_1)$$

où d_1 est défini par l'équation (14.4). Pour le put européen correspondant, on a :

$$\Delta = e^{-qT}[N(d_1) - 1]$$

Lorsque l'actif sous-jacent est un indice, ces formules sont correctes si q désigne le rendement en dividende de l'indice. Lorsque le sous-jacent est une devise, q est le taux d'intérêt sans risque étranger, r_f. Enfin, si l'actif sous-jacent est un contrat futures, q est égal au taux sans risque domestique, r.

■ **Exemple 15.1**

Une banque française vend un put à 6 mois portant sur 1 000 000 GBP, avec un prix d'exercice de 1,6000 EUR/GBP, et désire établir un portefeuille delta-neutre. Le taux de change actuel est de 1,6200, le taux d'intérêt sans risque au Royaume-Uni est 13 %, le taux sans risque en France est 10 % et la volatilité de la livre sterling s'établit à 15 %. Dans ce cas, $S_0 = 1{,}62$, $K = 1{,}60$, $r = 0{,}10$, $r_f = 0{,}13$, $\sigma = 0{,}15$ et $T = 0{,}5$. Le delta du put sur la devise est alors :

$$[N(d_1) - 1]e^{-r_f T}$$

où d_1 est déduit de l'équation (14.7). Il peut ainsi être montré que :

$$d_1 = 0{,}0287 \text{ et } N(d_1) = 0{,}5115$$

Le delta du put est donc égal à –0,458. Il s'agit du delta d'une position longue sur un put (si le taux de change augmente de ΔS, le put baisse de 45,8 % de ΔS). Le delta de la position courte totale sur l'option est de +458 000. Pour établir une position delta-neutre, nous devons donc rajouter une position courte sur la livre sterling d'un montant de 458 000 GBP à la position sur l'option.

Le delta des contrats forward

Le concept de delta peut être appliqué à des instruments financiers autres que les options. Considérons un contrat forward portant sur une action ne versant pas de dividendes. L'équation (5.5) montre que la valeur d'un contrat forward est $S_0 - Ke^{-rT}$, où K est le prix d'exercice et T la durée du contrat forward jusqu'à maturité. Lorsque le cours de l'action change de ΔS, toutes choses égales d'ailleurs, la valeur du contrat forward varie également de ΔS. Le delta d'un contrat forward portant sur une seule action est donc toujours égal à 1,0. Cela signifie qu'une position courte sur un contrat forward peut être couverte par l'achat d'une action. Au contraire, une position longue sur un contrat forward peut être couverte par la vente à découvert d'une action[7].

7. Ce sont des procédés de couverture dits *hedge-and-forget*. Puisque le delta est toujours égal à 1,0, aucun changement de position dans l'action n'est nécessaire durant la vie du contrat.

Pour un actif versant un revenu ou un dividende de taux q, l'équation (5.7) montre que le delta du contrat forward est égal à e^{-qT}.

Le delta des contrats futures

L'équation (5.1) indique que le prix futures d'un contrat portant sur des actions ne versant pas de dividendes est égal à $S_0 e^{rT}$, où T est le temps restant à courir jusqu'à l'échéance du contrat. Cela montre que lorsque le cours de l'action varie de ΔS, toutes choses égales d'ailleurs, le prix futures varie de $\Delta S e^{rT}$. Puisque les contrats futures sont cotés sur le marché quotidiennement, le propriétaire d'un contrat futures (en position d'acheteur) réalise immédiatement un gain égal à ce montant. Le delta d'un futures est donc égal à e^{rT}. Pour un contrat futures portant sur un actif qui verse un dividende de taux q, l'équation (5.3) montre de manière semblable que le delta est égal à $e^{(r-q)T}$. Il est intéressant de remarquer que les deltas des futures et des forwards sont légèrement différents par le simple fait que l'un est coté sur un marché organisé et l'autre sur un marché OTC. Cela se vérifie même quand les taux d'intérêt sont constants et que les prix forward et futures sont identiques.

Parfois, un contrat futures est utilisé pour obtenir une position delta-neutre. Notons :

T : la maturité des contrats futures

H_A : la position sur un actif nécessaire pour une couverture delta-neutre

H_F : la position alternative sur un contrat futures nécessaire pour une couverture delta-neutre

Si l'actif sous-jacent est une action qui ne verse pas de dividendes, l'analyse que nous venons de mener montre que :

$$H_F = e^{-rT} H_A \tag{15.2}$$

Quand l'actif sous-jacent verse un dividende de taux q, nous obtenons :

$$H_F = e^{-(r-q)T} H_A \tag{15.3}$$

Pour un indice, q est le rendement en dividende de l'indice. Pour une devise, c'est le taux sans risque étranger, r_f, et nous obtenons donc :

$$H_F = e^{-(r-r_f)T} H_A \tag{15.4}$$

■ **Exemple 15.2**

Considérons l'option de l'exemple précédent où la couverture utilisant la devise nécessitait une position courte de 458 000 GBP. À partir de l'équation (15.4), une couverture utilisant des futures sur devise à 9 mois impliquerait une position courte sur futures de :

$$e^{-(0{,}10-0{,}13)\times 9/12} \times 458\ 000$$

soit 468 442 GBP. Puisque chaque contrat futures permet d'acheter ou de vendre 62 500 GBP, une position courte sur sept contrats pourrait être réalisée (sept est l'entier le plus proche du résultat 468 442/62 500).

Les aspects dynamiques de la couverture par le delta

Les tableaux 15.2. et 15.3 présentent deux exemples d'opérations de couverture par le delta pour le cas traité à la section 15.1. La couverture est censée être ajustée chaque semaine. La valeur initiale du delta peut être calculée à partir des données de la section 15.1 et est égale à 0,522. Dès que l'option est vendue, 2 557 800 € doivent être empruntés pour acheter les 52 200 actions au cours de 49 € l'unité. Le taux d'intérêt est de 5 %. Un coût de 2 500 € est donc encouru la première semaine au titre des intérêts de l'emprunt.

Dans le tableau 15.2, le cours de l'action tombe à la fin de la première semaine à 48,12 €. Le delta baisse alors à 0,458, et 6 400 actions sont vendues pour maintenir la couverture. Cette stratégie engendre 308 000 € de liquidités, et l'emprunt (en intégrant les intérêts à la fin de la première semaine) est réduit d'autant pour atteindre un niveau de 2 252 300 €. Au cours de la deuxième semaine, le cours de l'action descend à 47,37 € , le delta baisse de nouveau, et ainsi de suite. Vers la fin de la vie de l'option, à la semaine 20, il devient évident que l'option sera exercée et le delta approchera de la valeur 1,0. À la semaine 20, la position est donc entièrement couverte. Le vendeur de l'option recevra 5 000 000 € en échange de la livraison de ses actions, conformément au contrat d'option, et le coût total de couverture de ses 20 contrats d'options d'achat se montera à 263 300 €.

Le tableau 15.3 illustre une séquence alternative d'événements tels que l'option arrive à maturité en dehors de la monnaie. Comme il devient évident que l'option ne sera pas exercée, la valeur du delta approche de zéro. À la semaine 20, l'émetteur a une position nue et le coût cumulé est alors de 256 600 €.

Dans les tableaux 15.2 et 15.3, les coûts de couverture de l'option, lorsqu'on les actualise en début de période, sont proches mais pas exactement identiques à l'évaluation de Black et Scholes de 240 000 €. Si le procédé de couverture fonctionnait parfaitement, le coût de cette protection serait, après actualisation, exactement égal à celui de Black et Scholes, quelle que soit la simulation des trajectoires de cours d'action qui serait testée. La raison de l'écart dans le coût de couverture par le delta réside dans le fait que la protection n'est réajustée qu'une fois par semaine. Si l'ajustement est plus fréquent, l'écart s'en trouve réduit. Bien évidemment, les exemples des tableaux 15.2 et 15.3 sont idéalisés dans la mesure où on suppose que la volatilité reste constante et qu'il n'y a pas de coûts de transaction.

Le tableau 15.4 donne des statistiques sur la performance de la couverture delta-neutre obtenue à partir de 1 000 simulations de trajectoires de cours. Comme dans le tableau 15.1, la mesure de performance est le ratio de l'écart-type du coût de la couverture de l'option sur l'évaluation de l'option d'après Black et Scholes. La couverture delta-neutre constitue une nette amélioration par rapport à une stratégie à seuils de déclenchement. À la différence de cette dernière, la performance de la stratégie de couverture par le delta s'améliore avec la fréquence des réajustements.

Le but de la couverture en delta est de maintenir une valeur de position pour l'institution financière aussi proche que possible de la valeur initiale. Au départ, la valeur de l'option vendue est de 240 000 €. Dans la situation dépeinte dans le tableau 15.2,

Tableau 15.2 : Simulation de couverture par le delta (l'option est souvent dans la monnaie ; le coût de la couverture se monte à 263 300 €)

Semaine	Cours de l'action	Delta	Actions achetées (en K€)	Coûts des actions dont les intérêts (en K€)	Coûts cumulés (K€)	Coûts d'intérêts
0	49,00	0,522	52 200	2 557,8	2 557,8	2,5
1	48,12	0,458	–6 400	–308,0	2 252,3	2,2
2	47,37	0,400	–5 800	–274,7	1 979,8	1,9
3	50,25	0,596	19 600	984,9	2 966,6	2,9
4	51,75	0,693	9 700	502,0	3 471,5	3,3
5	53,12	0,774	8 100	430,3	3 905,1	3,8
6	53,00	0,771	–300	–15,9	3 893,0	3,7
7	51,87	0,706	–6 500	–337,2	3 559,5	3,4
8	51,38	0,674	–3 200	–164,4	3 398,5	3,3
9	53,00	0,787	11 300	598,9	4 000,7	3,8
10	49,88	0,550	–23 700	–1 182,2	2 822,3	2,7
11	48,50	0,413	–13 700	–664,4	2 160,6	2,1
12	49,88	0,542	12 900	643,5	2 806,2	2,7
13	50,37	0,591	4 900	246,8	3 055,7	2,9
14	52,13	0,768	17 700	922,7	3 981,3	3,8
15	51,88	0,759	–900	–46,7	3 938,4	3,8
16	52,87	0,865	10 600	560,4	4 502,6	4,3
17	54,87	0,978	11 300	620,0	5 126,9	4,9
18	54,62	0,990	1 200	65,5	5 197,3	5,0
19	55,87	1,000	1 000	55,9	5 258,2	5,1
20	57,25	1,000	0	0,0	5 263,3	

la valeur de l'option peut être estimée à 414 500 € à la semaine 9. Ainsi, l'institution financière a perdu 174 500 € sur sa position en options. Sa position monétaire en semaine 9, mesurée par le coût cumulé des actions et des intérêts, est supérieure de 1 442 900 € à celle de la semaine 0. La valeur des actions détenues a augmenté de 2 557 800 € à 4 171 100 € (= 78 700 × 53 €). Le résultat net se traduit par une variation de seulement 4 100 € durant la période de neuf semaines.

D'où proviennent les coûts ?

Le procédé de couverture en delta des tableaux 15.2 et 15.3 crée en fait une position longue synthétique en option. Celle-ci neutralise la position courte résultant de l'option vendue. Cette technique suppose généralement de vendre les actions juste après que leur cours a baissé et de les acheter juste après une hausse. Le coût de 240 000 € provient de la moyenne des différences entre le prix payé pour les actions et le montant obtenu lors de leur vente.

Tableau 15.3 : Simulation de couverture par le delta (l'option est souvent en dehors de la monnaie ; le coût de la couverture se monte à 256 600 €)

Semaine	Cours de l'action	Delta	Actions achetées (en K€)	Coûts des actions dont les intérêts (en K€)	Coûts cumulés (K€)	Coûts d'intérêts
0	49,00	0,522	52 200	2 557,8	2 557,8	2,5
1	49,75	0,568	4 600	228,9	2 789,2	2,7
2	52,00	0,705	13 700	712,4	3 504,3	3,4
3	50,00	0,579	–12 600	–630,0	2 877,7	2,8
4	48,38	0,459	–12 000	–580,6	2 299,9	2,2
5	48,25	0,443	–1 600	–77,2	2 224,9	2,1
6	48,75	0,475	3 200	156,0	2 383,0	2,3
7	49,63	0,540	6 500	322,6	2 707,9	2,6
8	48,25	0,420	–12 000	–579,0	2 131,5	2,1
9	48,25	0,410	–1 000	-48,2	2 085,4	2,0
10	51,12	0,658	24 800	1267,8	3 355,2	3,2
11	51,50	0,692	3 400	175,1	3 533,5	3,4
12	49,88	0,542	–15 000	–748,2	2 788,7	2,7
13	49,88	0,538	–400	–20,0	2 771,4	2,7
14	48,75	0,400	–13 800	–672,7	2 101,4	2,0
15	47,50	0,236	–16 400	–779,0	1 324,4	1,3
16	48,00	0,261	2 500	120,0	1 445,7	1,4
17	46,25	0,062	–19 900	–920,4	526,7	0,5
18	48,13	0,183	12 100	582,4	1 109,6	1,1
19	46,63	0,007	–17 600	–820,7	290,0	0,3
20	48,12	0,000	–700	–33,7	256,6	

Le delta d'un portefeuille

Le delta d'un portefeuille d'options ou d'autres produits dérivés qui dépendent d'un seul actif de valeur S est :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S}$$

où Π représente la valeur du portefeuille.

Le delta du portefeuille peut être calculé à partir des deltas de chacune des options du portefeuille prises individuellement du fait de la linéarité du passage aux dérivées partielles. Si un portefeuille est constitué d'une quantité ω_i d'une option i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, le delta du portefeuille est obtenu par :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i$$

Tableau 15.4 : Performance de la couverture delta-neutre (la performance est mesurée par le ratio : écart-type du coût de création et de couverture de l'option sur valeur théorique de l'option)

Durée entre deux rééquilibrages de couverture (en semaines)	5	4	2	1	0,5	0,25
Performance mesurée	0,43	0,39	0,26	0,19	0,14	0,09

où Δ_i représente le delta de l'option i. La formule peut être utilisée pour calculer la position dans l'actif sous-jacent ou dans un contrat futures sur l'actif sous-jacent nécessaire à la constitution d'une couverture par le delta. Lorsque cette position a été établie, le delta du portefeuille est nul (position delta-neutre).

Supposons qu'une institution financière française ait les trois positions suivantes dans des options sur le dollar australien :

1. Une position longue dans 100 000 calls de prix d'exercice 0,55 EUR/AUD et d'échéance à 3 mois. Le delta de chaque option est de 0,533.
2. Une position courte dans 200 000 calls de prix d'exercice 0,56 EUR/AUD et d'échéance à 5 mois. Le delta de chaque option est de 0,468
3. Une position courte dans 50 000 puts de prix d'exercice 0,56 EUR/AUD et d'échéance à 2 mois. Le delta de chaque option est de –0,508.

Le delta de l'ensemble du portefeuille est égal à :

$$100\ 000 \times 0{,}533 - 200\ 000 \times 0{,}468 - 50\ 000 \times (-0{,}508) = -14\ 900$$

Cela signifie que le portefeuille peut être rendu delta-neutre avec une position longue de 14 900 dollars australiens.

Un contrat forward à 6 mois pourrait également être utilisé pour établir une position delta-neutre dans cet exemple. Supposons que le taux d'intérêt sans risque soit de 8 % par an en Australie et de 5 % en France ($r = 0{,}05$ et $r_f = 0{,}08$). Le delta d'un contrat forward d'échéance T portant sur un dollar australien est $e^{-r_f T}$, soit $e^{-0{,}08\times 0{,}5} = 0{,}9608$. La position longue dans des contrats forward sur un dollar australien pour établir un portefeuille delta-neutre est donc de 14 900/0,9608 = 15 508.

Une alternative consiste à utiliser un contrat futures à 6 mois. Grâce à l'équation (15.4), on peut calculer que la position longue dans des contrats futures sur un dollar australien pour établir une position delta-neutre porte sur :

$$14900e^{-(0{,}05-0{,}08)\times 0{,}5} = 15\ 125$$

Les coûts de transactions

Maintenir une position delta-neutre dans une seule option et un actif sous-jacent de la façon qui vient d'être décrite est susceptible de devenir prohibitif en raison des coûts engendrés par les transactions. Constituer une position de couverture en delta-neutre est plus facile si le portefeuille d'options est important. Un seul échange de titres est nécessaire pour remettre à zéro la position delta de l'ensemble du portefeuille. Les coûts de transaction liés à la couverture sont alors compensés par les résultats obtenus sur les différents échanges.

15.5 Le thêta

Le thêta d'un portefeuille d'options, Θ, se définit comme le taux de variation de la valeur du portefeuille par rapport à la durée de vie de l'option, toutes choses égales par ailleurs. Pour un call européen sur une action ne versant pas de dividendes, il se déduit de la formule de Black et Scholes ainsi :

$$\Theta = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

où d_1 et d_2 sont définis par l'équation (13.20) et :

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \tag{15.5}$$

Pour un put européen sur action, on obtient (voir exercice 13.17) :

$$\Theta = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2)$$

Pour un call européen portant sur un actif versant un dividende au taux q :

$$\Theta = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} + qS_0 N(d_1)e^{-qT} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

où d_1 et d_2 sont définis dans l'équation (14.4).

Enfin, pour le put européen correspondant, on peut écrire :

$$\Theta = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} - qS_0 N(-d_1)e^{-qT} + rKe^{-rT}N(-d_2)$$

Lorsque l'actif est un indice, q est le rendement en dividende de l'indice dans les deux dernières équations. Lorsqu'il s'agit d'une devise, q est le taux sans risque étranger, r_f. Enfin, lorsqu'il s'agit de contrats futures, q est égal à r, le taux d'intérêt sans risque.

Dans ces formules, le temps est mesuré en années. Généralement, lorsque le thêta est affiché, le temps est mesuré en jours de manière que le thêta représente la variation

de valeur du portefeuille quand une journée s'est écoulée et qu'aucun autre paramètre n'a été modifié. Nous pouvons alors mesurer le thêta en « jours calendaires » ou en « jours de cotation ». Pour obtenir le thêta en jours calendaires, les formules doivent être divisées par 365. Pour obtenir le thêta en jours de cotation, elles doivent être divisées par 252. (Le logiciel DerivaGem mesure le thêta en jours calendaires.)

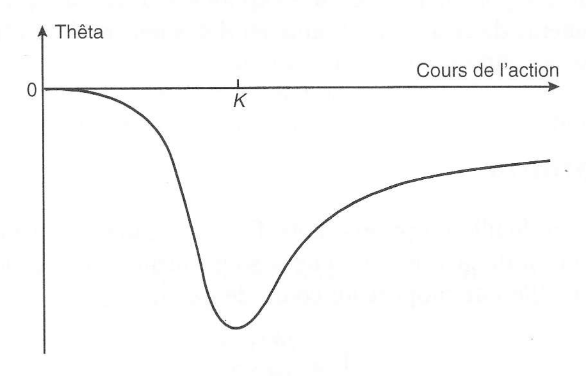
■ **Exemple 15.3**

Soit un put à 4 mois portant sur un indice ; la valeur de l'indice est 305, le prix d'exercice 300, le taux de rendement en dividende est de 3 % par an, le taux d'intérêt sans risque 8 % par an, et la volatilité de l'indice 25 % par an. Dans ce cas, $S_0 = 305$; $K = 300$; $q = 0{,}03$; $r = 0{,}08$; $\sigma = 0{,}25$ et $T = 0{,}3333$. Le thêta de l'option est donc :

$$-\frac{S_0 N'(d_1)\sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} - qS_0 N(-d_1)e^{-qT} + rKe^{-rT}N(-d_2) = -18{,}15$$

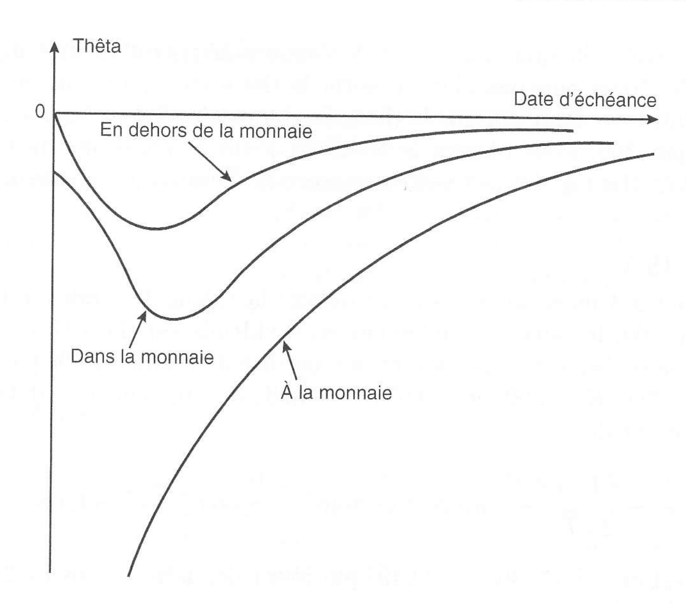
Le thêta est de $-18{,}15/365 = -0{,}0497$ par jour calendaire ou $-18{,}15/252 = -0{,}0720$ par jour de cotation.

Le thêta d'une option est généralement négatif[8] car la valeur de l'option diminue lorsqu'on se rapproche de l'échéance. La variation du thêta en fonction du cours de l'action, pour un call, est illustrée dans le graphique 15.5. Lorsque le cours de l'action est très bas, le thêta est presque nul. Si l'option est à la monnaie, le thêta est important et négatif. Plus le cours de l'action augmente, plus le thêta tend vers $-rKe^{-rT}$. Le graphique 15.6 montre les variations de Θ en fonction du temps restant jusqu'à la maturité de l'option pour des calls dans la monnaie, à la monnaie ou en dehors de la monnaie.



Graphique 15.5 : Variation du thêta d'un call européen en fonction du cours de l'action.

8. Il peut y avoir une exception pour un put européen dans la monnaie sur une action ne versant pas de dividendes ou pour un call européen dans la monnaie et portant sur une devise au taux d'intérêt très élevé.



Graphique 15.6 : Schémas classiques de la variation du thêta d'un call européen en fonction du temps restant jusqu'à l'échéance.

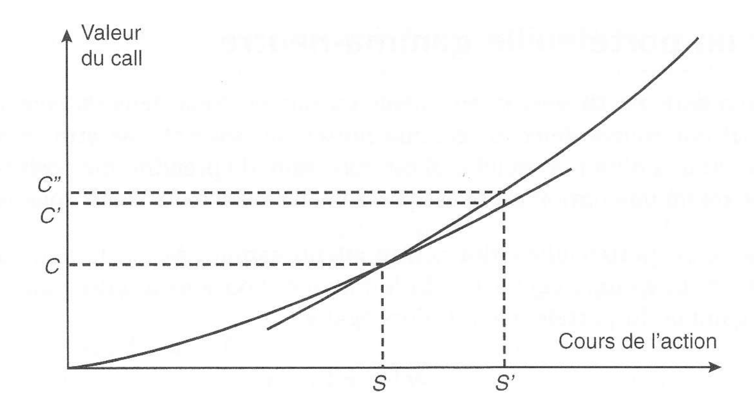
La nature de thêta, en tant que paramètre de couverture, est différente de celle du delta. En effet, s'il y a une incertitude quant à la valeur future de l'action, il n'y en a pas sur le fait que le temps passe. Il est normal de vouloir se couvrir contre les variations imprévues du cours de l'actif sous-jacent, mais cela n'a aucun sens de vouloir se couvrir contre l'effet du temps qui passe dans un portefeuille d'options. Malgré cela, de nombreux traders considèrent le thêta comme une statistique descriptive très pratique pour un portefeuille. Cela s'explique par le fait que, comme nous le verrons ultérieurement, dans un portefeuille en delta-neutre, le thêta peut remplacer le gamma.

15.6 Le gamma

Le gamma d'un portefeuille d'options, noté Γ, est le taux de variation du delta du portefeuille en fonction de la valeur de l'actif sous-jacent. C'est la dérivée seconde de la valeur du portefeuille par rapport au cours de l'actif :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$

Si le gamma est faible, le delta varie lentement, et il n'est pas nécessaire d'ajuster fréquemment le portefeuille pour maintenir un portefeuille delta-neutre. Par contre, si le gamma est important en valeur absolue, le delta est très sensible aux variations du cours de l'actif sous-jacent. Il est alors risqué de laisser un portefeuille delta-neutre inchangé trop longtemps. Le graphique 15.7 illustre ce point. Lorsque le cours de l'action varie de S à S', la couverture par le delta suppose que la valeur de l'option varie de C à C'. La différence entre C' et C'' constitue l'écart de couverture. Cet écart



Graphique 15.7 : Écart de couverture dû au gamma.

dépend de la courbure de la relation liant la valeur de l'option au cours de l'action. Le gamma mesure cette courbure[9].

Supposons que ΔS représente la variation du cours de l'actif sous-jacent durant un petit intervalle de temps de longueur Δt, et que $\Delta\Pi$ soit la variation de valeur du portefeuille considéré. Si les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt sont ignorés, l'annexe de ce chapitre montre que, pour un portefeuille delta-neutre, nous avons :

$$\Delta\Pi = \Theta\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma\Delta S^2 \qquad (15.6)$$

où Θ eprésente le thêta du portefeuille. Le graphique 15.8 montre la nature des relations entre $\Delta\Pi$ et ΔS. Lorsque le gamma est positif, le thêta tend à être négatif. La valeur du portefeuille baisse s'il n'y a aucune variation de S, mais augmente s'il y a une importante variation, positive ou négative, de S. Lorsque le gamma est négatif, le thêta tend à être positif. La valeur du portefeuille augmente alors s'il n'y a aucune variation de S, mais baisse si S subit une variation importante, en positif ou en négatif. Plus la valeur absolue du gamma augmente, plus la sensibilité de la valeur du portefeuille augmente.

■ Exemple 15.4

Supposons que le gamma d'un portefeuille d'options delta-neutre soit de –10 000. L'équation (15.6) montre que si le cours de l'actif sous-jacent subit une variation de +2 ou –2 sur une courte période de temps, la valeur du portefeuille varie d'environ $0{,}5 \times 10\,000 \times 2^2 = 20\,000$ €.

9. En effet, le gamma d'une option est parfois appelé « courbure » par les praticiens.

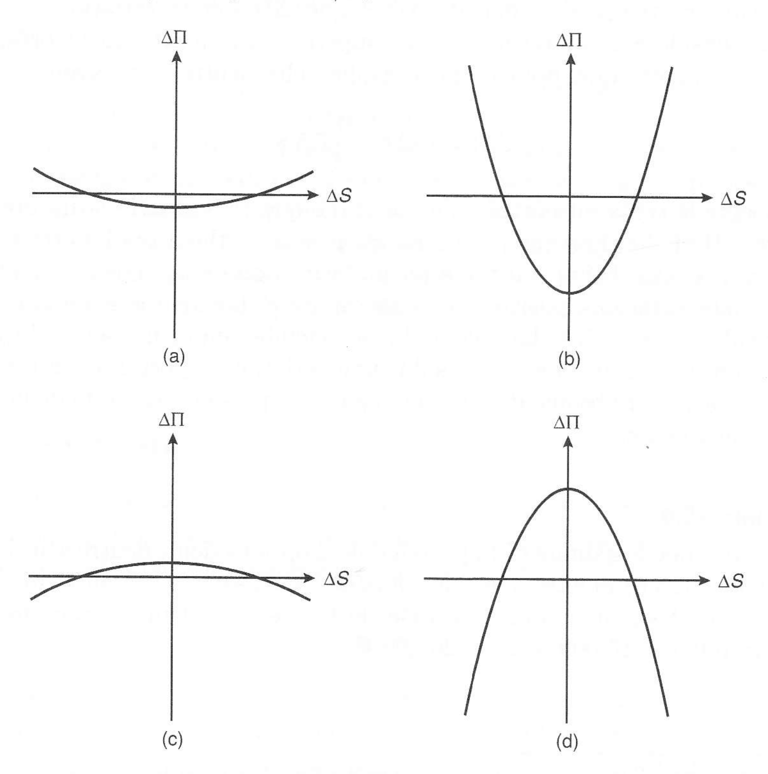
Établir un portefeuille gamma-neutre

Une position dans l'actif sous-jacent même ou une position dans un contrat forward sur cet actif ont toutes deux un gamma nul et ne peuvent pas être utilisées pour modifier le gamma d'un portefeuille. Il est nécessaire de prendre une position dans un instrument tel qu'une option qui n'est pas liée linéairement à l'actif sous-jacent.

Supposons qu'un portefeuille delta-neutre ait un gamma égal à Γ et qu'une option négociable ait un gamma égal à Γ_T. Si le nombre d'options ajoutées au portefeuille est ω_T, le gamma du portefeuille est alors égal à :

$$\omega_T \Gamma_T + \Gamma$$

Ainsi, la position en options, nécessaire pour établir un portefeuille gamma-neutre, est $-\Gamma/\Gamma_T$. Ajouter une option négociable risque également de modifier le delta du portefeuille et nécessite donc de changer la position dans l'actif sous-jacent pour maintenir la neutralité du delta. Notez que le portefeuille est en gamma-neutre seulement sur une courte période de temps. Au fur et à mesure que le temps s'écoule, la neutralité du gamma ne peut être maintenue que si la position dans l'option négociable est ajustée de manière à être toujours égale à $-\Gamma/\Gamma_T$.



Graphique 15.8 : Relations entre $\Delta\Pi$ et ΔS pour un portefeuille delta-neutre avec : (a) un gamma faiblement positif, (b) un gamma fortement positif, (c) un gamma faiblement négatif et (d) un gamma fortement négatif.

Rendre gamma-neutre un portefeuille déjà delta-neutre peut être considéré comme une première correction du fait que la position dans l'actif sous-jacent ne peut pas être modifiée continuellement. La neutralité du delta permet une protection contre une modeste variation du cours de l'actif, entre deux ajustements. La neutralité du gamma permet une protection contre des variations du cours de l'actif d'amplitude plus importante, entre deux dates d'ajustement de la couverture. Supposons qu'un portefeuille soit delta-neutre et qu'il ait un gamma de –3 000. Le delta et le gamma d'une option d'achat donnée sont respectivement de 0,62 et 1,50. Le portefeuille peut être établi en gamma-neutre en lui ajoutant une position longue de $\frac{3\,000}{1{,}5} = 2\,000$.

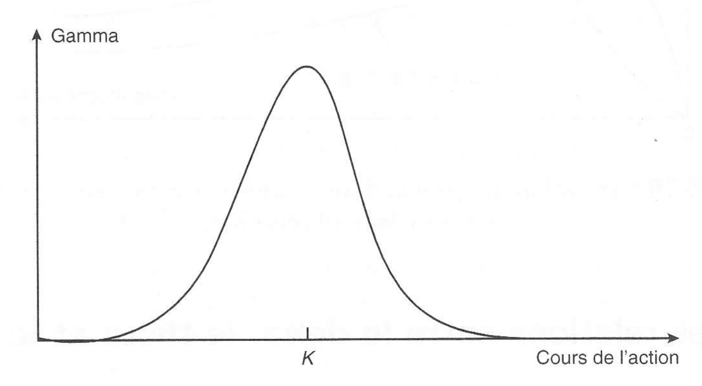
Néanmoins, le delta du portefeuille sera modifié de zéro à $2\,000 \times 0{,}62 = 1\,240$. Une quantité de l'actif sous-jacent représentant 1 240 doit alors être vendue pour conserver au portefeuille son caractère delta-neutre.

Le calcul du gamma

Pour un call ou un put européens portant sur une action ne versant aucun dividende, le gamma s'écrit :

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

où d_1 est défini par l'équation (13.20) et $N'(x)$ par l'équation (15.5). Le gamma est toujours positif et varie avec S_0 de la façon illustrée dans le graphique 15.9. La variation du gamma en fonction du temps restant jusqu'à l'échéance pour des options en dehors de la monnaie, à la monnaie et dans la monnaie est indiquée dans le graphique 15.10. Pour une option à la monnaie, le gamma augmente quand la durée de vie de l'option diminue. Ainsi, les options à la monnaie ayant une durée de vie très courte ont des gamma très élevés, elles sont donc très sensibles aux variations brutales du cours de l'action.



Graphique 15.9 : Variation du gamma d'une option en fonction du cours de l'action.

Pour un call ou un put européens sur une action versant un dividende au taux q, le gamma est donné par :

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

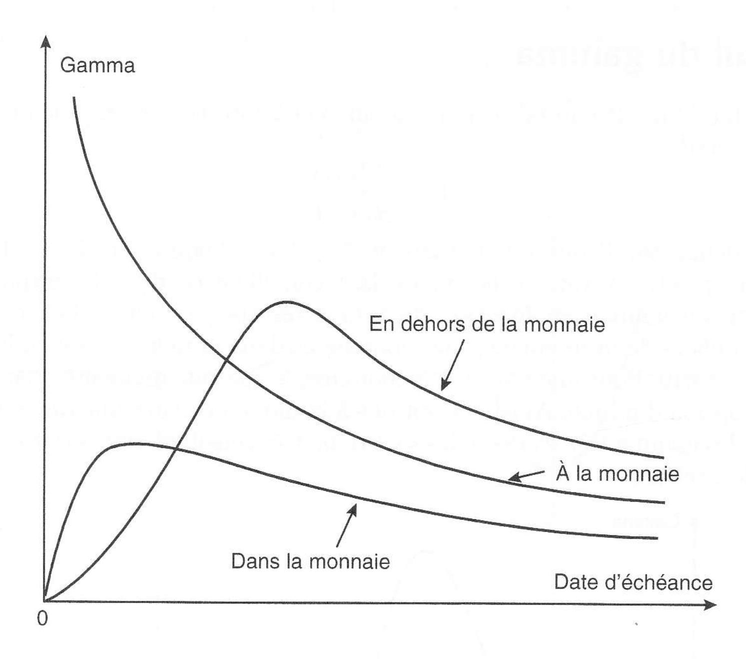
où d_1 est défini par l'équation (14.4). Lorsque l'actif est un indice, q est le rendement en dividende. S'il s'agit d'une devise, q est le taux sans risque étranger, r_f. Pour un contrat à terme, $q = r$.

■ **Exemple 15.5**

Considérons à nouveau les données de l'exemple 15.4, c'est-à-dire $S_0 = 305$, $K = 300$, $q = 0{,}03$, $r = 0{,}08$, $\sigma = 0{,}25$ et $T = 4/12$. Le gamma de l'indice est obtenu par :

$$\frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}} = 0{,}00857$$

Ainsi, une augmentation d'une unité de l'indice (qui passerait de 305 à 306) accroît le delta de l'option approximativement de 0,00857.



Graphique 15.10 : Variation du gamma d'une option sur action en fonction du temps restant jusqu'à l'échéance.

15.7 Les relations entre le delta, le thêta et le gamma

La valeur d'un produit dérivé sur une action ne versant aucun dividende doit satisfaire l'équation différentielle (13.16). Il s'ensuit que la valeur d'un portefeuille de tels produits dérivés satisfait également l'équation différentielle :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + rS\frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = r\Pi$$

Puisque :

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \quad \Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$

nous pouvons alors écrire :

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi \tag{15.7}$$

Des résultats semblables peuvent être établis pour d'autres actifs sous-jacents (voir exercice 15.19).

Pour un portefeuille delta-neutre, $\Delta = 0$ et :

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi$$

Cela montre bien que, quand Θ est important et positif, le gamma tend à être important et négatif, et *vice versa*. Cela correspond bien à ce que montre le graphique 15.8 et explique pourquoi le thêta peut être considéré comme un substitut du gamma pour un portefeuille delta-neutre.

15.8 Le vega

Jusqu'à présent, nous avons implicitement supposé que la volatilité de l'actif sous-jacent d'un produit dérivé était constante. En pratique, les volatilités varient au fil du temps. Cela signifie que la valeur d'un produit dérivé est susceptible de changer simplement à cause des variations de la volatilité, au même titre que lorsque le cours de l'actif varie ou que le temps s'écoule.

Le vega d'un portefeuille de produits dérivés, ν, représente le taux de variation de la valeur du portefeuille en fonction de la volatilité de l'actif sous-jacent[10] :

$$\nu = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}$$

Si la valeur absolue du vega est importante, la valeur du portefeuille est très sensible au moindre changement de volatilité. Si le vega est faible, en valeur absolue, un changement de la volatilité n'aura qu'un léger impact sur la valeur du portefeuille.

Une position dans un actif sous-jacent présente un vega nul. Cependant, le vega d'un portefeuille peut être modifié en ajoutant une position en options. Si ν est le vega du portefeuille et ν_T est le vega d'une option donnée, une position de $-\frac{\nu}{\nu_T}$ de cette option rend le portefeuille vega-neutre. Malheureusement, un portefeuille qui est gamma-neutre ne sera généralement pas vega-neutre, et *vice versa*. Si un arbitragiste a besoin d'un portefeuille qui est à la fois gamma-neutre et vega-neutre, au moins deux produits dérivés sur le même sous-jacent sont nécessaires.

10. Vega est le nom donné à l'une des « lettres grecques » de l'évaluation des options, mais ce n'est pas une lettre de l'alphabet grec.

■ **Exemple 15.6**

Soit un portefeuille delta-neutre, avec un gamma de –5 000 et un vega de –8 000. Une option négociable a un gamma de 0,5, un vega de 2,0 et un delta de 0,6. Le portefeuille peut être établi en vega-neutre en incluant une position longue dans 4 000 options négociables. Cela augmenterait le delta de 2 400 et nécessiterait la vente de 2 400 unités d'actif sous-jacent pour maintenir la neutralité du delta. Le gamma du portefeuille passerait de –5 000 à –3 000.

Pour que le portefeuille soit gamma-neutre et vega-neutre à la fois, nous supposons qu'il y a une seconde option négociable avec un gamma de 0,8, un vega de 1,2 et un delta de 0,5. Si ω_1 et ω_2 sont les quantités respectives des deux options négociables incluses dans le portefeuille, il est nécessaire que :

$$-5\ 000 + 0{,}5\omega_1 + 0{,}8\omega_2 = 0$$

$$-8\ 000 + 2{,}0\omega_1 + 1{,}2\omega_2 = 0$$

La solution de ces équations est $\omega_1 = 400$ et $\omega_2 = 6\ 000$. Le portefeuille peut donc être établi en gamma-neutre et en vega-neutre en ajoutant 400 des premières options négociables et 6 000 des secondes. Le delta du portefeuille, après cet ajout de positions dans ces deux options, est alors de $400 \times 0{,}6 + 6\ 000 \times 0{,}5 = 3\ 240$, c'est-à-dire 3 240 unités d'actif sous-jacent qui devront être vendues pour maintenir la neutralité du delta.

Pour un call ou un put européens portant sur une action ne versant aucun dividende, le vega est obtenu par :

$$\nu = S_0\sqrt{T}N'(d_1)$$

où d_1 est défini dans l'équation (13.20) et $N'(x)$ dans l'équation (15.5).

Pour un call ou un put européens portant sur un actif versant un dividende au taux q :

$$\nu = S_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-qT}$$

où d_1 est défini par l'équation (14.4). Lorsque l'actif est un indice, une devise ou un contrat futures, les mêmes adaptations que les précédentes s'appliquent. Le vega d'une option classique, qu'elle soit européenne ou américaine, est toujours positif. La variation du vega en fonction de S_0 est illustrée dans le graphique 15.11.

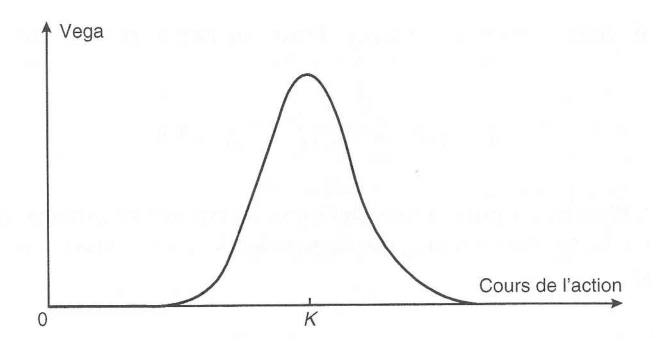
■ **Exemple 15.7**

En gardant les données des exemples précédents, $S_0 = 305$, $K = 300$, $q = 0{,}03$, $r = 0{,}08$, $\sigma = 0{,}25$ et $T = 4/12$, le vega de l'indice est obtenu par :

$$S_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-qT} = 66{,}44$$

Ainsi, 1 % (0,01) d'augmentation de la volatilité (qui passe de 25 % à 26 %) fait augmenter la valeur de l'option d'environ 0,6644 (= 0,01 × 66,44).

Calculer le vega à partir du modèle de Black et Scholes et de ses extensions peut paraître étrange car l'une des hypothèses de ce modèle est une volatilité constante. Il



Graphique 15.11 : Variation du vega d'une option en fonction du cours de l'action.

serait théoriquement plus juste de calculer le vega à partir d'un modèle dans lequel la volatilité est supposée stochastique. Cependant, il apparaît que le vega calculé à partir d'un modèle à volatilité stochastique est très semblable à celui qui est calculé d'après Black et Scholes. Ainsi, la pratique consistant à calculer le vega à partir d'un modèle dans lequel la volatilité est constante fonctionne relativement bien[11].

Une position gamma-neutre protège contre d'importantes variations du cours de l'actif sous-jacent entre deux réajustements de couverture. Une position vega-neutre protège contre les variations de σ. Comme on aurait pu s'y attendre, le choix de la meilleure option pour établir une couverture en delta ou en gamma dépend du délai entre deux ajustements de la position et de la variabilité de la volatilité[12].

Quand les volatilités changent, les volatilités implicites des options courtes ont tendance à réagir plus que celles des options longues. Le vega d'un portefeuille est alors calculé en modifiant dans une moindre mesure les volatilités des options longues. Une façon de traiter ce problème est exposée à la section 19.6.

15.9 Le rhô

Le rhô d'un portefeuille d'options est le taux de variation de la valeur du portefeuille en fonction du taux d'intérêt :

$$\text{rhô} = \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

Pour un call européen sur une action ne versant pas de dividendes, on a :

$$\text{rhô (call)} = KTe^{-rT}\ N(d_2)$$

11. Voir J. C. Hull et A. White, « The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities », *Journal of Finance*, 42 (juin 1987), 281-300; J. C. Hull et A. White, « An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility », *Advances in Futures and Options Research*, 3 (1988), 27-61.

12. Pour approfondir ce sujet, voir J. C. Hull et A. White, « Hedging the Risks from Writing Foreign Currency Options », *Journal of International Money and Finance*, 6 (juin 1987), 131-52.

où d_2 est défini dans l'équation (13.20). Pour un put européen sur le même type d'actif :

$$\text{rhô (put)} = -KTe^{-rT}\ N(-d_2)$$

Ces mêmes formules s'appliquent à un call et un put européens portant sur des actions, ou des indices d'actions, versant un taux de dividende q, en prenant cette fois d_2 selon l'équation (14.4).

Exemple 15.8

Avec les données des exemples précédents, $S_0 = 305$, $K = 300$, $q = 0{,}03$, $r = 0{,}08$, $\sigma = 0{,}25$ et $T = 4/12$, le rhô de l'option est égal à :

$$-KTe^{-rT}\ N(-d_2) = -42{,}6$$

Cela signifie que pour une variation de 1 % (0,01) du taux d'intérêt sans risque (qui passe alors de 8 % à 9 %), la valeur de l'option diminue de 0,426 (0,01 × 42,6).

Dans le cas d'options sur devises, il y a deux rhô correspondant aux deux taux d'intérêt. Le rhô correspondant au taux d'intérêt domestique est donné par les formules présentées auparavant, mais avec d_2 tiré de l'équation (14.7). Le rhô correspondant au taux étranger pour un call européen sur une devise est :

$$\text{rhô} = -Te^{-r_f T} S_0 N(d_1)$$

et pour un put européen :

$$\text{rhô} = Te^{-r_f T} S_0 N(-d_1)$$

où d_1 est donné par l'équation (14.7).

Pour un call européen sur futures, rhô est égal à $-cT$, et pour un put européen sur futures, rhô est égal à $-pT$, où c et p sont les valeurs respectives du call et du put.

Encadré 15.1 La couverture dynamique en pratique

La configuration typique utilisée par les institutions financières consiste à donner à un trader ou à un groupe de traders la responsabilité du portefeuille d'actifs dérivés portant sur un sous-jacent donné. Par exemple, un trader de Goldman Sachs peut s'occuper de tous les actifs dérivés dont le support est une devise particulière. Un système informatique calcule les valeurs de positions et les coefficients de gestion (les lettres grecques) du portefeuille. Les limites sont définies pour chaque coefficient et un trader qui veut les dépasser doit en obtenir l'autorisation. La limite en delta est souvent définie comme la valeur maximum équivalente exprimée en unités de sous-jacent. Par exemple, la limite en delta chez Goldman Sachs sur les dérivés de Microsoft est de 10 millions de dollars. Si Microsoft cote 50 $, la valeur absolue de delta ne peut excéder 200 000.

Les traders vont souvent chercher une position delta-neutre, ou dont le delta est proche de 0, à la fin de chaque journée. Les gamma et vega sont aussi gérés, mais pas sur une base journalière. Sur de nombreux marchés, les institutions financières réalisent la majorité de leurs transactions en vendant des calls ou des puts à leurs clients. Les calls et les puts vendus ont des gamma et des vega négatifs. Il s'ensuit que, au fur et à mesure que le temps s'écoule, le gamma et le vega du portefeuille détenu par ces institutions tendent à devenir de plus en plus négatifs.

Les traders employés par ces institutions sont donc toujours à la recherche de moyens pour acheter des options (pour acquérir un gamma et un vega positifs) à des prix compétitifs. Ce problème est cependant atténué par le fait que les options sont souvent proches de la monnaie lorsqu'elles sont initialement vendues sur le marché. Elles ont donc des gamma et des vega relativement élevés. Mais, lorsque le temps passe, elles peuvent devenir en dehors de la monnaie ou dans la monnaie. Dans de tels cas, leurs gamma et leurs vega deviennent petits et portent peu à conséquence.

15.10 Les réalités de la couverture

Dans un monde idéal, les traders travaillant pour les institutions financières seraient capables de réajuster leurs portefeuilles très fréquemment dans le but de maintenir un delta-neutre, un gamma-neutre, un vega-neutre, et ainsi de suite. En pratique, cela n'est pas réalisable. Lorsqu'ils gèrent un important portefeuille dépendant d'un seul actif sous-jacent, les traders maintiennent le delta-neutre au moins une fois par jour en échangeant l'actif sous-jacent. Malheureusement, un gamma-neutre et un vega-neutre sont moins faciles à maintenir en raison de la difficulté à trouver des options ou autres produits dérivés non linéaires, dans les volumes requis, et ce à des prix compétitifs (voir l'encadré 15.1 pour une discussion sur la pratique de la couverture dynamique).

Il y a d'importantes économies d'échelle à réaliser en vendant des options. Comme nous le notions précédemment, maintenir une position delta-neutre quotidiennement pour une option individuelle sur, disons, le CAC 40 aurait un coût prohibitif. Mais il est réaliste de le faire pour un portefeuille de plusieurs centaines d'options sur cet indice. C'est parce que le coût de réajustement quotidien (par des transactions sur les actions de l'indice, ou sur des futures sur indices) est couvert par les profits engendrés sur ces transactions.

15.11 L'analyse de scénario

Au-delà de la surveillance des risques tels que les delta, gamma et vega, les traders d'options procèdent souvent à une analyse de scénario. Celle-ci suppose de calculer le gain ou la perte des portefeuilles sur une période spécifiée avec une variété de scénarios. La période d'étude choisie dépend en général de la liquidité des instruments. Les

scénarios peuvent être soit sélectionnés par la direction de la société, soit engendrés par un modèle.

Considérons une banque avec un portefeuille d'options sur une devise étrangère. La valeur du portefeuille dépend essentiellement de deux variables, le taux de change et la volatilité de celui-ci. Supposons que le taux de change soit actuellement de 1,0000 et que sa volatilité soit de 10 % par an. La banque peut constituer un tableau tel que le tableau 15.5 qui montre les gains et les pertes susceptibles de survenir durant une période de deux semaines sous différents scénarios. Ce tableau comporte sept taux de change différents et trois niveaux de volatilité. Puisque la variation d'un écart-type du taux de change durant la période de deux semaines est de 0,02, les variations du taux de change considérées ici sont d'environ un, deux et trois écarts-types.

Dans le tableau 15.5, la perte la plus importante se situe dans le coin en bas à droite. Cette perte correspond à une hausse de la volatilité à 12 % mais aussi du taux de change jusqu'à 1,06. Généralement, les plus grandes pertes, dans un tableau comme celui-là, se situent dans les coins, mais ce n'est pas toujours le cas. Considérons, par exemple, la situation du portefeuille d'une banque qui consiste en un *butterfly* (voir section 10.2). La perte la plus importante sera subie si le taux de change reste au même niveau.

Tableau 15.5 : Gains ou pertes réalisés en deux semaines dans différents scénarios (en millions d'euros)

	Taux de change						
Volatilité	**0,94**	**0,96**	**0,98**	**1,00**	**1,02**	**1,04**	**1,06**
8 %	+102	+55	+25	+6	-10	-34	-80
10 %	+80	+40	+17	+2	-14	-38	-85
12 %	+60	+25	+9	-2	-18	-42	-90

15.12 L'assurance de portefeuille

Un gestionnaire de portefeuille qui achète un put sur son portefeuille acquiert une protection contre une baisse du marché, en même temps qu'il préserve son profit en cas de hausse. L'une des solutions possibles (examinée à la section 14.3) est d'acheter un put sur un indice de marché tel que le CAC 40. Mais il existe une solution alternative qui consiste à créer une option synthétique.

Créer une option synthétique consiste à maintenir une position dans l'actif sous-jacent (ou dans un futures sur l'actif sous-jacent) de telle manière que le delta de la position soit égal au delta souhaité de l'option. La position essentielle pour créer une telle option est symétrique de celle qui est nécessaire à sa couverture. Cela s'explique par

le fait que la procédure pour couvrir une option implique la création d'une option synthétique équivalente mais opposée à la première.

Les deux principales raisons pour lesquelles il peut être plus intéressant pour un gestionnaire de portefeuille de créer un put synthétique plutôt que de l'acheter sur le marché sont les suivantes :

1. Les marchés d'options ne disposent pas toujours de la liquidité suffisante pour absorber les volumes que traitent les gestionnaires de fonds importants.
2. Ces gestionnaires ont souvent besoin de prix d'exercice et de dates d'échéance qui diffèrent de ceux qui sont disponibles sur les marchés organisés.

L'option synthétique peut être créée en échangeant une partie du portefeuille ou en utilisant un contrat futures sur indice. Nous examinons tout d'abord la création d'une option par la vente d'une partie du portefeuille. Rappelons que le delta d'un put européen portant sur le portefeuille est :

$$\Delta = e^{-qT}[N(d_1) - 1] \tag{15.8}$$

où, avec les notations habituelles :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + \left(r - q + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

S_0 est la valeur actuelle du portefeuille, K le prix d'exercice, r le taux sans risque, q le rendement en dividende du portefeuille, σ la volatilité et T la durée de vie restante de l'option.

Pour créer le put synthétique, le gestionnaire de fonds doit s'assurer que, à tout instant, une proportion :

$$e^{-qT}[1 - N(d_1)]$$

des actions du portefeuille d'origine est vendue et que le montant de la vente est investi au taux sans risque. Au fur et à mesure que la valeur du portefeuille d'origine baisse, le delta du put donné par l'équation (15.8) devient de plus en plus négatif et la proportion du portefeuille d'origine qui doit être vendue augmente.

Utiliser cette stratégie pour créer un portefeuille de couverture signifie qu'à tout moment, les fonds se divisent entre le portefeuille d'actions d'origine pour lequel une couverture est nécessaire et des actifs sans risque. Si la valeur du portefeuille d'actions augmente, des actifs sans risque sont vendus et la position dans le portefeuille d'actions est augmentée. Si la valeur du portefeuille baisse, la position dans ce dernier est diminuée et des actifs sans risque sont achetés. Le coût de la couverture provient des ventes après une baisse du marché et des achats après une hausse.

Exemple 15.9

Un portefeuille vaut 90 millions d'euros. Pour se couvrir contre une baisse du marché, le gestionnaire de portefeuille a besoin d'un put européen à 6 mois sur ce portefeuille avec un prix d'exercice de 87 millions d'euros. Le taux sans risque

est de 9 % par an, le rendement en dividende du portefeuille de 3 % par an et la volatilité de 25 % par an. Le portefeuille est censé répliquer l'indice Next150 qui est actuellement à 900. Aussi, l'une des solutions serait d'acheter 1 000 options de vente sur le Next150 avec un prix d'exercice de 870. Une autre solution consisterait à créer une option synthétique. Dans ce cas, $S_0 = 90$ millions, $K = 87$ millions, $r = 0{,}09$, $q = 0{,}03$, $\sigma = 0{,}25$ et $T = 0{,}5$. Ainsi :

$$d_1 = \frac{\ln(90/87) + \left(0{,}09 - 0{,}03 + 0{,}25^2/2\right)0{,}5}{0{,}25\sqrt{0{,}5}} = 0{,}4499$$

et le delta de l'option est à l'origine égal à :

$$e^{-qT}\,[N(d_1) - 1] = -0{,}3215$$

Cela montre que 32,15 % du portefeuille devrait être vendu pour obtenir le delta souhaité. Le portefeuille doit être surveillé régulièrement. Par exemple, si sa valeur baisse à 88 millions au bout d'une journée, le delta devient égal à –0,3679 et 4,64 % de plus du portefeuille d'origine doit être vendu. Si la valeur du portefeuille monte à 92 millions au bout d'une journée, le delta devient –0,2787 et 4,28 % du portefeuille d'origine doit être racheté.

L'utilisation des futures sur indices

L'utilisation de futures sur indices pour créer des options synthétiques peut être préférable à l'utilisation d'actions sous-jacentes, car les coûts de transaction associés aux échanges de futures sont généralement plus bas que ceux qui sont liés à l'échange d'actions. Le montant en euros des contrats futures vendus en proportion de la valeur du portefeuille devrait, d'après les équations (15.3) et (15.8), être égal à :

$$e^{-qT}\,e^{-(r-q)T^*}\,[1 - N(d_1)] = e^{q(T^*-T)}\,e^{-rT^*}[1 - N(d_1)]$$

où T^* représente la date d'échéance du contrat futures. Si le portefeuille vaut plus que A_1 fois l'indice et que chaque contrat futures sur indice porte sur A_2 fois l'indice, le nombre de contrats futures vendus à n'importe quelle date donnée devrait être égal à :

$$e^{q(T^*-T)}e^{-rT^*}\,[1 - N(d_1)]\,\frac{A_1}{A_2}$$

■ Exemple 15.10

Supposons que dans l'exemple précédent des contrats futures sur l'indice Next150 et d'échéance 9 mois soient utilisés pour créer l'option synthétique. Dans ce cas, à l'origine, $T = 0{,}5$, $T^* = 0{,}75$, $A_1 = 100\,000$, $A_2 = 250$ et $d_1 = 0{,}4499$. Ainsi, le nombre de contrats futures à vendre doit être de :

$$e^{q(T^*-T)}e^{-rT^*}\,[1 - N(d_1)]\,\frac{A_1}{A_2} = 123{,}2$$

soit 123 en arrondissant à l'entier le plus proche.

Jusqu'à présent, nous avons supposé que le portefeuille répliquait l'indice. Comme nous l'avons expliqué à la section 14.3, le procédé de couverture peut être ajusté pour atteindre d'autres objectifs. Le prix d'exercice retenu devrait être égal au niveau attendu de l'indice de marché quand la valeur du portefeuille atteint sa valeur couverte. Le nombre d'options sur indices devrait être β fois le nombre d'options nécessaires si le portefeuille avait un bêta de 1,0. La volatilité du portefeuille peut être supposée égale à son bêta multiplié par la volatilité d'un indice approprié et bien diversifié.

Encadré 15.2 L'assurance de portefeuille est-elle en cause dans le krach du 19 octobre 1987 ?

Le lundi 19 octobre 1987, le « Dow Jones Industrial Average » chuta brutalement de plus de 20 %. Pour replacer cela dans le contexte de l'époque, tous les records précédents furent dépassés lorsque 604 millions d'actions représentant plus de 21 milliards de dollars furent échangées à la Bourse de New York. Un montant d'environ 20 milliards de contrats futures sur le S&P500 fut également échangé ce jour-là.

Les gestionnaires de portefeuilles qui s'étaient couverts en achetant des options de vente sur les marchés organisés ou OTC ont très bien survécu au krach. Par contre, tous ceux qui avaient choisi de créer des options synthétiques réalisèrent qu'ils étaient incapables de vendre leurs actions ou leurs futures sur indices assez vite pour protéger leur position.

Le rapport de la Commission Brady sur le krach du 19 octobre 1987 fournit des éléments intéressants sur l'impact de l'assurance de portefeuille sur le marché à cette époque. La Commission Brady estima que 60 à 90 milliards de dollars d'actions étaient gérés par l'assurance de portefeuille en octobre 1987. Durant la période s'étendant du mercredi 14 octobre 1987 au vendredi 16 octobre 1987, le marché baissa d'environ 10 % ; une grande partie de cette baisse se déroula notamment le vendredi après-midi. La baisse aurait dû engendrer au moins 12 milliards de dollars de ventes d'actifs ou de futures sur indices conformément aux techniques d'assurance de portefeuille. En réalité, ce sont moins de 4 milliards de dollars qui ont été vendus ; les assureurs de portefeuille débutaient donc la semaine suivante avec d'énormes montants à vendre, selon ce que dictaient les modèles théoriques. La Commission Brady estima que, le lundi 19 octobre 1987, les ordres de vente de trois assureurs de portefeuilles représentaient plus de 10 % des ventes de la Bourse de New York, et que les ventes des couvertures de portefeuilles s'élevaient à 21,3 % de l'ensemble des ventes des marchés de futures sur indices. Il paraît vraisemblable que l'assurance de portefeuille ait été la source d'une forte pression baissière sur le marché.

Puisque le marché baissait trop rapidement et que le système informatique de la Bourse était surchargé, de nombreux assureurs de portefeuilles furent incapables d'exécuter les ordres de vente générés par leurs modèles et ne purent obtenir la couverture souhaitée. Inutile de dire que la popularité de l'assurance de portefeuille fondée sur la gestion dynamique des actions et des futures s'est effondrée depuis le mois d'octobre 1987.

15.13 La volatilité du marché d'actions

Nous nous sommes déjà demandé au chapitre 13 si la volatilité était causée soit uniquement par l'arrivée de nouvelles informations sur le marché, soit par l'activité d'échange elle-même. Or, l'assurance de portefeuille, telle qu'elle a été décrite précédemment, peut augmenter la volatilité. En effet, quand le marché baisse, elle incite les gérants à vendre des actions ou des futures sur indices. Ces réactions contribuent à accentuer le déclin (voir encadré 15.2). La vente d'actions est susceptible d'accélérer la baisse. La vente de contrats futures sur indices a le même effet sur les cours des futures. Il s'ensuit une pression à la vente d'actions à travers les mécanismes d'arbitrage sur indices (voir chapitre 5), et l'indice est entraîné à la baisse. De même, lorsque le marché est en hausse, l'assurance de portefeuille conduit les gérants à acheter des actions ou des contrats futures, ce qui accentue la hausse.

En plus de ces procédés formels d'assurance de portefeuille, il semble que de nombreux investisseurs, consciemment ou non, s'appuient sur des techniques analogues. Par exemple, un investisseur peut être enclin à entrer sur le marché en cas de hausse, mais vend à la baisse pour limiter ses pertes.

La façon dont les techniques d'assurance (formelles ou non) affectent la volatilité dépend de la facilité avec laquelle le marché peut absorber les volumes engendrés par ces stratégies. Si ces dernières ne représentent qu'une faible partie des échanges, il n'y aura vraisemblablement aucun effet. Mais plus l'assurance de portefeuille est populaire, plus l'effet sur le marché est déstabilisant.

Résumé

Les institutions financières offrent une variété de produits optionnels à leurs clients. Souvent, ces options ne correspondent pas à des produits standard échangés sur les marchés organisés. Les institutions financières sont alors confrontées au problème de couverture contre l'exposition au risque. Les positions nues et couvertes les laissent face à un niveau de risque inacceptable. Une réaction possible consiste à développer une stratégie stop-loss. Ceci suppose de détenir une position nue lorsque l'option est en dehors de la monnaie et de la convertir en position couverte dès que l'option passe dans la monnaie. Bien qu'elle semble intéressante à première vue, cette stratégie se révèle en pratique peu performante.

Le delta d'une option, noté Δ, est le taux de variation de sa valeur en fonction du cours de l'actif sous-jacent. La couverture implique la création d'une position delta-neutre, c'est-à-dire avec un delta égal à zéro. Puisque le delta de l'actif sous-jacent est égal à 1,0, une des façons de se couvrir consiste à prendre une position dans $-\Delta$ unités de l'actif sous-jacent pour chaque option à couvrir. Le delta d'une option change au fil du temps, et la position dans l'actif sous-jacent doit être ajustée fréquemment.

Quand une position delta-neutre est établie, la prochaine étape consiste à définir son gamma. Le gamma d'une option représente le taux de variation du delta en fonction du cours de l'actif sous-jacent. C'est une mesure de la courbure de la fonction liant la valeur de l'option et le cours du sous-jacent. L'impact de cette courbure sur les performances de la couverture peut être réduit en adoptant une position gamma-neutre.

Les couvertures en delta et gamma sont fondées sur l'hypothèse d'une volatilité constante de l'actif sous-jacent. Or, dans la pratique, les volatilités varient au fil du temps. Le vega d'une option ou d'un portefeuille d'options mesure le taux de variation de sa valeur en fonction de la volatilité. Un trader qui souhaite assurer une position en options contre la variation de la volatilité peut établir une position vega-neutre. De même que pour créer une position gamma-neutre, il faut prendre une position sur une option qui compense le vega de la position d'origine. Si le trader souhaite obtenir une position à la fois gamma et vega neutre, il doit opérer sur deux options différentes.

Il existe deux autres mesures du risque d'une position en options : thêta et rhô. Le thêta mesure le taux de variation de la valeur de la position en fonction du temps, toutes choses égales d'ailleurs. Le rhô mesure le taux de variation de la valeur de la position en fonction du taux sans risque.

En pratique, les traders d'options ajustent leurs portefeuilles au moins une fois par jour pour maintenir un delta-neutre. Il n'est généralement pas possible de maintenir un gamma et un vega-neutre sur une base régulière. La plupart du temps, quand les traders constatent que les valeurs de ces paramètres deviennent inacceptables, ils ajustent leur position ou réduisent le volume de celle-ci.

Les gestionnaires de portefeuilles peuvent créer des puts synthétiques pour assurer leur portefeuille. Ils peuvent le faire en vendant une partie du portefeuille ou des futures sur indices. Dans le premier cas, la partie vendue est investie en actifs sans risque. Si le marché baisse, la part investie dans les titres sans risque augmente, et réciproquement. Lorsque des futures sur indices sont vendus, le portefeuille d'actions reste intact. Si le marché baisse, davantage de futures sont vendus, et réciproquement. Cette stratégie fonctionne bien dans des conditions de marché normales. Mais le lundi 19 octobre 1987, lorsque le « Dow Jones Industrial Average » baissa de plus de 500 points, cette stratégie se révéla désastreuse. Les assureurs de portefeuilles furent incapables de vendre leurs actions, ou leurs futures, assez rapidement pour protéger leurs positions. Le résultat fut une très nette baisse de popularité de ces techniques de couverture.

Références complémentaires

TALEB N., « Dynamic Hedging : Managing Vanilla and Exotic Options », New York, Wiley, 1996.

Problèmes et exercices

15.1 Expliquez comment une stratégie stop-loss peut être mise en place par le vendeur d'un call en dehors de la monnaie. Pourquoi cette couverture est-elle relativement insatisfaisante ?

15.2 Que signifie l'affirmation selon laquelle le delta d'un call est égal à 0,7 ? Comment une position courte sur 1 000 options peut-elle être établie en delta-neutre si le delta de chaque option est de 0,7 ?

15.3 Calculez le delta d'un call européen à 6 mois, à la monnaie, portant sur une action ne versant pas de dividendes si le taux sans risque est de 10 % par an et que la volatilité du cours de l'action est de 25 % par an.

15.4 Que signifie l'affirmation selon laquelle le thêta d'une position en options est de –0,1 (le temps étant mesuré en années) ? Si un trader pense que ni le cours de l'action ni sa volatilité ne changeront, quel type de position en options est appropriée ?

15.5 Qu'entend-on par gamma d'une option ? Quels sont les risques d'une position à gamma négatif et delta nul ?

15.6 « La procédure pour créer une option synthétique est l'inverse de celle pour couvrir la position sur l'option. » Expliquez cette affirmation.

15.7 Pourquoi l'assurance de portefeuille connut-elle des déboires le 19 octobre 1987 ?

15.8 La valeur, selon le modèle de Black et Scholes, d'un call européen en dehors de la monnaie avec un prix d'exercice de 40 € est de 4 €. Un trader qui a vendu cette option prévoit d'utiliser une stratégie à seuil de déclenchement. Ainsi, il prévoit d'acheter à 40,10 € et de vendre à 39,90 €. Estimez l'espérance du nombre de fois où l'action sera achetée ou vendue.

15.9 Supposons que le cours d'une action soit actuellement de 20 € et qu'un call synthétique de prix d'exercice 25 € soit créé par une position sur l'action ajustée dynamiquement. Considérez les deux scénarios suivants :

a. Le cours de l'action augmente de façon constante de 20 € à 35 € durant la vie de l'option.

b. Le cours de l'action oscille de façon aléatoire et termine à 35 €.

Quel scénario rend l'option synthétique la plus coûteuse ? Justifiez votre réponse.

15.10 Quel est le delta d'une position courte de 1 000 calls européens portant sur des futures sur l'argent ? L'échéance des options est à 8 mois et les contrats futures sous-jacents arrivent à maturité dans 9 mois. Le cours actuel des futures à 9 mois est de 8 € l'once (28,35 g), le prix d'exercice de l'option est de 8 € , le taux d'intérêt sans risque de 12 % par an et la volatilité de l'argent de 18 % par an.

15.11 Dans l'exercice précédent (15.10), quelle position initiale dans les futures à 9 mois sur l'argent est nécessaire pour obtenir une couverture delta-neutre ? Si l'argent lui-même est utilisé, quelle doit être la position initiale ? Si des futures à 1 an sur l'argent sont utilisés, quelle doit être la position initiale ? Vous supposerez qu'il n'y a pas de coût de stockage de l'argent.

15.12 Une société utilise une couverture delta-neutre pour assurer un portefeuille consistant en une position longue en options de vente et d'achat sur une devise. Laquelle des propositions suivantes permettra d'obtenir le résultat le plus favorable ?

a. Un taux spot virtuellement constant.

b. Des variations violentes du taux spot.

Justifiez votre réponse.

15.13 Renouvelez l'exercice précédent (15.12) pour une institution financière avec un portefeuille consistant en une position courte sur des options de vente et d'achat sur une devise.

15.14 Une institution financière vient de vendre 1 000 calls européens à 7 mois sur le yen japonais. Supposons que le taux de change au comptant soit de 0,80 cents par yen, le prix d'exercice de 0,81 cents par yen, le taux d'intérêt sans risque en France de 8 % par an, le taux d'intérêt sans risque au Japon de 5 % par an, et la volatilité du yen de 15 % par an. Calculez le delta, le gamma, le vega, le thêta et le rhô de la position de l'institution financière. Interprétez chacune de ces valeurs.

15.15 Dans quelles circonstances est-il possible de créer une option européenne sur un indice d'actions qui soit à la fois gamma-neutre et vega-neutre grâce à l'ajout d'une position sur une autre option européenne ?

15.16 Un gestionnaire de fonds possède un portefeuille bien diversifié qui reproduit les performances de l'indice Next150, et dont la valeur est de 360 millions d'euros. La valeur du Next150 est de 1 200 et le gestionnaire de portefeuille souhaiterait se couvrir contre une réduction de plus de 5 % de la valeur du portefeuille sur les six prochains mois. Le taux d'intérêt sans risque est de 6 % par an. Les rendements en dividende de l'indice et du portefeuille sont de 3 % et la volatilité de l'indice est de 30 % par an.

a. Si le gestionnaire de fonds achète des puts européens, combien son assurance lui coûtera-t-elle ?

b. Expliquez avec précision les stratégies alternatives qui s'offrent au gestionnaire de fonds en impliquant des calls européens, et montrez qu'elles conduisent au même résultat.

c. Si le gestionnaire de fonds décide de se couvrir en gardant une part de son portefeuille investie dans un actif sans risque, quelle devra être la position initiale ?

d. Si le gestionnaire de fonds décide de se couvrir en utilisant un futures sur indice à 9 mois, quelle devra être la position initiale ?

15.17 Renouvelez l'exercice 15.16 en supposant que le portefeuille a un bêta de 1,5. Supposez que le rendement en dividende du portefeuille est de 4 % par an.

15.18 Montrez par substitution d'un des termes de l'équation (15.7) que cette dernière est vérifiée pour :

a. Une seule option d'achat européenne sur une action ne versant pas de dividendes.

b. Une seule option de vente européenne sur une action ne versant pas de dividendes.

c. N'importe quel portefeuille de puts et calls européens sur une action ne versant pas de dividendes.

15.19 Quelle est l'équation correspondant à l'équation (15.7) pour (a) un portefeuille de produits dérivés portant sur une devise, et (b) un portefeuille de produits dérivés portant sur un contrat futures ?

15.20 Supposons que 70 milliards d'euros d'actions soient gérés en utilisant l'assurance de portefeuille. Le but est de fournir une couverture contre une baisse de plus de 5 % au cours de l'année à venir. En procédant aux estimations que vous jugerez nécessaires, utilisez le logiciel DerivaGem pour calculer la valeur des actions ou des contrats futures que les gérants doivent vendre si le marché chute de 23 % en une journée.

15.21 Est-ce qu'un contrat forward sur indice a le même delta que le contrat futures équivalent ? Justifiez votre réponse.

15.22 La position d'une banque dans des options sur le taux de change dollar-euro a un delta de 30 000 et un gamma de –80 000. Expliquez de quelle manière ces nombres peuvent être interprétés. Le taux de change (dollars par euro) est de 0,90. Quelle position devriez-vous adopter pour établir une position delta-neutre ? Après une courte période, le taux de change devient 0,93. Estimez le nouveau delta. Quel ordre d'achat ou de vente est-il nécessaire de passer pour revenir à une position delta-neutre ? Supposons que la banque ait déjà établi une position delta-neutre à l'origine ; a-t-elle gagné ou perdu de l'argent après cette variation du taux de change ?

15.23 Utilisez la relation de parité call-put pour démontrer, pour une action ne versant pas de dividendes, les relations entre :

a. Le delta d'un call européen et le delta d'un put européen.

b. Le gamma d'un call européen et le gamma d'un put européen.

c. Le vega d'un call européen et le vega d'un put européen.

d. Le thêta d'un call européen et le thêta d'un put européen.

Questions complémentaires

15.24 Soit un call européen à 1 an portant sur une action cotée actuellement 30 €, le prix d'exercice est 30 €, le taux sans risque 5 % et la volatilité 25 % par an. Utilisez le logiciel DerivaGem pour calculer la valeur de l'option, ainsi que son delta, son gamma, son vega, son thêta et son rhô. Vérifiez que son delta est exact en recalculant la valeur de l'option lorsque vous modifiez le cours de l'action à 30,1 €. Vérifiez également que le gamma est exact en

recalculant le delta alors que le cours de l'action est de 30,1 €. Procédez de même et vérifiez que le vega, le thêta et le rhô sont exacts. Utilisez les fonctions du développeur d'applications de DerivaGem pour tracer la valeur de l'option, du delta, du gamma, du vega, du thêta et du rhô en fonction du cours de l'action sous-jacente.

15.25 Une institution financière dispose du portefeuille suivant, composé d'options OTC sur la livre sterling :

Type	Position	Delta de l'option	Gamma de l'option	Vega de l'option
Call	-1000	0,50	2,2	1,8
Call	-500	0,80	0,6	0,2
Put	-2000	-0,40	1,3	0,7
Call	-500	0,70	1,8	1,4

Une option est disponible avec un delta de 0,6, un gamma de 1,5 et un vega de 0,8.

a. Quelle position sur l'option et sur la livre sterling permettrait d'obtenir un portefeuille delta et gamma-neutre ?

b. Quelle position sur l'option et sur la livre sterling permettrait d'obtenir un portefeuille delta et vega-neutre ?

15.26 Reprenons la situation de l'exercice précédent (15.25) et supposons qu'une seconde option présentant un delta de 0,1, un gamma de 0,5 et un vega de 0,6 soit disponible. Comment pourrait-on obtenir que le portefeuille soit à la fois delta, gamma et vega-neutre ?

15.27 Un produit de placement offert par une banque garantit à l'investisseur une rentabilité, pour une période de six mois, supérieure à (a) zéro et (b) 40 % de la rentabilité d'un indice de marché. Un investisseur a prévu de placer 100 000 € dans ce produit. Décrivez le schéma de gain à l'échéance en assimilant ce produit à une option sur indice. Si l'on suppose que le taux sans risque est 8 % par an, que le rendement en dividende de l'indice est 3 % et que sa volatilité est 25 % , le produit est-il un bon investissement ?

15.28 La formule de la valeur d'un call européen sur futures, en fonction du prix du contrat futures, noté F_0, est, d'après le chapitre 14 :

$$c = e^{-rT}\,[F_0N(d_1) - KN(d_2)]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

où K, r, T et σ représentent respectivement le prix d'exercice, le taux sans risque, le temps restant à courir jusqu'à l'échéance et la volatilité.

a. Démontrez que $F_0N'(d_1) = KN'(d_2)$

b. Démontrez que le delta du call est égal à : $e^{-rT}N(d_1)$

c. Démontrez que le vega du call est égal à : $F_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-rT}$

d. Démontrez la formule donnant le rhô d'un call sur futures, présentée à la fin de la section 15.9. Le delta, le gamma, le thêta et le vega d'un call sur futures sont les mêmes que ceux d'un call sur une action versant un dividende de taux q, avec q remplacé par r, et S_0 remplacé par F_0. Expliquez pourquoi il n'en est pas de même avec le rhô d'un call sur futures.

15.29 Utilisez DerivaGem pour vérifier que l'équation (15.7) est satisfaite pour l'option considérée à la section 15.1. (Note : DerivaGem produit une valeur de thêta par « jour calendaire ». Le thêta de l'équation (15.7) est « par an ».)

15.30 Utilisez les fonctions du développeur d'applications de DerivaGem pour reproduire le tableau 15.2 (notez que, dans le tableau 15.2, la position dans l'action est arrondie à la centaine d'actions la plus proche). Calculez le gamma et le thêta de la position chaque semaine. Calculez la variation de la valeur du portefeuille chaque semaine, et contrôlez si l'équation (15.6) est approximativement vérifiée. (Note : DerivaGem produit une valeur de thêta par « jour calendaire ». Le thêta de l'équation (15.6) est « par an ».)

Annexe

Développements limités en série de Taylor et paramètres de couverture

Un développement limité en série de Taylor de la valeur du portefeuille dans une courte période de temps montre le rôle joué par les différentes lettres grecques. Si la volatilité de l'actif sous-jacent est supposée constante, la valeur du portefeuille, Π, est une fonction du cours de l'actif S et du temps t. Le développement limité en série de Taylor donne :

$$\Delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial\Pi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}\Delta S^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\Delta t^2 + \frac{\partial^2\Pi}{\partial S\partial t}\Delta S\Delta t + ... \qquad (15A.1)$$

où $\Delta\Pi$ et ΔS sont les variations de Π et S au cours d'un intervalle de temps de longueur Δt. La couverture delta-neutre élimine le premier terme du membre de droite. Le deuxième terme n'est pas stochastique. Le troisième terme (qui est d'ordre 1 en Δt) peut être annulé en s'assurant que le portefeuille est gamma-neutre tout en restant delta-neutre. Les autres termes sont d'un ordre supérieur à Δt. Pour un portefeuille delta-neutre, le premier terme du membre de droite de l'équation (15A.1) est nul, de telle sorte que :

$$\Delta\Pi = \Theta\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma\Delta S^2$$

où les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt sont négligés. C'est l'équation (15.6). Lorsque la volatilité de l'actif sous-jacent est incertaine, Π est une fonction de σ, S et t. L'équation (15A.1) devient alors égale à :

$$\Delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial\Pi}{\partial\sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial\Pi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}\Delta S^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\sigma^2}\Delta\sigma^2 + ...$$

où $\Delta\sigma$ représente la variation de σ dans l'intervalle Δt. Dans ce cas, la couverture delta élimine le premier terme du membre de droite. Le deuxième terme est éliminé en établissant le portefeuille en vega-neutre. Le troisième terme n'est pas stochastique. Le quatrième terme est éliminé en établissant le portefeuille en gamma-neutre. Les autres lettres grecques peuvent être définies (et le sont en pratique) pour correspondre aux autres termes d'ordre supérieur.

Chapitre 16

Les courbes de volatilité

Sur les marchés, les cours des options sont-ils proches de ceux qui sont prévus par le modèle de Black et Scholes ? Les traders utilisent-ils vraiment ce modèle lorsqu'ils déterminent la valeur d'une option ? Les distributions de probabilité de la valeur d'un actif sont-elles réellement log-normales ? Quelles recherches ont été menées pour tester la validité des formules de Black et Scholes ? Nous répondons à toutes ces questions dans ce chapitre. Nous expliquons ainsi que les traders utilisent effectivement le modèle de Black et Scholes, mais pas exactement de la façon dont Black et Scholes l'entendaient initialement. En fait, les traders font dépendre la volatilité, paramètre essentiel du modèle, à la fois du prix d'exercice et de la durée de vie.

On appelle courbe de volatilité ou *smile de volatilité* la fonction qui lie la volatilité implicite des options au prix d'exercice. Dans ce chapitre, nous décrivons les courbes de volatilité utilisées par les opérateurs des marchés d'options sur actions et sur devises. Nous expliquons la relation entre le smile de volatilité et la distribution de probabilité risque-neutre de la valeur future d'un actif. Nous examinons également de quelle manière ces opérateurs adaptent la volatilité en fonction de la maturité de l'option, et comment ils utilisent des matrices de volatilités comme outils d'évaluation. La partie finale de ce chapitre résume certains des tests empiriques du modèle de Black et Scholes.

16.1 Retour sur la parité call-put

La relation de parité call-put, telle que nous l'avons décrite au chapitre 9, constitue un bon point de départ pour comprendre les smiles de volatilité. Cette relation lie la valeur d'un call européen, c, à celle d'un put européen, p :

$$p + S_0 e^{-qT} = c + K e^{-rT} \tag{16.1}$$

Le call et le put ont même prix d'exercice, K et même date d'échéance, T. S_0 est la valeur de l'actif sous-jacent, r est le taux d'intérêt sans risque pour la maturité T, et q désigne le taux de rémunération de l'actif sous-jacent.

La relation de parité call-put est fondée sur l'absence d'opportunités d'arbitrage. Elle ne nécessite aucune hypothèse particulière quant à la distribution de probabilité du prix futur du sous-jacent. Elle doit être vérifiée, que la loi suivie par le prix du sous-jacent soit log-normale ou non.

Pour une valeur donnée de la volatilité, notons p_{BS} et c_{BS} les valeurs respectives d'un put et d'un call données par le modèle de Black et Scholes. Notons par ailleurs p_{mkt} et c_{mkt} les prix cotés de ces options ; puisque la relation de parité call-put est vérifiée pour le modèle de Black et Scholes, on doit avoir :

$$p_{BS} + S_0e^{-qT} = c_{BS} + Ke^{-rT}$$

Puisqu'elle est aussi vérifiée pour les valeurs de marché, on peut écrire :

$$p_{mkt} + S_0e^{-qT} = c_{mkt} + Ke^{-rT}$$

La soustraction de ces deux équations donne :

$$p_{BS} - p_{mkt} = c_{BS} - c_{mkt} \tag{16.2}$$

Cette égalité montre que l'erreur d'évaluation sur un put européen, due à l'utilisation du modèle de Black et Scholes, est exactement la même que l'erreur d'évaluation sur le call européen, à prix d'exercice et dates d'échéance identiques.

Supposons que la volatilité implicite du put soit de 22 % ; on a $p_{BS} = p_{mkt}$ lorsqu'une volatilité de 22 % est utilisée dans le modèle de Black et Scholes. D'après l'équation (16.2), il s'ensuit que $c_{BS} = c_{mkt}$ lorsque cette volatilité est employée. La volatilité implicite du call est donc aussi de 22 %. Ce raisonnement montre bien que la volatilité implicite d'un call européen est toujours égale à celle d'un put européen lorsque les deux options ont le même prix d'exercice et la même date d'échéance. Autrement dit, pour un prix d'exercice et une date d'échéance donnés, la volatilité correcte à utiliser dans le modèle de Black et Scholes pour évaluer un call européen doit être la même que celle qui est employée pour un put européen.

À peu de choses près, ce raisonnement s'applique également aux options américaines. Ainsi, lorsque les traders se réfèrent à la relation entre volatilité implicite et prix d'exercice, ou à la relation entre volatilité implicite et date d'échéance, ils n'ont pas besoin de préciser qu'ils parlent de calls ou de puts. La relation est la même pour les deux.

■ Exemple 16.1

La valeur du dollar australien est de 0,60 €. Le taux sans risque est de 5 % par an en France et de 10 % par an en Australie. La valeur de marché d'un call européen sur le dollar australien, dont l'échéance est à 1 an et le prix d'exercice de 0,59 €, s'établit à 0,0236. DerivaGem montre que la volatilité implicite d'un tel call est

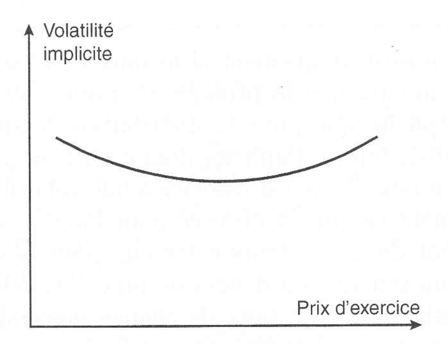
de 14,5 %. Pour qu'il n'y ait pas d'arbitrage, la relation de parité call-put de l'équation (16.1) doit s'appliquer avec q égal au taux sans risque étranger. La valeur du put européen, p, de prix d'exercice 0,59 € et d'échéance 1 an satisfait donc :

$$p + 0{,}60e^{-0{,}10\times 1} = 0{,}0236 + 0{,}59e^{-0{,}05\times 1}$$

Soit $p = 0{,}0419$. DerivaGem montre que, lorsque le put est à ce prix, sa volatilité implicite est également de 14,5 %. C'est bien ce à quoi l'on pouvait s'attendre suite à l'analyse précédente.

16.2 Les options de change

La courbe de volatilité utilisée par les traders pour évaluer les options de change a généralement la forme d'un sourire, représenté dans le graphique 16.1 (d'où le nom *smile*). La volatilité est relativement faible pour des options à la monnaie, et elle s'élève progressivement au fur et à mesure que l'option devient davantage dans la monnaie ou en dehors de la monnaie.

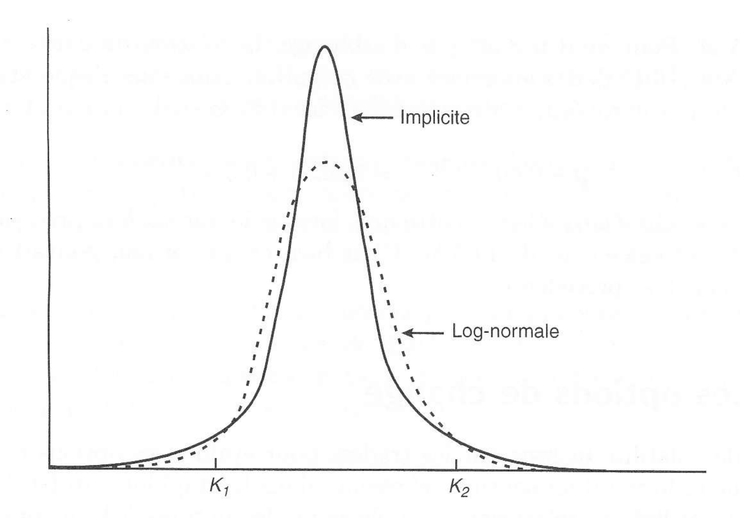


Graphique 16.1 : Le smile de volatilité des options de change.

Dans l'annexe de ce chapitre, nous montrons comment déterminer la distribution de probabilité risque-neutre du prix d'un actif à une date future T à partir du smile de volatilité déduit des prix d'options d'échéance T. Cette loi est appelée distribution implicite. Le smile de volatilité du graphique 16.1 correspond à la distribution de probabilité indiquée en gras dans le graphique 16.2. Une distribution log-normale avec la même moyenne et le même écart-type est reportée en pointillé dans le graphique 16.2. On peut voir que la distribution implicite a des extrémités plus épaisses que celles de la loi log-normale[1].

Pour vérifier que les graphiques 16.1 et 16.2 sont bien cohérents entre eux, considérons en premier lieu un call très en dehors de la monnaie, de prix d'exercice K_2. Cette op-

1. C'est la *kurtosis* qui mesure l'aplatissement d'une distribution. Il faut noter que, en plus d'avoir des queues plus importantes, la distribution implicite est plus « pointue ». De faibles et amples variations du taux de change sont donc plus probables que dans une distribution log-normale. Les variations intermédiaires sont, par contre, moins fréquentes.



Graphique 16.2 : La distribution implicite et la distribution log-normale des taux de change.

tion procure un payoff positif uniquement si le taux de change parvient à dépasser K_2. Le graphique 16.2 montre que la probabilité d'une telle hausse est plus élevée pour la distribution implicite que pour la distribution log-normale. On peut donc s'attendre à ce que la distribution implicite donne un prix plus élevé pour l'option. Or une valeur de l'option plus élevée est associée à une volatilité implicite plus importante – et c'est exactement ce qui est observé pour l'option dans le graphique 16.1. Les deux graphiques sont donc cohérents entre eux pour des prix d'exercice élevés. Considérons à présent un put très en dehors de prix d'exercice K_1. Cette option ne procurera un payoff positif que si le taux de change descend en dessous de K_1. Le graphique 16.2 montre que la probabilité d'une telle baisse est également plus forte pour la distribution implicite que pour une distribution log-normale. La distribution implicite devrait donc conduire à un prix relativement plus élevé pour l'option et à une volatilité implicite plus importante. C'est à nouveau ce qui est observé dans le graphique 16.1.

Les résultats empiriques

Le smile utilisé par les traders d'options de change tient compte de la sous-évaluation, par la distribution log-normale, de la probabilité de variations extrêmes des taux de change. Pour vérifier s'ils ont raison d'agir ainsi, nous avons examiné les variations quotidiennes de douze taux de change différents sur une période de 10 ans. Après avoir calculé l'écart-type du pourcentage de variation quotidienne de chaque taux de change, nous avons déterminé la fréquence des variations excédant un écart-type, deux écarts-types, etc., et comparé ces résultats à ceux obtenus dans le cadre d'une loi normale pour ces variations (mesurées en pourcentage). En effet, le modèle log-normal

pour les taux de change implique que les pourcentages de variation journalière suivent approximativement une loi normale. Les résultats sont présentés dans le tableau 16.1[2].

Tableau 16.1 : Pourcentage du nombre de jours durant lesquels la variation du taux de change a été plus importante qu'un, deux... six écarts-types (EC = écart-type des variations quotidiennes)

	Univers réel (données constatées)	**Modèle log-normal**
>1 EC	25,04	31,73
>2 EC	5,27	4,55
>3 EC	1,34	0,27
>4 EC	0,29	0,01
>5 EC	0,08	0,00
>6 EC	0,03	0,00

Les variations quotidiennes excèdent trois écarts-types pour 1,34 % du nombre total de jours étudiés. Le modèle log-normal prévoit un pourcentage de 0,27 %. Les variations excèdent quatre, cinq et six écarts-types pour, respectivement, 0,29 %, 0,08 % et 0,03 % de l'ensemble des jours. Le modèle log-normal prévoit que de tels écarts sont extrêmement rares. Le tableau conduit donc bien à étayer l'existence de queues de distribution plus épaisses et justifie, d'un point de vue pratique, l'utilisation du smile de volatilité par les traders.

Encadré 16.1 Faire de l'argent avec les options de change

Supposez que la plupart des traders pensent que les taux de change suivent une loi log-normale. Ils utiliseront alors la même volatilité pour évaluer toutes les options sur une même devise. Or, le tableau 16.1 montre que cette hypothèse n'est pas correcte. Que devez-vous faire alors ? Acheter des options (calls et puts) très en dehors sur toutes les devises et attendre. Ces options sont relativement bon marché et la proportion qui finira dans la monnaie est plus importante que ce qui est conforme à l'hypothèse de log-normalité. La valeur actuelle de vos flux futurs devrait être plus importante que le coût d'acquisition de ces options.

2. Ce tableau est repris de l'article de J. C. Hull et A. White, « Value at Risk When Daily Changes in Market Variables Are Not Normally Distributed », *Journal of Derivatives*, 5, n° 3 (printemps 1998), 9-19.

Au milieu des années 1980, quelques traders savaient que la distribution de probabilité des taux de change présentait des queues épaisses, alors que les autres s'appuyaient sur l'hypothèse de log-normalité. Les premiers ont adopté la stratégie décrite précédemment jusqu'à ce que, à la fin des années 1980, tout le monde utilise les smiles de volatilité pour évaluer les options et ces opportunités disparurent.

Les raisons du smile de volatilité dans les options de change

Pourquoi les taux de change ne suivent-ils pas un mouvement brownien géométrique ? Il y a deux conditions pour que le prix d'un actif suive un tel processus :

1. La volatilité doit être constante.
2. Le cours doit varier régulièrement, sans sauts.

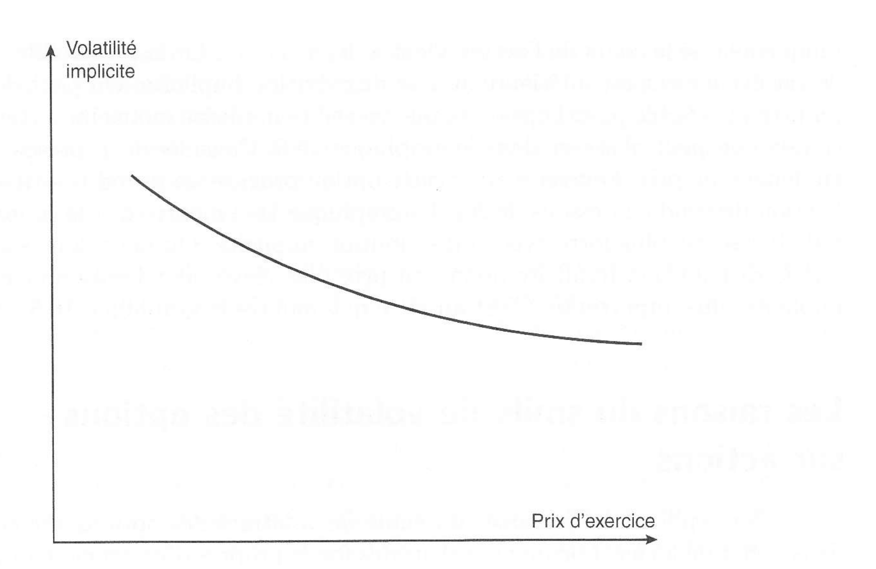
En pratique, aucune de ces deux conditions n'est satisfaite pour les taux de change. La volatilité d'un taux de change est loin d'être constante et les taux de change sont fréquemment l'objet de sauts[3]. L'instabilité de la volatilité, ajoutée à ces sauts dans le processus des taux de change, conduit à une augmentation de la probabilité de mouvements extrêmes.

L'impact, sur les options, des variations extrêmes et de l'instabilité de la volatilité du sous-jacent dépend de l'échéance des options. L'impact relatif de l'instabilité de la volatilité sur les cours des options croît avec la durée de vie de l'option, mais le smile de volatilité créé par l'instabilité de la volatilité devient généralement moins prononcé. Par contre, l'impact des variations extrêmes sur les cours et sur le smile de volatilité devient moins prononcé quand la durée de vie de l'option augmente. Pour des options longues, les sauts à la hausse et à la baisse tendent à se compenser, si bien que la différence entre la distribution des taux de change lorsqu'il y a de fortes variations et celle qui est obtenue avec des variations régulières est quasi imperceptible.

16.3 Les options sur actions

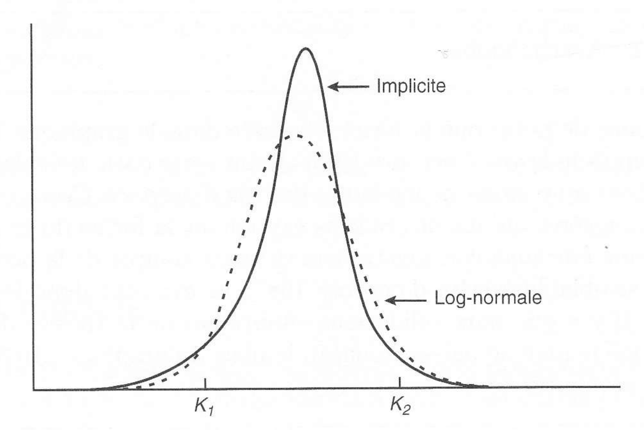
Les courbes de volatilité utilisées par les traders pour évaluer les options sur actions ou sur indices ont généralement la forme présentée dans le graphique 16.3. On parle alors d'asymétrie de volatilité (*volatility skew*). La volatilité implicite est alors une fonction décroissante du prix d'exercice. Quand le prix du sous-jacent est très supérieur au prix d'exercice (un put très en dehors ou un call très en dedans), la volatilité utilisée est plus élevée que celle qui sert à évaluer un put très en dedans ou un call très en dehors.

3. Ces variations sont souvent des réponses aux actions des banques centrales.



Graphique 16.3 : Le smile de volatilité des options sur actions.

Le smile de volatilité des options sur actions induit une distribution de probabilité du cours du sous-jacent représentée par la courbe en gras du graphique 16.4. À titre de comparaison, une distribution log-normale de mêmes caractéristiques est représentée en pointillé. La queue de la distribution implicite située à gauche est plus épaisse que celle de la distribution log-normale. Le phénomène inverse est observé à l'extrémité droite de la distribution.



Graphique 16.4 : La distribution implicite et la distribution log-normale des options sur actions.

Pour vérifier que les graphiques 16.3 et 16.4 sont bien cohérents entre eux, on peut adopter la même démarche que précédemment. Considérons des options très en dehors ; selon le graphique 16.4, un call très en dehors, de prix d'exercice K_2, a une valeur plus faible lorsque la distribution implicite est utilisée en lieu et place de la distribution log-normale. Ceci s'explique simplement ; l'option verse un payoff positif

uniquement si le cours de l'action vient à dépasser K_2. Or la probabilité d'occurrence de cet événement est inférieure avec la distribution implicite. On peut donc attendre un prix plus faible pour l'option et une volatilité implicite moins importante – et c'est ce que l'on peut observer dans le graphique 16.3. Considérons à présent un put très en dehors, de prix d'exercice K_1 ; cette option procure un payoff positif si le cours de l'action descend en dessous de K_1. Le graphique 16.3 montre que la probabilité d'une telle baisse est plus forte avec la distribution implicite. On peut donc s'attendre à ce que la distribution implicite donne un prix plus élevé pour l'option et une volatilité implicite plus importante. C'est aussi ce que montre le graphique 16.3.

Les raisons du smile de volatilité des options sur actions

L'une des explications possibles du smile de volatilité des options sur actions réside dans l'effet de levier. Lorsque la valeur des fonds propres d'une société diminue, l'effet de levier de cette société augmente. Par conséquent, la volatilité de ses actions fait de même, rendant encore plus probable une baisse de la valeur des actions. Au contraire, lorsque la valeur des fonds propres augmente, l'effet de levier diminue et la volatilité des actions fait de même, rendant d'autant moins probable une hausse de la valeur des actions. Ce raisonnement montre que la volatilité des actions tend à être une fonction décroissante du cours ; ceci est conforme aux observations faites dans les graphiques 16.3 et 16.4. Une autre explication de ce phénomène est la « krachophobie » (voir encadré 16.2).

Encadré 16.2 Krachophobie

Il est intéressant de noter que la forme observée dans le graphique 16.3 n'existe en fait que depuis le krach d'octobre 1987. Avant cette date, les volatilités implicites étaient beaucoup moins dépendantes du prix d'exercice. Ceci a conduit Mark Rubinstein à suggérer qu'une des raisons expliquant la forme du graphique 16.3 pouvait être une *krachophobie*. Les traders tiennent compte de la possibilité d'un autre krach, semblable à celui d'octobre 1987 ; ils évaluent donc les options en conséquence. Il y a plusieurs validations empiriques de la théorie de la krachophobie. Lorsque le marché baisse (monte), le biais du graphique 16.3 tend à être plus (moins) prononcé.

16.4 Structure par termes des volatilités et surface de volatilité

En plus du smile de volatilité, les traders tiennent compte de la structure par termes des volatilités lorsqu'ils évaluent des options. Concrètement, la volatilité utilisée pour

évaluer une option à la monnaie dépend de la durée de vie de cette option. Elle tend à être une fonction croissante de la maturité lorsque les volatilités historiques à court terme sont faibles. Cela traduit le fait que les opérateurs anticipent une hausse de la volatilité. Symétriquement, la volatilité tend à être une fonction décroissante de la maturité lorsque les volatilités historiques à court terme sont élevées. Cela traduit également l'anticipation d'une baisse future de la volatilité.

Une surface de volatilité combine les smiles de volatilité et la structure par termes des volatilités ; elle est souvent présentée sous la forme d'un tableau donnant les volatilités implicites en fonction du prix d'exercice et de la durée de vie. Un exemple de surface de volatilité pour des options de change est donné dans le tableau 16.2.

Une des dimensions de ce tableau est le prix d'exercice, l'autre la durée de vie résiduelle de l'option. Les éléments du tableau donnent les différentes valeurs de volatilité implicite calculées par le modèle de Black et Scholes. Pour chaque maturité, certaines données correspondent à des options liquides pour lesquelles les prix de marché sont fiables. Les autres éléments du tableau sont calculés par interpolation linéaire.

Lorsqu'une nouvelle option doit être évaluée, la volatilité appropriée est sélectionnée dans le tableau. Par exemple, pour évaluer une option d'échéance 9 mois et de prix d'exercice 1,05, on procède à une interpolation entre 13,4 % et 14 % pour obtenir une volatilité à 13,7 %. C'est la volatilité utilisée dans la formule de Black et Scholes (ou dans le modèle d'arbre binomial sur lequel nous reviendrons au chapitre 18).

La forme du smile de volatilité dépend de la durée de vie de l'option. Comme l'illustre le tableau 16.2, le smile tend à devenir moins prononcé quand la durée de vie augmente. Notons T le temps restant jusqu'à l'échéance, et F_0 le prix forward d'un actif. Il est possible de définir le smile de volatilité comme une relation entre la volatilité implicite et la quantité :

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \ln\left(\frac{K}{F_0}\right)$$

plutôt que comme une relation liant directement la volatilité implicite et K. Le smile est alors beaucoup moins dépendant de la durée de vie de l'option[4].

Le rôle du modèle

Si les traders sont prêts à utiliser une volatilité différente pour chacune des options, il est permis de s'interroger sur le rôle du modèle d'évaluation qui suppose une volatilité constante. On pourrait arguer que le modèle de Black et Scholes n'est rien de plus qu'un outil sophistiqué d'interpolation permettant de s'assurer que la valeur d'une option est conforme au prix de marché d'autres options liquides. Si les traders cessaient d'utiliser Black et Scholes et optaient pour un autre modèle plausible, la surface de

4. Pour approfondir cette approche, voir S. Natenberg, *Option Pricing and Volatilities : Advanced Trading Strategies and Techniques*, 2[e] éd., Mc Graw Hill, New York, 1994 ; R. Tompkins, *Options Analysis : A state of the Art Guide to Options Pricing*, Irwin, Bur Ridge, IL, 1994.

Tableau 16.2 : Exemple de surface de volatilité

	Prix d'exercice				
	0,90	**0,95**	**1,00**	**1,05**	**1,10**
1 mois	14,2	13,0	12,0	13,1	14,5
3 mois	14,0	13,0	12,0	13,1	14,2
6 mois	14,1	13,3	12,5	13,4	14,3
1 an	14,7	14,0	13,5	14,0	14,8
2 ans	15,0	14,4	14,0	14,5	15,1
5 ans	14,8	14,6	14,4	14,7	15,0

volatilité changerait et la forme du smile également. Mais les cours sur les marchés ne varieraient sans doute pas sensiblement.

16.5 Les lettres grecques

L'existence du smile de volatilité complique le calcul des lettres grecques. Derman décrit plusieurs régimes de volatilité envisagés par les traders[5]. Le plus simple est connu sous le nom de *sticky strike rule*, qu'on pourrait traduire par inertie relative au prix d'exercice. Cette règle suppose que la volatilité implicite d'une option reste constante d'un jour à l'autre. Les lettres grecques calculées en utilisant les hypothèses de Black et Scholes sont alors correctes si la volatilité retenue pour une option est sa volatilité implicite.

Une règle plus complexe est connue sous le nom de *sticky delta* ou inertie sur le delta. Elle suppose que la relation observée aujourd'hui entre le premium d'une option et le ratio S/K s'appliquera encore demain. Lorsque le cours de l'actif sous-jacent varie, la volatilité implicite de l'option est supposée varier pour refléter la modification du caractère en dehors ou en dedans de l'option. Si la règle d'inertie du delta est appliquée, les formules fournies au chapitre 15 pour les lettres grecques ne sont plus valables. Par exemple, le delta d'un call est donné par :

$$\frac{\partial c_{\text{BS}}}{\partial S} + \frac{\partial c_{\text{BS}}}{\partial \sigma_{\text{imp}}} \frac{\partial \sigma_{\text{imp}}}{\partial S}$$

où c_{BS} représente la valeur du call du modèle de Black et Scholes, exprimé comme une fonction du cours du sous-jacent S et de la volatilité implicite σ_{imp}.

D'après le graphique 16.3, la volatilité est une fonction décroissante du prix d'exercice K, ou encore une fonction croissante de S/K. Par conséquent, sous l'hypothèse

5. Voir E. Derman, « Regimes of Volatility », *RISK*, avril 1999, 54-59.

d'inertie du delta, la volatilité augmente lorsque la valeur de l'actif augmente et, donc :

$$\frac{\partial \sigma_{\text{imp}}}{\partial S} > 0$$

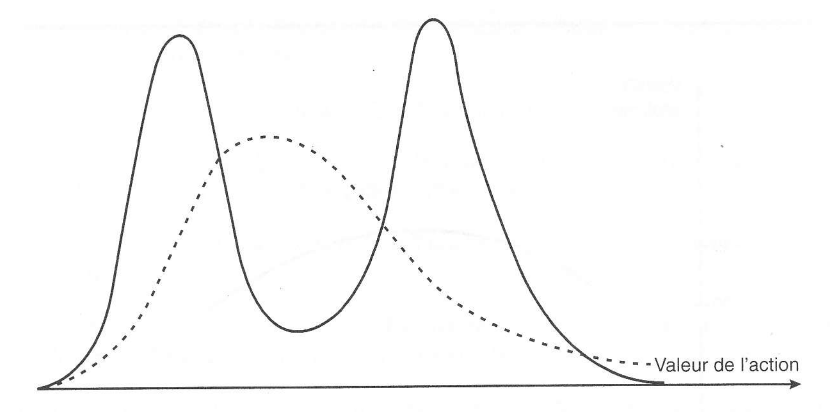
Ainsi, le delta est plus élevé que celui calculé par le modèle de Black et Scholes.

Ces deux règles n'ont toutefois pas de cohérence interne (sauf bien sûr si le smile de volatilité est plat pour toutes les échéances). Pour pallier cet inconvénient, un modèle cohérent, appelé *fonction de volatilité implicite* ou *modèle d'arbre implicite*, sera présenté au chapitre 24.

En pratique, les banques cherchent à s'assurer que leur exposition aux variations fréquemment observées de la surface de volatilité est raisonnablement faible. Une des techniques pour identifier ces variations est l'analyse en composantes principales qui sera étudiée au chapitre 18.

16.6 Cas de l'anticipation d'une seule variation extrême

Supposons qu'une action cote aujourd'hui 50 € et qu'une annonce importante attendue dans quelques jours soit susceptible de faire augmenter ou baisser le cours de 8 €. (Cette annonce peut concerner le résultat d'une tentative d'OPA ou le verdict d'un procès important.) La distribution de probabilité du cours de l'action dans, disons, trois mois peut alors être un mélange de deux distributions log-normales, la première correspondant à une annonce favorable, la seconde à une annonce défavorable. Cette situation est représentée dans le graphique 16.5. La ligne en gras montre le mélange des deux distributions log-normales pour le cours de l'action dans trois mois. La ligne en pointillé illustre une distribution log-normale de même moyenne et même écart-type que la distribution précédente.



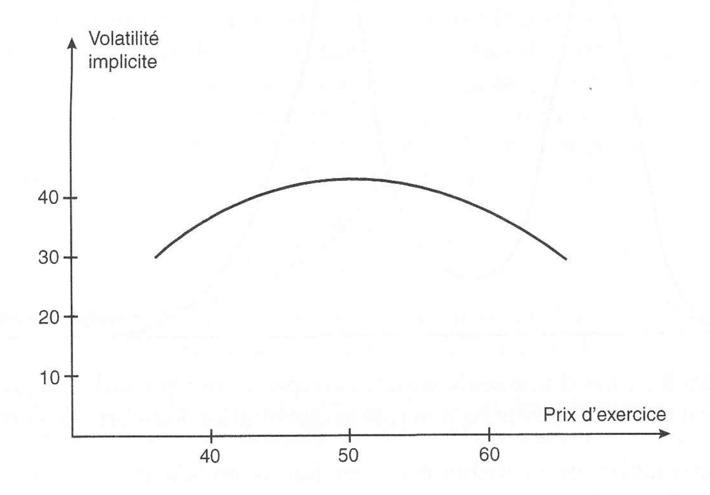
Graphique 16.5 : Effet d'une seule variation importante : la courbe en gras représente la distribution réelle, la courbe en pointillé la distribution log-normale correspondante.

La vraie distribution de probabilité est en fait bimodale et certainement pas log-normale. Une façon aisée d'envisager ce cas est de considérer la situation extrême où la distribution est binomiale. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Supposons que le cours soit à 50 € et qu'il puisse augmenter ou baisser de 8 € dans un mois, et supposons de plus que le taux sans risque soit de 12 % par an. Les options peuvent alors être évaluées à l'aide du modèle binomial du chapitre 11. Les paramètres sont ici $u = 1{,}16$; $d = 0{,}84$; $a = 1{,}0101$ et $p = 0{,}5314$. Les résultats de l'évaluation de différentes séries d'options sont récapitulés dans le tableau 16.3. La première colonne indique les différents prix d'exercice, la deuxième donne le prix d'un call à un mois, la troisième le prix du put correspondant et la dernière la volatilité implicite calculée comme si le modèle de Black et Scholes avait été utilisé pour calculer les prix (comme nous l'avons montré à la section 16.1, la volatilité implicite est identique pour les deux types d'options dès que le prix d'exercice et l'échéance sont identiques). Le graphique 16.6 montre la courbe de volatilités obtenue. Ce n'est pas ici un « sourire » mais plutôt une moue de tristesse ! En conséquence, la volatilité implicite calculée pour une option de prix d'exercice 50 € conduirait à surévaluer une option de prix d'exercice 44 € ou 56 €.

Tableau 16.3 : Volatilités implicites quand la vraie loi est binomiale

Prix d'exercice	Prix du call (€)	Prix du put (€)	Volatilité implicite (%)
42	8,42	0,00	0,0
44	7,37	0,93	58,8
46	6,31	1,86	66,6
48	5,26	2,78	69,5
50	4,21	3,71	69,2
52	3,16	4,64	66,1
54	2,10	5,57	60,0
56	1,05	6,50	49,0
58	0,00	7,42	0,0



Graphique 16.6 : Le smile de volatilité correspondant au tableau 16.3.

Résumé

Le modèle de Black et Scholes et ses extensions supposent que la distribution de probabilité de l'actif sous-jacent est log-normale à toute date. Cette hypothèse n'est pas celle envisagée par les traders. Ceux-ci supposent en général que les queues de cette distribution de probabilité sont asymétriques, plus épaisse à gauche et plus fine à droite, par rapport à la loi log-normale.

Les traders utilisent les courbes de volatilité pour tenir compte des écarts par rapport à la log-normalité. Le smile de volatilité définit la relation entre la volatilité implicite d'une option et son prix d'exercice. Pour les options sur actions, le smile est légèrement décroissant. Cela signifie que les puts en dehors de la monnaie et les calls dans la monnaie présentent des volatilités implicites élevées, alors que les calls en dehors de la monnaie et les puts dans la monnaie ont des volatilités implicites plus faibles. Pour les options de change, le smile de volatilité est en forme de U. Les options très en dehors de la monnaie ou fortement dans la monnaie ont donc des volatilités implicites plus élevées que les options à la monnaie.

Le plus souvent, les professionnels utilisent aussi une structure par termes des volatilités. La volatilité implicite d'une option dépend alors de sa durée de vie. Lorsque courbe de volatilité et structure par termes sont combinées, elles produisent une surface de volatilité. Celle-ci définit la volatilité implicite comme une fonction à la fois du prix d'exercice et de la durée de vie de l'option.

Références complémentaires

BAKSHI G., C. CAO et Z. CHEN, « Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models », *Journal of Finance*, 52, n° 5 (décembre 1997), 2004-49.

BATES D. S., « Post-87 Crash Fearsin the S&P Futures Market », *Journal of Econometrics*, 94 (janvier/février 2000), 181-238.

DERMAN E., « Regimes of Volatility », *RISK*, avril 1999, 55-59.

DUMAS B., J. FLEMING et R. E. WHALEY, « Implied Volatility Functions : Empirical Tests », *Journal of Finance*, 53, 6 (décembre 1998), 2059-2106.

EDERINGTON L. H. et W. GUAN, « Why are Those Options Smiling », *Journal of Derivatives*, 10, 2 (2002), 9-34.

JACKWERTH J. C. et M. RUBINSTEIN, « Recovering Probability Distributions from Option Prices », *Journal of Finance*, 51 (décembre 1996), 1611-31.

LAUTERBACH B. et P. SCHULTZ, « Pricing Warrants : An Empirical Study of the Black-Scholes Model and Its Alternatives », *Journal of Finance*, 4, n° 4 (septembre 1990), 1181-1210.

MELICK W. R. et C. P. THOMAS, « Recovering an Asset's Implied Probability Density Function from Option Prices : An Application to Crude Oil during the Gulf Crisis », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32, n° 1 (mars 1996), 91-116.

RUBINSTEIN M., « Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978 », *Journal of Finance*, 40 (juin 1985), 455-80.

RUBINSTEIN M., « Implied Binomial Trees », *Journal of Finance*, 49, 3 (juillet 1994), 771-818.

XU X. et S. J. TAYLOR, « The Term Structure of Volatility Implied by Foreign Exchange Options », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29 (1994), 57-74.

Problèmes et exercices

16.1 Quel schéma de volatilité implicite est-il probable d'observer lorsque :

- **a.** Les deux queues de la distribution des cours d'actions sont moins importantes que celles d'une distribution log-normale ?
- **b.** La queue de droite est plus épaisse et celle de gauche plus fine par rapport à une distribution log-normale ?

16.2 Quel schéma de volatilité implicite est-il probable d'observer pour des options sur actions ?

16.3 Quel schéma de volatilité implicite observe-t-on en cas de variations extrêmes du cours de l'actif sous-jacent ? Ce schéma est-il plus prononcé pour une option à 2 ans ou pour une option à 3 mois ?

16.4 Un call et un put ont mêmes prix d'exercice et mêmes dates d'échéance. Le call a une volatilité implicite de 30 % et le put a une volatilité implicite de 25 %. Quelles transactions pouvez-vous envisager ?

16.5 Expliquez pourquoi une distribution de probabilité avec une queue gauche plus épaisse conduit à une courbe de volatilité décroissante (en fonction du prix d'exercice).

16.6 Un call européen cote 3,00 € et le modèle de Black et Scholes donne une valeur de 3,50 €. La valeur, selon le modèle de Black et Scholes, d'un put européen de même prix d'exercice et de même échéance est de 1,00 €. Quel devrait être le prix de marché de cette option ? Justifiez votre réponse.

16.7 Expliquez le terme « krachophobie ».

16.8 Le cours d'une action est actuellement de 20 €. Demain est attendue une information susceptible de faire varier le cours de 5 € à la hausse ou à la baisse. Quels sont les problèmes rencontrés si le modèle de Black et Scholes est utilisé pour évaluer une option sur cette action, d'échéance 1 mois ?

16.9 Quel schéma de volatilité implicite est-il probable d'observer pour des options d'échéance 6 mois lorsque la volatilité est incertaine et positivement corrélée avec le cours de l'action ?

16.10 Quels sont les problèmes principaux rencontrés lorsqu'on cherche à tester empiriquement un modèle d'évaluation d'options sur actions ?

16.11 Supposons que la politique d'une banque centrale soit de permettre la fluctuation d'un taux de change entre 0,97 et 1,03. Quel schéma de volatilités implicites, déduit des options de change correspondantes, vous attendriez-vous à observer ?

16.12 Les traders d'options qualifient parfois les options très en dehors d'options sur la volatilité. Pourquoi utilisent-ils ce terme ?

16.13 Un call européen sur une action a un prix d'exercice de 30 €, une durée de vie de 1 an et une volatilité implicite de 30 %. Un put européen sur cette même action a un prix d'exercice de 30 €, une durée de vie de 1 an et une volatilité implicite de 33 %. Quelle est l'opportunité d'arbitrage offerte à un trader ? Est-ce que l'arbitrage n'est possible que sous l'hypothèse de log-normalité sous-jacente de Black et Scholes ? Justifiez votre réponse de manière détaillée.

16.14 Supposons que le résultat d'une procédure judiciaire affectant le Crédit Lyonnais doive être annoncé demain. Le cours de l'action Crédit Lyonnais est actuellement de 60 €. Si l'issue est favorable au Crédit Lyonnais, il est prévu une hausse du cours de l'action qui coterait alors 75 €. Si elle est défavorable, le cours de l'action chuterait à 50 €. Quelle est la probabilité risque-neutre d'une annonce favorable ? Supposons que la volatilité annuelle de l'action Crédit Lyonnais soit de 25 % pour les six mois suivant l'annonce si cette dernière est favorable, et qu'elle soit de 40 % si l'annonce est défavorable. Utilisez DerivaGem pour calculer la relation entre la volatilité implicite et le prix d'exercice d'une option européenne à 6 mois sur l'action Crédit Lyonnais. Vous supposerez que le Crédit Lyonnais ne verse aucun dividende et que le taux sans risque à 6 mois est de 6 %. Considérez des calls avec des prix d'exercice de 30, 40, 50, 60, 70 et 80.

16.15 Un taux de change est actuellement à 0,8000. La volatilité de ce taux de change est égale à 12 % et les taux d'intérêt des deux pays sont les mêmes. À l'aide de l'hypothèse de log-normalité, estimez les probabilités que le taux de change dans trois mois soit (a) inférieur à 0,7000, (b) entre 0,7000 et 0,7500, (c) entre 0,7500 et 0,8000, (d) entre 0,8000 et 0,8500, (e) entre 0,8500 et 0,9000, et (f) supérieur à 0,9000. En vous fondant sur le smile de volatilité généralement observé sur le marché des changes, quelles estimations trouvez-vous trop faibles et trop élevées ?

16.16 Une action cote 40 €. Un call européen à 6 mois sur cette action, de prix d'exercice 30 €, fournit une volatilité implicite de 35 %. Un call européen à 6 mois sur la même action, de prix d'exercice 50 €, donne une volatilité implicite de 28 %. Le taux sans risque est de 5 % et aucun dividende n'est attendu. Expliquez pourquoi les deux volatilités implicites sont différentes. Utilisez DerivaGem pour calculer les valeurs des deux options. Servez-vous de la relation de parité call-put pour calculer les valeurs de deux puts à 6 mois de prix d'exercice 30 € et 50 €. Utilisez DerivaGem pour calculer les volatilités implicites de ces deux puts.

16.17 « Le modèle de Black et Scholes est utilisé par les traders comme un outil d'interpolation. » Commentez ce point de vue.

Questions complémentaires

16.18 Une action cote 4 € et la société n'est pas endettée. Un analyste estime la valeur de liquidation de la société à au moins 300 000 € et il y 100 000 actions en circulation. Quel smile de volatilité vous attendez-vous à observer ?

16.19 Une société attend actuellement l'issue d'un procès crucial. Le jugement doit être rendu dans un mois. Le cours de l'action est aujourd'hui de 20 €. Si l'issue du procès est favorable, le cours de l'action atteindra 24 € dans un mois. Sinon, le cours de l'action sera de 18 €. Le taux sans risque à 1 mois est de 8 % par an.

- **a.** Quelle est la probabilité risque-neutre d'un jugement favorable ?
- **b.** Quelles sont les valeurs d'options à 1 mois avec des prix d'exercice de 19 €, 20 €, 21 €, 22 € et 23 € ?
- **c.** Utilisez DerivaGem pour calculer un smile de volatilité pour des calls à 1 mois.
- **d.** Vérifiez que le même smile de volatilité est obtenu avec des puts à 1 mois.

16.20 Un prix futures est actuellement à 40 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 5 %. Demain sont attendues des informations qui devraient conduire la volatilité des trois prochains mois à 10 % ou 30 %. Il y a 60 % de chances d'obtenir le premier résultat (10 % de volatilité) et 40 % d'obtenir le second (30 %). Utilisez DerivaGem pour calculer un smile de volatilité pour des options à 3 mois.

16.21 Des données sur un certain nombre de devises sont fournies sur le site Internet de l'auteur, www.rotman.utoronto.ca/~hull.

Choisissez une devise et utilisez les données pour produire un tableau similaire au tableau 16.1.

16.22 Des données sur un certain nombre d'indices d'actions sont fournies sur le site Internet de l'auteur, www.rotman.utoronto.ca/~hull.

Choisissez un indice et vérifiez si une baisse de plus de 3 écarts-types est plus fréquente qu'une hausse de plus de 3 écarts-types.

16.23 Soient un call européen et un put européen de même prix d'exercice et de même date d'échéance. Montrez que leur valeur varie du même montant lorsque la volatilité augmente d'un niveau σ_1 à un niveau σ_2 durant un court intervalle de temps. (Indication : utilisez la relation de parité call-put.)

Annexe

Détermination de la distribution risque-neutre implicite à partir de smiles de volatilité

Le prix d'un call européen sur un actif avec un prix d'exercice K et une maturité T est donné par :

$$c = e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} (S_T - K)\, g(S_T) dS_T$$

où r est le taux d'intérêt (supposé constant), S_T le cours de l'actif en T, et g la fonction de densité de probabilité risque-neutre de S_T. En calculant la dérivée par rapport à K, on obtient :

$$\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} g(S_T)\, dS_T$$

En dérivant à nouveau par rapport à K, on a :

$$\frac{\partial^2 c}{\partial K^2} = e^{-rT} g(K)$$

La densité g s'écrit donc :

$$g(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 c}{\partial K^2}$$

Ce résultat, dû à Breeden et Litzenberger (1978), permet d'estimer des distributions de probabilité risque-neutre à partir de smiles de volatilité[6]. Notons c_1, c_2, et c_3 les valeurs de calls de maturité T et de prix d'exercice respectifs $K - \delta$, K et $K + \delta$. En supposant que δ est petit, une estimation de $g(K)$ est donnée par :

$$e^{rT} \frac{c_1 + c_3 - 2c_2}{\delta^2}$$

6. Voir D. T. Breeden et R. H. Lintzenberger, « Prices of State-Contingent Claim Implicit in Option Prices », *Journal of Business*, 51 (1978), 621-51.

Chapitre 17

Les procédures numériques

Ce chapitre traite de trois procédures numériques permettant d'évaluer les produits dérivés pour lesquels il n'existe pas de formule analytique exacte. Les deux premières reposent sur le recours aux arbres binomiaux, présentés au chapitre 11, et aux simulations de Monte Carlo, évoquées brièvement au chapitre 12 lors de la présentation des processus stochastiques. La dernière s'appuie sur la méthode des différences finies.

La simulation de Monte Carlo est principalement utilisée pour évaluer les produits dérivés dont les payoffs dépendent de la trajectoire suivie par le prix de l'actif sous-jacent, ou sont fonction de plusieurs sous-jacents. Les arbres binomiaux et les méthodes des différences finies permettent, pour leur part, de gérer les situations dans lesquelles le détenteur du contrat doit prendre des décisions d'exercice avant l'échéance. Outre l'évaluation des contrats, ces procédures permettent toutes de calculer les « lettres grecques » décrites au chapitre 15, comme le delta, le gamma ou le vega.

Les procédures développées dans ce chapitre sont suffisantes pour traiter les problèmes d'évaluation de la plupart des actifs dérivés rencontrés dans la pratique. Cependant, il existe des cas particuliers n'entrant pas dans ce cadre. Les méthodes adéquates pour les traiter seront abordées au chapitre 24.

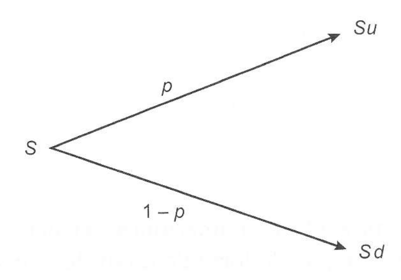
17.1 Les arbres binomiaux

Au chapitre 11, nous avons introduit les arbres binomiaux pour évaluer des options soit européennes soit américaines. Les formules de Black et Scholes des chapitres 13

et 14 fournissent une évaluation analytique des premières[1] ; il n'existe pas, en revanche, une telle solution (analytique) pour les secondes[2].

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 11, l'évaluation par la méthode binomiale consiste à diviser la durée de vie de l'option en intervalles de longueur Δt.

Sur chacun de ces intervalles, le prix de l'actif passe de sa valeur initiale S à l'une des deux valeurs possibles, Sd ou Su. Ces mouvements sont représentés dans le graphique 17.1. En général, on a $u > 1$ et $d < 1$, aussi appelle-t-on le passage de S à Su un mouvement *up*, et le passage de S à Sd un mouvement *down*. Les probabilités respectives de ces deux variations sont notées p et $1 - p$.



Graphique 17.1 : Mouvements de prix de l'actif sur l'intervalle Δt dans un modèle binomial.

L'évaluation risque-neutre

Le principe de l'évaluation risque-neutre, introduit aux chapitres 11 et 13, établit qu'une option (de même que tout autre produit dérivé) peut être évaluée dans un univers risque-neutre. Cela revient, dans une optique d'évaluation, à poser les hypothèses suivantes :

1. La rentabilité espérée de tout actif échangé sur le marché est le taux d'intérêt sans risque.
2. Tout flux futur peut être évalué en actualisant sa valeur espérée au taux d'intérêt sans risque.

L'utilisation d'arbres binomiaux pour l'évaluation repose essentiellement sur ces hypothèses.

1. Les formules de Black et Scholes sont fondées sur les mêmes hypothèses que celles obtenues en utilisant les arbres binomiaux. Comme on peut s'y attendre, quand le nombre de pas de temps tend vers l'infini, le prix « binomial » d'une option européenne converge vers celui donné par la formule de Black et Scholes.

2. Il existe des formules analytiques approximant la valeur d'une option américaine. La plus connue est obtenue par une approximation quadratique. Voir la note technique n° 8 sur le site de l'éditeur pour une description de cette méthode (www.pearsoneducation.fr).

La détermination de p, u et d

Le choix de p, u et d est réalisé de façon à retrouver les valeurs exactes de la moyenne et de la variance de rentabilité de l'actif sur chaque intervalle de longueur Δt. Dans l'univers risque-neutre, la rentabilité espérée d'une action doit être le taux d'intérêt sans risque, r. Supposons que l'actif produise un taux de dividende égal à q. Le gain espéré en capital sur ce titre est alors $r - q$. Cela signifie qu'à la fin d'un intervalle de longueur Δt, l'action de prix initial S aura une valeur espérée égale à $Se^{(r-q)\Delta t}$. Les paramètres doivent donc vérifier :

$$Se^{(r-q)\Delta t} = pSu + (1-p)Sd \tag{17.1}$$

ou encore :

$$e^{(r-q)\Delta t} = pu + (1-p)d \tag{17.2}$$

Le processus stochastique présenté à la section 13.4 pour le prix des actions conduit, sur un intervalle de longueur Δt, à une variance de rentabilité de l'actif égale à $\sigma^2 \Delta t$. Comme la variance d'une variable X est définie par $\mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$, on peut écrire :

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 = \sigma^2 \Delta t$$

ou encore :

$$pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2 \Delta t$$

En remplaçant p par sa valeur dans l'équation (17.2), cette expression se réduit à :

$$e^{(r-q)\Delta t}(u+d) - ud - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2 \Delta t \tag{17.3}$$

Les équations (17.2) et (17.3) constituent deux premières conditions sur la valeur des paramètres p, u et d. Cox, Ross et Rubinstein (1979)[3] imposent comme contrainte supplémentaire :

$$u = \frac{1}{d}$$

Ces trois conditions impliquent les valeurs suivantes des paramètres :

$$p = \frac{a-d}{u-d} \tag{17.4}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{17.5}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{17.6}$$

avec :

$$a = e^{(r-q)\Delta t} \tag{17.7}$$

Les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt sont ici ignorés[4]. La variable a est parfois appelée facteur de capitalisation ou taux de croissance. Les équations (17.4) à (17.7) sont cohérentes avec les résultats présentés à la section 11.9.

3. Voir J. C. Cox, S. A. Ross et M. Rubinstein, « Option Pricing : A Simplified Approach », *Journal of Financial Economics*, 7 (1979), 229-263.

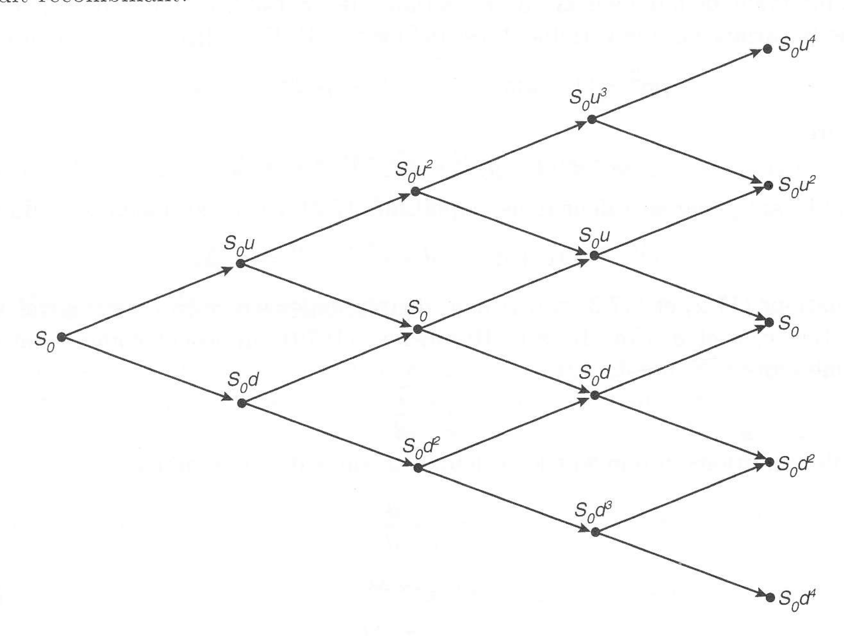
4. Il est facile de montrer ces résultats. On peut tout d'abord noter que les équations (17.4) et (17.7) satisfont la contrainte (17.2). La fonction exponentielle e^x peut être développée sous la forme

L'arbre d'évolution des prix de l'action

Le graphique 17.2 représente l'arbre d'évolution des prix de l'action utilisé dans les modèles binomiaux. À la date initiale, le prix S_0 de l'actif est connu. À la date Δt, deux prix peuvent être atteints, S_0u et S_0d ; à la date $2\Delta t$, trois prix peuvent être atteints, S_0u^2, S_0 et S_0d^2 ; et ainsi de suite. D'une manière générale, il existe $i + 1$ prix possibles pour l'action à la date $i\Delta t$, égaux à :

$$S_0u^jd^{i-j},\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ i$$

L'arbre représenté dans le graphique 17.2 a été construit en imposant la condition supplémentaire $u = 1/d$. Tout mouvement up suivant un mouvement down annule donc le précédent, et inversement. Ainsi, par exemple, $S_0u^2d = S_0u$. En outre, quel que soit le nœud de départ, un mouvement up suivi d'un mouvement down conduit donc au même prix qu'un mouvement down suivi d'un mouvement up. L'arbre est alors dit recombinant.

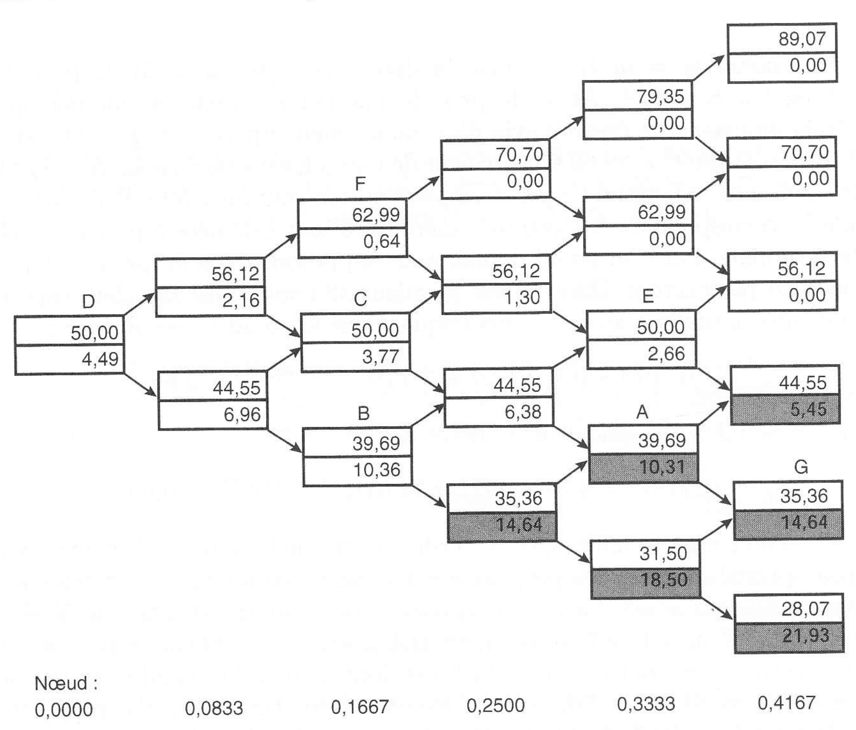


Graphique 17.2 : Arbre binomial utilisé pour l'évaluation d'options sur un support de prix initial S_0.

$1 + x + x^2/2 + \ldots$ Si on ignore les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt, les équations (17.5) et (17.6) peuvent s'écrire $u = 1+\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$ et $d = 1-\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$. En outre, $e^{(r-q)\Delta t} = 1+(r-q)\Delta t$ et $e^{2(r-q)\Delta t} = 1 + 2(r - q)\Delta t$. On voit par substitution de tous ces termes par leur développement que la contrainte (17.3) est bien vérifiée quand les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt sont ignorés.

L'évaluation par induction arrière

Les options sont évaluées par induction arrière en partant de la fin de l'arbre qui correspond à la date d'échéance T. À cette date, la formulation de la valeur de l'option est connue. Ainsi, un put vaut $\max(K - S_T\,;\,0)$ et un call $\max(S_T - K\,;\,0)$, où S_T désigne le prix de l'action à la date T, et K le prix d'exercice. Comme l'univers dans lequel on se situe est supposé risque-neutre, la valeur à chaque nœud de la date $T - \Delta t$ peut être calculée comme la valeur espérée à la date T actualisée au taux d'intérêt sans risque r sur une durée Δt. De même, la valeur à tout nœud de la date $T - 2\Delta t$ peut être calculée comme la valeur espérée à la date $T - \Delta t$ actualisée sur une durée Δt au taux r, et ainsi de suite jusqu'à la date initiale. Pour les options américaines, il est nécessaire de vérifier à chaque nœud de l'arbre si l'exercice immédiat est préférable à la détention de l'option pour une période Δt supplémentaire. La valeur de l'option à la date 0 est ainsi déterminée par induction arrière sur l'ensemble des nœuds.



Graphique 17.3 : Arbre binomial du put américain sur une action ne versant pas de dividendes (exemple 17.1) construit par DerivaGem.

- **Exemple 17.1**

  Prenons le cas d'une option de vente américaine d'échéance 5 mois et de prix d'exercice 50 €, portant sur une action ne versant pas de dividendes. L'action cote 50 €, sa volatilité est estimée à 40 % par an et le taux sans risque est égal à 10 % par an. Avec les notations adoptées précédemment, nous avons $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0{,}10$, $\sigma = 0{,}40$, $T = 0{,}4167$ et $q = 0$. Nous pouvons diviser la

vie de l'option en cinq intervalles d'un mois (0,0833 année) et construire l'arbre binomial correspondant. Pour cette valeur $\Delta t = 0{,}0833$, les équations (17.4) à (17.7) s'écrivent :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1{,}1224, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0{,}8909$$

$$a = e^{r\Delta t} = 1{,}0084, \quad p = \frac{a-d}{u-d} = 0{,}5073$$

$$1 - p = 0{,}4927$$

Le graphique 17.3 représente l'arbre binomial construit avec DerivaGem. Deux valeurs différentes apparaissent à chaque nœud, le prix de l'action dans la cellule du haut et la valeur de l'option dans la cellule du bas. À tout nœud de l'arbre, les probabilités respectives des mouvements up et down sont égales à 0,5073 et 0,4927.

Au j-ième nœud ($j = 0, 1, \ldots, i$) de la date i ($i = 0, 1, \ldots, 5$), le prix de l'action est égal à $S_0 u^j d^{i-j}$. Ainsi, le prix de l'action au nœud A, auquel on a observé trois mouvements down suivis d'un mouvement up ($i = 4$, $j = 1$), est égal à $50 \times 1{,}1224 \times 0{,}8909^3 = 39{,}69$ €. La valeur de l'option est égale à $\max(K - S_T\,; 0)$ aux nœuds terminaux. Au nœud G, par exemple, l'option vaut $\max(50 - 35{,}36\,; 0) = 14{,}64$. Les valeurs correspondant à l'avant-dernière date sont calculées à partir de celles de la date terminale. Pour un nœud donné, nous supposons dans un premier temps que l'option n'est pas exercée. Dans ce cas, la valeur de l'option est sa valeur espérée à la date suivante, actualisée au taux sans risque. Pour le nœud E, on obtient :

$$(0{,}5073 \times 0 + 0{,}4927 \times 5{,}45)e^{-0{,}10 \times 0{,}0833} = 2{,}66$$

alors qu'au nœud A, les calculs conduisent à :

$$(0{,}5073 \times 5{,}45 + 0{,}4927 \times 14{,}64)e^{-0{,}10 \times 0{,}0833} = 9{,}90$$

Dans un second temps, nous devons vérifier dans quelle mesure l'exercice anticipé n'est pas optimal, c'est-à-dire préférable à l'attente. Au nœud E, l'exercice anticipé ne rapporterait rien puisque le prix d'exercice est égal au prix de l'action, 50 €, ce qui donnerait une valeur nulle à l'option. Il est clairement préférable de conserver l'option. La valeur correcte de l'option au nœud E est donc 2,66 €. Les conditions ne sont pas les mêmes au nœud A. Si l'option est exercée prématurément, elle rapporte alors 50 € – 39,69 €, soit 10,31 €. C'est plus que les 9,90 € calculés précédemment. Dans ces conditions, si le nœud A est atteint, l'option devrait être exercée prématurément et la valeur correcte de l'option à ce nœud est 10,31 €.

Le principe de calcul est identique pour tous les nœuds de l'arbre. Cependant, l'exercice anticipé de l'option dans la monnaie n'est pas toujours optimal. Le nœud B illustre cette situation. L'exercice de l'option rapporte 50 € – 39,69 €, soit 10,31 €, alors que sa valeur, si on n'exerce pas, est donnée par :

$$(0{,}5073 \times 6{,}38 + 0{,}4927 \times 14{,}64)e^{-0{,}10 \times 0{,}0833} = 10{,}36$$

L'option vaut donc 10,36 € et l'exercice prématuré n'est pas optimal.

En procédant ainsi jusqu'à la date 0, on trouve une valeur de 4,49 € au nœud initial, ce qui constitue notre estimation numérique de la valeur courante de l'option. En pratique, on choisit des périodes Δt plus courtes mais plus nombreuses. Les prix de l'option obtenus avec DerivaGem pour 30, 50, 100 et 500 périodes sont respectivement égaux à 4,263, 4,272, 4,278 et 4,283.

La traduction algébrique de la méthode binomiale

Considérons un put américain sur une action ne versant pas de dividendes dont la durée de vie a été divisée en N périodes de durée Δt. Notons (i, j) le j-ième nœud de la date $i\Delta t$, avec $0 \leqslant i \leqslant N$ et $0 \leqslant j \leqslant i$, et $f_{i,j}$ la valeur de l'option au nœud (i, j). À ce nœud, le prix de l'action est $S_0 u^j d^{i-j}$. Comme la valeur à l'échéance d'un put s'écrit $\max(K - S_T\,;\,0)$, on a :

$$f_{N,j} = \max(K - S_0 u^j d^{N-j}\,;\,0),\ j = 0,\, 1, \ldots,\, N$$

De la date $i\Delta t$ à la date $(i+1)\Delta t$, l'action passe du nœud (i, j) au nœud $(i+1, j+1)$ avec une probabilité p, et au nœud $(i+1, j)$ avec une probabilité $1-p$. En supposant que l'option n'est pas exercée prématurément, l'évaluation risque-neutre conduit à :

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]$$

pour $0 \leqslant i \leqslant N-1$ et $0 \leqslant j \leqslant i$. On compare cette valeur de $f_{i,j}$ à la valeur intrinsèque de l'option à chaque nœud précédant la date d'échéance, afin de prendre en compte la possibilité d'exercice anticipé. La valeur de l'option est donc :

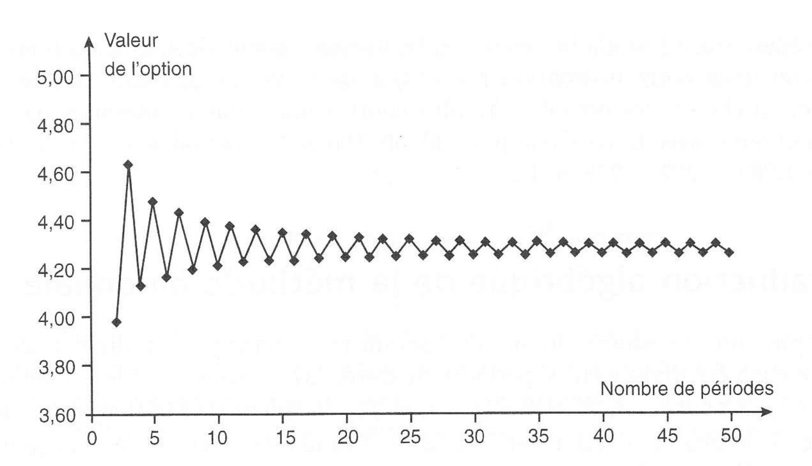
$$f_{i,j} = \max\{K - S_0 u^j d^{i-j}\,;\, e^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]\}$$

Notez que, l'induction arrière étant conduite à partir de la date d'échéance T, la valeur à la date $i\Delta t$ intègre non seulement la possibilité d'exercice anticipé en date $i\Delta t$, mais aussi à toutes les dates postérieures, jusqu'à l'échéance.

La valeur exacte de l'option de vente américaine est obtenue en faisant tendre la durée des périodes Δt vers 0, mais dans la pratique, un découpage en $N = 30$ périodes donne des résultats généralement satisfaisants. Le graphique 17.4 illustre la convergence du prix de l'option pour l'exemple considéré précédemment. Ce graphique a été obtenu à l'aide des fonctions du développeur d'applications contenu dans DerivaGem (ici, nous avons utilisé l'application A).

L'estimation du delta et des autres lettres grecques

Nous avons vu au chapitre 15 que le delta d'une option, noté Δ, est le taux de variation de son prix par rapport à une modification du prix de l'actif sous-jacent. Si on note



Graphique 17.4 : Convergence du prix de l'option de l'exemple 17.1 obtenue avec les fonctions du développeur d'applications de DerivaGem.

ΔS une petite variation du prix du sous-jacent et Δf la variation correspondante du prix de l'option, le delta peut être estimé par :

$$\frac{\Delta f}{\Delta S}$$

À la date Δt, la valeur estimée de l'option est $f_{1,1}$ en cas de hausse du prix du sous-jacent à $S_0 u$, et $f_{1,0}$ en cas de baisse à $S_0 d$. Ainsi, pour une variation $\Delta S = S_0 u - S_0 d$, la valeur de Δf est $f_{1,1} - f_{1,0}$. Une estimation du Δ à la date Δt est alors donnée par :

$$\Delta = \frac{f_{1,1} - f_{1,0}}{S_0 u - S_0 d} \tag{17.8}$$

Pour déterminer le gamma, noté Γ, on utilise deux estimations du delta à la date $2\Delta t$. Pour la valeur de l'action $S = \frac{1}{2}\left(S_0 u^2 + S_0\right)$, c'est-à-dire à mi-chemin entre le deuxième et le troisième nœud, le delta vaut $(f_{2,2} - f_{2,1})/(S_0 u^2 - S_0)$; pour la valeur de l'action $S = \frac{1}{2}\left(S_0 + S_0 d^2\right)$, c'est-à-dire à mi-chemin entre le premier et le deuxième nœud, le delta vaut $(f_{2,1} - f_{2,0})/(S_0 - S_0 d^2)$. Si l'on note h la différence entre ces deux valeurs de S, on a :

$$h = 0{,}5(S_0 u^2 - S_0 d^2)$$

Le gamma est égal à la variation du delta divisée par h :

$$\Gamma = \frac{\left[(f_{2,2} - f_{2,1}) \,/\, \left(S_0 u^2 - S_0\right)\right] - \left[(f_{2,1} - f_{2,0}) \,/\, \left(S_0 - S_0 d^2\right)\right]}{h} \tag{17.9}$$

On dispose ainsi d'estimations du delta pour la date Δt et du gamma pour la date $2\Delta t$. En pratique, ces valeurs servent aussi d'estimation du delta et du gamma pour la date initiale[5].

5. Dans le cas où une précision plus importante est nécessaire pour le delta et le gamma, on peut faire débuter l'arbre binomial à la date $-2\Delta t$ et supposer que le prix est S_0 à cette date. Le prix de l'option à la date zéro sera alors calculé pour trois prix différents de l'action.

L'arbre permet encore d'obtenir directement un paramètre de couverture supplémentaire, le thêta, noté Θ. Il s'agit du taux de variation du prix de l'option par rapport au temps, toutes choses égales par ailleurs. Pour un arbre débutant à la date zéro, une estimation du thêta est donnée par :

$$\Theta = \frac{f_{2,1} - f_{0,0}}{2\Delta t} \tag{17.10}$$

Par contre, pour déterminer le vega, il est nécessaire de construire un autre arbre pour lequel on aura fait varier la volatilité de $\Delta\sigma$, tout en gardant la même durée de période Δt. La différence entre la nouvelle valeur de l'option f^* et celle qui correspond à l'arbre original permet alors l'estimation du vega.

$$\nu = \frac{f^* - f}{\Delta\sigma}$$

Le rhô peut être obtenu en suivant le même principe.

■ **Exemple 17.2**

Reprenons l'exemple 17.1. On peut lire dans le graphique 17.3 les valeurs de $f_{1,0} = 6{,}96$ et de $f_{1,1} = 2{,}16$. L'équation (17.8) donne une estimation du delta de :

$$\frac{2{,}16 - 6{,}96}{56{,}12 - 44{,}55} = -0{,}41$$

D'après l'équation (17.9), l'estimation du gamma de l'option peut être obtenue à partir de la valeur de l'option aux nœuds B, C et F.

$$\frac{[(0{,}64 - 3{,}77) \,/\, (62{,}99 - 50{,}00)] - [(3{,}77 - 10{,}36) \,/\, (50{,}00 - 39{,}69)]}{11{,}65} = 0{,}03$$

D'après l'équation (17.10), une estimation du thêta de l'option peut être obtenue à partir des valeurs aux nœuds D et C.

$$\Theta = \frac{3{,}77 - 4{,}49}{0{,}1667} = -4{,}3 \text{ par an.}$$

Cela correspond à une variation de –0,012 par jour. Bien entendu, il ne s'agit là que d'estimations grossières. Leur précision s'accroît à mesure qu'on augmente le nombre de périodes. Les estimations respectives du delta, du gamma et du thêta données par DerivaGem pour 50 périodes sont –0,415, 0,034 et –0,0117. En changeant de manière marginale les paramètres de volatilité et de taux sans risque, on obtient des estimations de vega et rhô égales à 0,123 et –0,072.

17.2 L'évaluation des options sur indices, sur devises et contrats futures à partir des arbres binomiaux

Nous avons expliqué aux chapitres 11 et 14 que les indices, les devises et les contrats futures pouvaient être considérés, dans l'optique de l'évaluation, comme des actifs

versant des taux de dividende connus. Dans le cas d'un indice, le taux de dividende est celui du portefeuille composant l'indice ; pour une devise, c'est le taux d'intérêt de la devise étrangère ; dans le cas du contrat futures, c'est le taux d'intérêt sans risque. La méthode binomiale est ainsi utilisable pour des options sur ces divers supports, à condition d'interpréter correctement le paramètre q de l'équation (17.7).

■ **Exemple 17.3**

Prenons le cas d'un call américain sur un contrat futures d'indice boursier de maturité 4 mois. Le prix futures est initialement 300, de même que le prix d'exercice, le taux d'intérêt sans risque est égal à 8 % et la volatilité de l'indice est estimée à 30 %. Pour la construction de l'arbre binomial, la durée de vie de l'option est scindée en quatre périodes d'un mois. On a donc $F_0 = 300$, $K = 300$, $r = 0{,}08$, $\sigma = 0{,}3$, $T = 0{,}3333$ et $\Delta t = 0{,}0833$. Un contrat futures peut être assimilé à une action versant des dividendes au taux r, aussi la valeur de q à introduire dans l'équation (17.7) est r, ce qui donne $a = 1$. Les autres paramètres de l'arbre binomial sont les suivants :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1{,}0905, \quad d = \frac{1}{u} = 0{,}9170$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = 0{,}4784, \quad 1 - p = 0{,}5216$$

Le graphique 17.5 représente l'arbre construit par DerivaGem (la valeur du haut est le prix futures et celle du bas le prix de l'option). L'estimation du prix de l'option est de 19,16, mais il convient d'augmenter le nombre de périodes pour avoir une plus grande précision. Pour 50 et 100 périodes, les prix donnés par DerivaGem sont respectivement égaux à 20,18 et 20,22.

■ **Exemple 17.4**

Un put américain sur la livre sterling (GBP) a une maturité de 1 an et un prix d'exercice de 1,6000 \$. La livre sterling s'échange actuellement à 1,6100 \$, les taux d'intérêt sans risque en USD et en GBP valent respectivement 8 % et 9 %, et la volatilité du taux de change GBP/USD est estimée à 12 %. On peut donc écrire $S_0 = 1{,}61$, $K = 1{,}60$, $r = 0{,}08$, $r_f = 0{,}09$, $\sigma = 0{,}12$, $T = 1$. Avec des sous-périodes d'une durée de 3 mois, on a $\Delta t = 0{,}25$. Dans le cas de contrats d'options sur devises, $q = r_f$, et l'équation (17.7) donne :

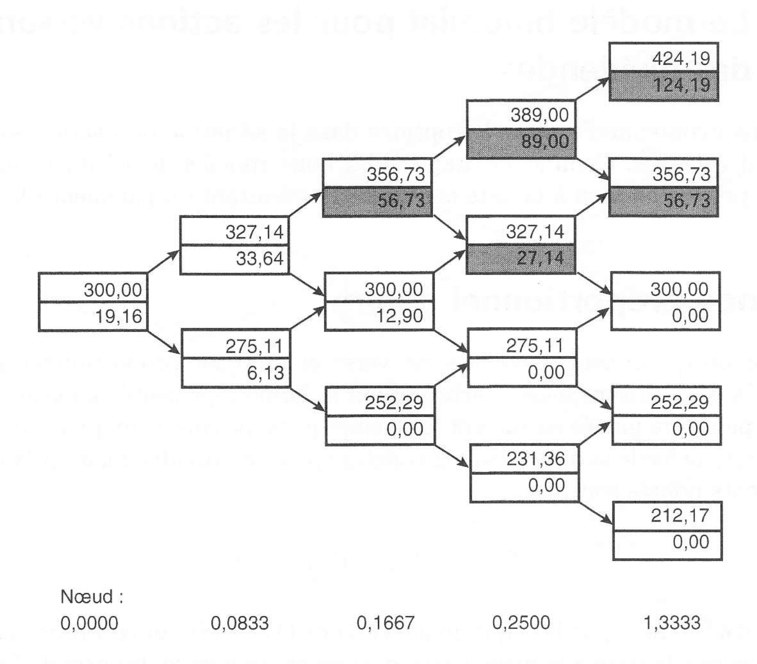
$$a = e^{(0{,}08\,-\,0{,}09)\,\times\,0{,}25} = 0{,}9975$$

Les autres paramètres de l'arbre binomial sont :

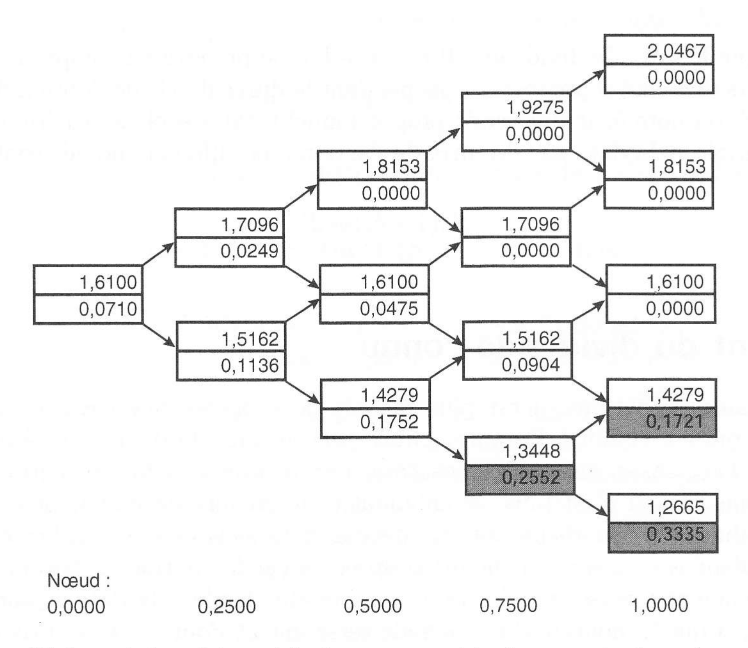
$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1{,}0618, \quad d = \frac{1}{u} = 0{,}9418$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = 0{,}4642, \quad 1 - p = 0{,}5358$$

Le graphique 17.6 représente l'arbre construit par DerivaGem (la valeur du haut est le taux de change et celle du bas le prix de l'option). Le prix de l'option est ici 0,0710 \$. (Pour 50 et 100 périodes, le prix donné par DerivaGem est dans les deux cas 0,0738.)



Graphique 17.5 : Arbre binomial du call américain sur contrat futures d'indice (exemple 17.3) construit par DerivaGem.



Graphique 17.6 : Arbre binomial du put américain sur devises (exemple 17.4) construit par DerivaGem.

17.3 Le modèle binomial pour les actions versant des dividendes

Nous allons maintenand'évaluer les options dans la situation où l'action sous-jacente verse des dividendes. Comme au chapitre 13, nous appellerons ici *dividende* la diminution du prix de l'action à la date ex-dividende résultant du paiement du dividende.

Dividende proportionnel connu

Si on suppose qu'un seul dividende est versé et qu'il est proportionnel au prix de l'action à la date de versement, l'arbre prend la forme représentée au graphique 17.7. L'analyse peut être menée en suivant les mêmes principes que ceux présentés jusqu'ici. Si la date $i\Delta t$ précède la date à laquelle l'action passe ex-dividende, les prix de l'action aux différents nœuds sont :

$$S_0 u^j d^{i-j},\ j = 0,\ 1,\ldots,\ i$$

où u et d sont définis par les équations (17.5) et (17.6). Si, au contraire, la date $i\Delta t$ est postérieure à la date à laquelle l'action passe ex-dividende, les prix de l'action aux différents nœuds sont :

$$S_0(1 - \delta)u^j d^{i-j},\ j = 0,\ 1,\ldots,\ i$$

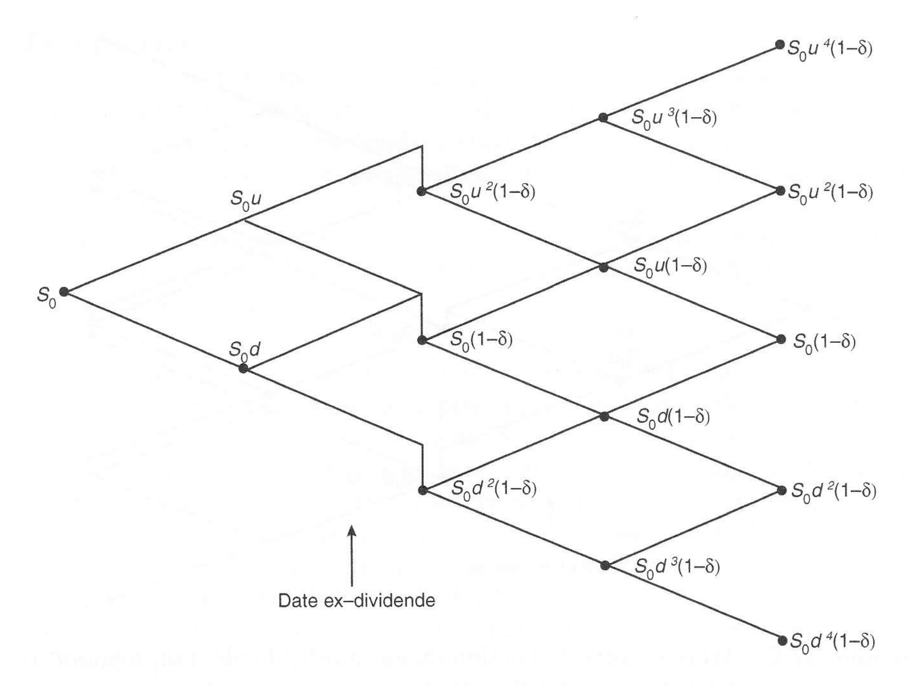
où δ désigne le taux de dividende. Il est possible de prendre en compte le versement de plusieurs dividendes proportionnels pendant la durée de vie de l'option de la même manière. Si on note δ_i le dividende proportionnel total associé à la période séparant la date initiale et la date $i\Delta t$, les prix de l'action aux différents nœuds sont égaux à :

$$S_0(1 - \delta_i)u^j d^{i-j}$$

Montant du dividende connu

Dans certaines situations, il est plus réaliste de supposer que c'est le montant du dividende qui est connu à l'avance, plutôt que le taux de dividende. Avec une volatilité de l'action, σ, supposée constante, l'arbre prend la forme représentée dans le graphique 17.8. Il n'est plus recombinant et le nombre de nœuds pour lesquels il faudra évaluer l'option risque fort de devenir très élevé, en particulier quand plusieurs dividendes sont versés pendant la durée de vie de l'option. Supposons ici qu'un seul dividende soit versé, que l'action passe ex-dividende à la date τ, entre $k\Delta t$ et $(k + 1)\Delta t$, et que le montant du dividende versé soit D. Pour $i \leqslant k$, les prix de l'action aux différents nœuds de la date $i\Delta t$ sont :

$$S_0 u^j d^{i-j},\ j = 0,\ 1,\ldots,\ i$$



Graphique 17.7 : Arbre de prix de l'action quand un dividende proportionnel connu est versé à une date précise.

Pour $i = k + 1$, les prix de l'action aux différents nœuds de la date $i\Delta t$ sont :

$$S_0 u^j d^{i-j} - D,\ j = 0,\ 1, \ldots,\ i$$

Pour $i = k + 2$, les prix de l'action aux différents nœuds de la date $i\Delta t$ sont :

$$(S_0 u^j d^{i-1-j} - D)u \text{ et } (S_0 u^j d^{i-1-j} - D)d$$

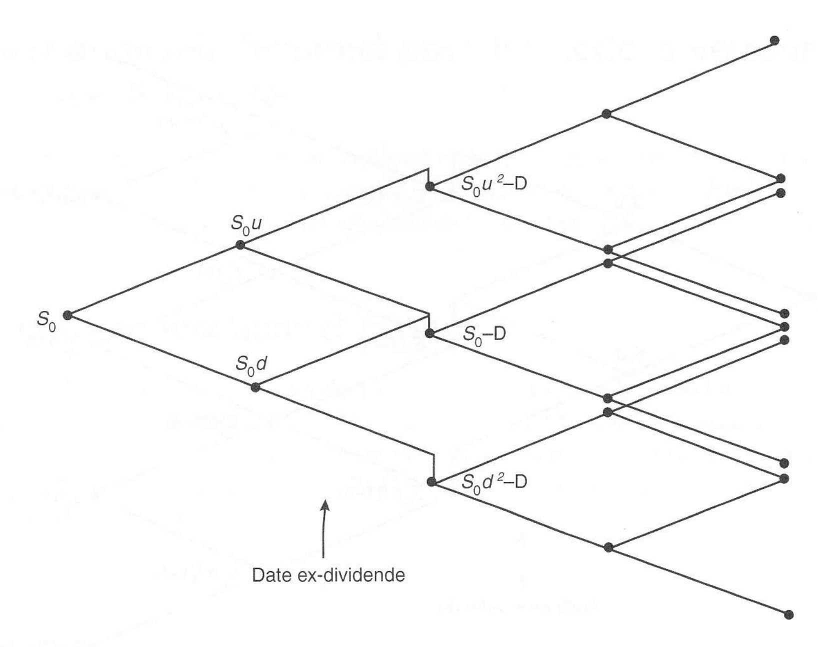
avec $j = 0,\ 1, \ldots,\ i - 1$. Il n'y a donc plus $i + 1$ mais $2i$ nœuds à la date $i\Delta t$. De même, pour $i = k + m$, il n'y a plus $k + m + 1$ mais $m(k + 2)$ nœuds.

Le problème peut être simplifié en supposant, comme dans l'analyse des options européennes de la section 13.12, que le prix de l'action a deux composantes : l'une est incertaine et l'autre est la valeur actualisée de tous les dividendes qui seront versés pendant la durée de vie de l'option. Nous supposerons, comme précédemment, qu'il n'y a qu'une date de versement de dividendes durant la vie de l'option, notée τ, et que $k\Delta t \leqslant \tau \leqslant (k+1)\Delta t$. À la date $i\Delta t$, la valeur de la composante incertaine, S^*, est donnée par :

$$S^* = S, \text{ pour } i\Delta t > \tau$$

et par :

$$S^* = S - De^{-r(\tau - i\Delta t)}, \text{ pour } i\Delta t \leqslant \tau$$



Graphique 17.8 : Arbre de prix de l'action quand un dividende d'un montant connu est versé, la volatilité étant supposée constante.

où D est le montant du dividende versé. Notons σ^* la volatilité, supposée constante[6], de la composante incertaine S^*. Les paramètres p, u et d peuvent être calculés à partir des équations (17.4) à (17.7) en remplaçant σ par σ^*. L'arbre d'évolution de S^* peut alors être construit de la manière habituelle. Il peut être modifié pour représenter les évolutions de S en ajoutant à chaque nœud, quand c'est nécessaire, la valeur actualisée des dividendes à verser avant l'échéance. Si on note S_0^* la valeur de S^* à la date initiale, les prix de l'action aux différents nœuds de la date $i\Delta t$ sont :

$$S_0^* u^j d^{i-j} + De^{-r(\tau - i\Delta t)},\ j = 0,\ 1, \ldots,\ i$$

pour $i\Delta t < \tau$ et :

$$S_0^* u^j d^{i-j},\ j = 0,\ 1, \ldots,\ i$$

pour $i\Delta t > \tau$. Cette approche, qui présente l'avantage d'être cohérente avec celle développée pour les options européennes à la section 13.12, permet de retrouver un arbre recombinant avec $i + 1$ nœuds à la date $i\Delta t$. Elle peut très facilement être généralisée pour prendre en compte plusieurs versements de dividendes dont les montants sont connus à l'avance.

6. Comme nous l'avons mentionné à la section 13.12, σ^* est en théorie légèrement supérieure à σ, la volatilité de S. Toutefois, en pratique, l'utilisation des volatilités implicites permet aux professionnels d'éviter d'avoir à faire la distinction entre σ et σ^*.

■ **Exemple 17.5**

Considérons un put américain d'échéance 5 mois. L'action sous-jacente, dont le prix initial est 52 €, doit verser un dividende unique de 2,06 € pendant la vie de l'option, l'action passant ex-dividende dans trois mois et demi. Le prix d'exercice est 50 €, le taux d'intérêt sans risque annuel est égal à 10 % et la volatilité annuelle est estimée à 40 %.

On construit d'abord l'arbre d'évolution de S^*, le prix de l'action diminué de la valeur actualisée des dividendes à verser jusqu'à l'échéance. À la date initiale, la valeur actualisée du dividende est :

$$2{,}06e^{-0{,}2917 \times 0{,}1} = 2{,}00$$

La valeur initiale de S^* est donc 52 € – 2,00 € = 50 €. Le graphique 17.3 associé à l'exemple 17.1 donne une représentation de l'arbre d'évolution de S^* dès lors qu'on suppose une volatilité de 40 % pour S^*. (Dans ce cas, le prix initial et la volatilité sont en effet les mêmes dans les deux exemples.) Il suffit alors d'ajouter à chaque nœud la valeur actualisée du dividende à verser pour obtenir la représentation binomiale de l'évolution de S, illustrée dans le graphique 17.9. Comme dans l'arbre du graphique 17.3, les probabilités respectives des mouvements up et down sont 0,5073 et 0,4927. L'induction arrière conduit à un prix initial de 4,44 € pour cette option de vente (pour 50 et 100 périodes, DerivaGem donne des prix de 4,202 et de 4,212).

Quand il reste une durée importante jusqu'à l'échéance (par exemple, trois ans ou plus), il est parfois plus judicieux de considérer un taux de dividende connu plutôt qu'un montant de dividende connu, car on ne peut raisonnablement supposer que ce dernier restera identique, quel que soit le cours futur de l'action[7]. C'est pourquoi il est souvent plus pratique de travailler avec un taux de dividende payé en continu. Évaluer une option sur une action payant un dividende est alors similaire à évaluer une option sur indice boursier.

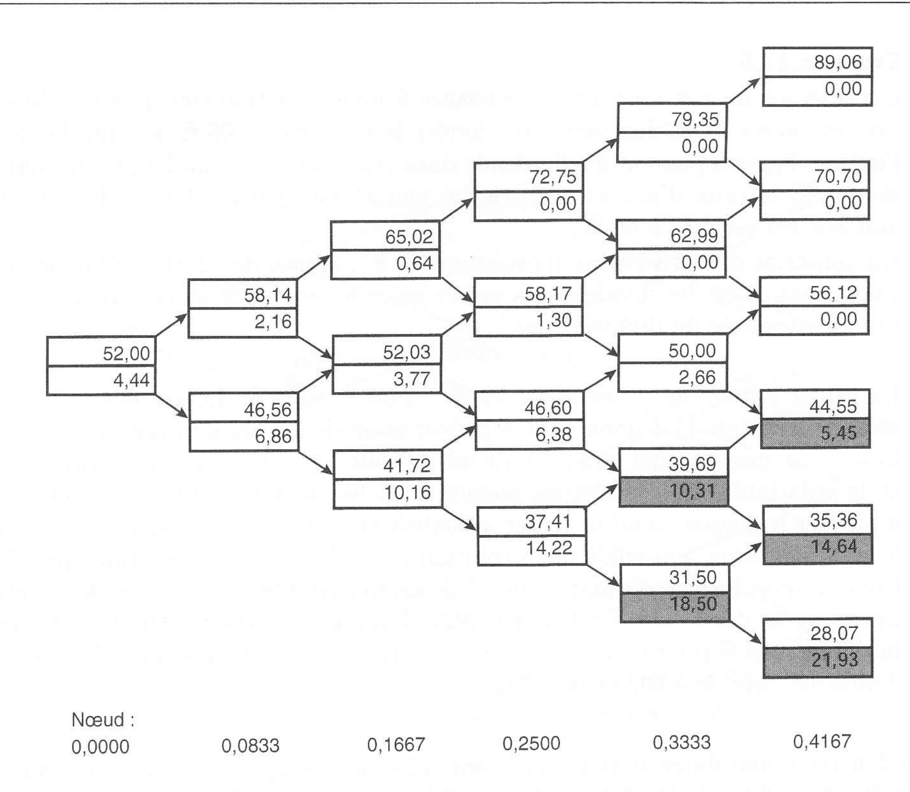
La technique du contrôle de la différence

La technique dite « du contrôle de la différence » peut être utilisée pour l'évaluation des contrats d'options de type américain[8]. Cette technique consiste à se servir du même arbre pour calculer la valeur de l'option américaine, f_A, et la valeur de l'option européenne, f_E. Notons aussi f_{BS} le prix de Black-Scholes de l'option européenne. L'erreur d'évaluation due à l'utilisation de la procédure binomiale est censée être la même pour le contrat européen et pour le contrat américain. Dès lors, une estimation du prix de l'option américaine est donnée par :

$$f_A + f_{\text{BS}} - f_E$$

7. Un autre problème est que, pour les options longues, le prix S^* est nettement inférieur à S_0 et que les estimations de volatilité peuvent être très élevées.

8. Voir J. Hull et A. White, « The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23 (septembre 1988), 237-251.



Graphique 17.9 : Arbre binomial construit par DerivaGem pour l'exemple 17.5.

En guise d'illustration, le graphique 17.10 montre l'arbre d'évaluation de l'option du graphique 17.3 en supposant que ce contrat est de type européen. Le prix obtenu est 4,32 €. La vraie valeur du contrat européen, donnée par la formule de Black-Scholes, est 4,08 €, et l'estimation de la valeur du contrat américain donnée dans le graphique 17.3 est de 4,49 €. L'estimation du prix de l'option américaine est alors :

$$4{,}49 + 4{,}08 - 4{,}32 = 4{,}25$$

Le prix du contrat américain, obtenu avec la procédure binomiale sur 100 périodes, est de 4,278. L'approche du contrôle de la différence améliore ainsi considérablement l'estimation binomiale quand le nombre de périodes choisi est faible. (Nous avions une estimation de 4,49 pour cinq périodes d'un mois.)

En fait, la technique du contrôle de la différence consiste à se servir de l'arbre binomial pour calculer la différence entre les prix des contrats américains et européens plutôt que directement le prix du contrat américain. Nous évoquerons une autre application de cette technique un peu plus loin dans ce chapitre, lors de la présentation des simulations de Monte Carlo.

17.4 Les procédures alternatives de construction d'arbres

La procédure originale de construction d'arbres binomiaux développée par Cox, Ross et Rubinstein n'est pas la seule à pouvoir être utilisée. Plutôt que d'imposer $u = 1/d$ dans les équations (17.2) et (17.3), on peut, par exemple, fixer $p = 0{,}5$. Quand les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt sont ignorés, la résolution des équations conduit à :

$$u = e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

On peut alors construire des arbres avec $p = 0{,}5$ pour évaluer des options sur indices, sur devises et sur contrats futures.

Cette procédure alternative de construction de l'arbre a l'avantage, par rapport à celle de Cox, Ross et Rubinstein, de retenir des probabilités[9] systématiquement égales à 0,5, indépendamment de la valeur de σ ou du nombre de périodes. Par contre, un inconvénient majeur de cette procédure réside dans la difficulté à calculer le delta, le gamma et le rhô à partir de l'arbre. Au nœud central de la date $2\Delta t$, la valeur de l'actif sous-jacent n'est plus, avec cette procédure de construction, égale à la valeur initiale.

■ **Exemple 17.6**

Un call américain sur le dollar canadien (CAD) a une durée de vie de 9 mois et un prix d'exercice de 0,7950 \$. Le taux de change courant est 0,7900, le taux d'intérêt sans risque en USD s'élève à 6 %, alors que le taux sans risque en CAD est égal à 10 %. La volatilité du taux de change USD/CAD est de 4 % par an. On a $S_0 = 0{,}79$, $K = 0{,}795$, $r = 0{,}06$, $r_f = 0{,}10$, $\sigma = 0{,}04$ et $T = 0{,}75$. Si la durée des périodes est de trois mois, $\Delta t = 0{,}25$. En retenant des probabilités égales à 0,5 pour toutes les branches, l'amplitude des mouvements up et down est définie par :

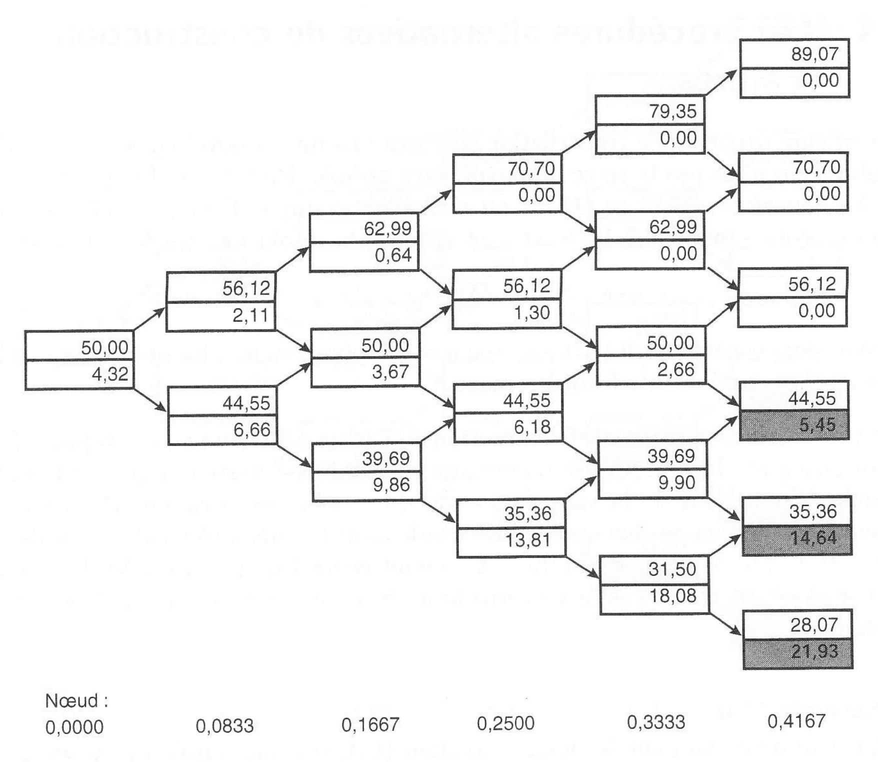
$$u = e^{(0{,}06-0{,}10-0{,}0016/2)0{,}25+0{,}04\sqrt{0{,}25}} = 1{,}0098$$
$$d = e^{(0{,}06-0{,}10-0{,}0016/2)0{,}25-0{,}04\sqrt{0{,}25}} = 0{,}9703$$

L'arbre du taux de change est représenté dans le graphique 17.11 et le prix initial de l'option est 0,0026 \$.

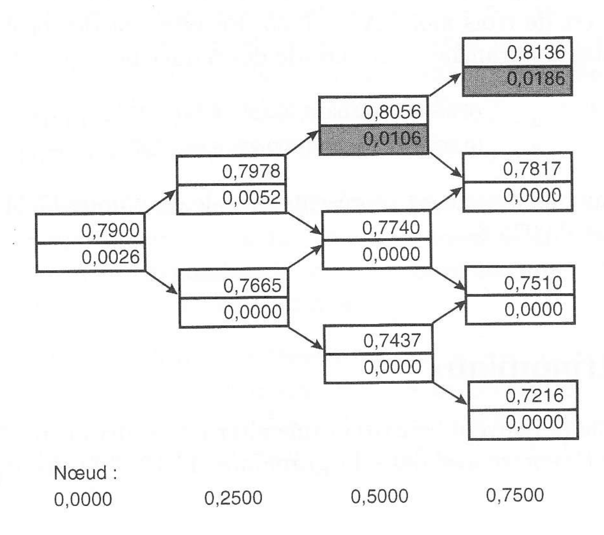
Les arbres trinomiaux

Les arbres trinomiaux peuvent constituer une alternative aux arbres binomiaux. Leur forme générale est représentée dans le graphique 17.12. Notons p_u, p_m et p_d les

9. Au contraire de la procédure présentée ici, un problème posé par la procédure de Cox, Ross et Rubinstein est que les probabilités deviennent négatives quand la durée des périodes est suffisamment longue pour que $\sigma < \left|(r-q)\sqrt{\Delta t}\right|$.



Graphique 17.10 : Arbre binomial de la version européenne du put américain du graphique 17.3, construit par DerivaGem. À chaque nœud, la cellule supérieure contient le prix de l'action et la cellule inférieure le prix de l'option.



Graphique 17.11 : Arbre binomial du call américain sur dollar canadien. La cellule supérieure de chaque nœud représente le taux de change et la cellule inférieure la valeur de l'option. Toutes les probabilités sont égales à 0,5.

probabilités respectives des mouvements up, mid et down à chaque nœud, et Δt la durée entre deux nœuds successifs. Quand les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt sont ignorés, les valeurs des paramètres qui permettent de retrouver la moyenne et l'écart-type des variations de prix d'une action sont :

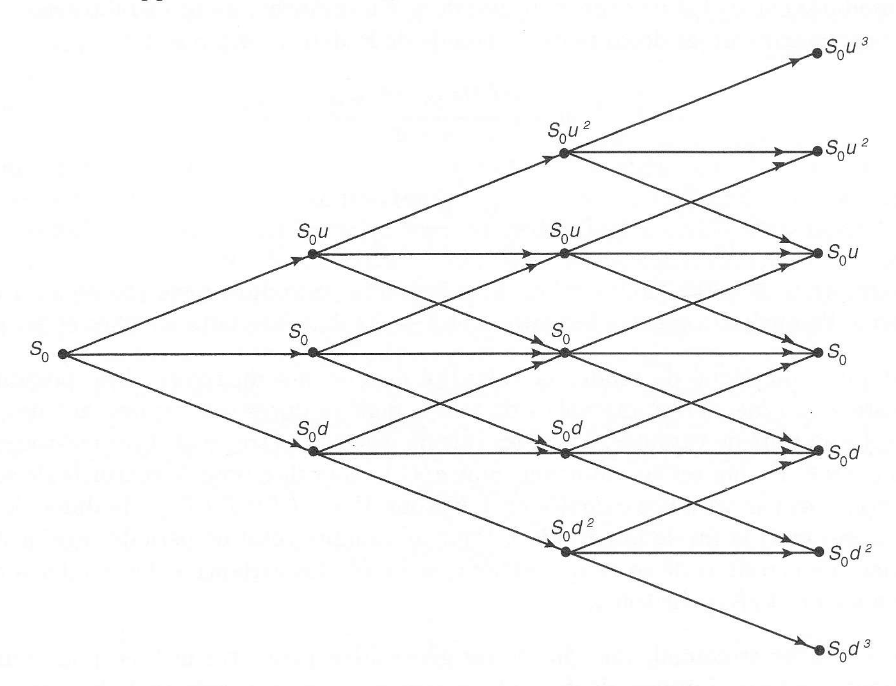
$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}$$

$$p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - q - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{6}, \quad p_m = \frac{2}{3}, \quad p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6}$$

Les calculs à effectuer dans un arbre trinomial sont analogues à ceux à faire dans les arbres binomiaux. À chaque nœud on compare la valeur de l'exercice immédiat à celle de la continuation. Cette dernière s'écrit :

$$e^{-r\Delta t}\left(p_u f_u + p_m f_m + p_d f_d\right)$$

où (f_u, f_m, f_d) sont les valeurs de l'option dans les trois états up, mid et down. L'approche trinomiale se révèle en outre équivalente à la méthode des différences finies que nous développerons à la section 17.8.



Graphique 17.12 : Arbre trinomial décrivant l'évolution du prix d'une action.

Figlewski et Gao[10] ont développé une méthode alternative, dite du maillage adaptatif (*adaptive mesh model*), qui consiste à introduire un maillage fin, c'est-à-dire

10. Voir S. Figlewski et B. Gao, « The Adaptive Mesh Model : A New Approach to Efficient Option Pricing », *Journal of Financial Economics*, 53 (1999), 313-351.

des périodes Δt très courtes, dans un arbre plus grossier (avec des périodes Δt plus longues). En fait, pour évaluer efficacement les options américaines, le maillage doit être fin à proximité du prix d'exercice à l'approche de l'échéance.

17.5 Les paramètres dépendant du temps

Jusqu'à présent, nous avons supposé r, q, r_f et σ constants alors qu'en pratique ils sont généralement supposés dépendre du temps. La valeur de ces variables entre les dates t et $t + \Delta t$ est supposée égale à leur valeur forward[11].

Dans un modèle binomial à la Cox-Ross-Rubinstein, il est possible de faire de r et q (ou r_f) des fonctions du temps. Fixons :

$$a = e^{(f(t)-g(t))\Delta t} \tag{17.11}$$

aux nœuds de la date t, où $f(t)$ est le taux d'intérêt forward pour la période t, $t + \Delta t$ et $g(t)$ est la valeur forward correspondante de q. La géométrie de l'arbre ne se trouve pas modifiée car u et d ne dépendent pas de a. En revanche, les probabilités associées aux mouvements up et down pour les nœuds de la date t deviennent[12] :

$$p = \frac{e^{(f(t)-g(t))\Delta t} - d}{u - d} \tag{17.12}$$

et

$$1 - p = \frac{u - e^{(f(t)-g(t))\Delta t}}{u - d}$$

À l'exception de cette modification, la suite de la procédure reste classique, à ceci près que l'actualisation entre les dates t et $t + \Delta t$ doit être faite au taux $f(t)$.

Il est plus compliqué de rendre la volatilité dépendante du temps. Une possibilité consiste à considérer des intervalles de temps dont la durée est inversement proportionnelle au taux de variance. Ainsi, les valeurs des paramètres u et d restent toujours les mêmes et l'arbre est recombinant. Soit $\sigma(t)$ la volatilité pour la maturité de sorte que $\sigma(t)^2 t$ soit la variance cumulée en t. Notons $V = \sigma(T)^2 T$ (T est la durée de vie de l'arbre) et t_i la fin de la période i. Pour un nombre total de périodes égal à N, il convient de choisir t_i de sorte que $\sigma(t_i)^2 t_i = iV/N$. La variance entre les dates t_{i-1} et t_i est alors V/N pour tout i.

Avec un arbre trinomial, une procédure généralisée peut être utilisée pour rendre cohérents les taux d'intérêt dépendant du temps et les volatilités (voir la note technique n° 9 sur le site de l'éditeur, www.pearsoneducation.fr).

11. Le taux de dividende forward et le taux de variance forward sont calculés de la même façon qu'un taux d'intérêt forward. (Le taux de variance est le carré de la volatilité.)

12. Pour un nombre de pas de temps suffisamment grand, ces probabilités sont toujours positives.

17.6 La simulation de Monte Carlo

Nous abordons maintenant la méthode de simulation de Monte Carlo pour l'évaluation des actifs dérivés ; elle est très différente de celle fondée sur les arbres binomiaux. L'encadré 17.1 illustre l'idée qui sous-tend cette méthode en montrant comment on peut estimer π avec un simple programme Excel.

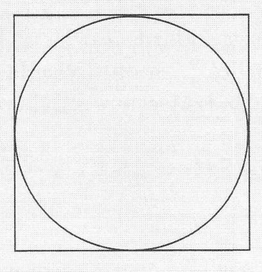
Encadré 17.1 Calcul de Pi par une simulation de Monte Carlo

Supposons que les côtés du carré représenté dans le graphique ci-dessous soient de longueur unité. Vous lancez des fléchettes au hasard sur ce carré et vous évaluez le pourcentage de celles qui tombent dans le cercle inscrit. Combien devriez-vous trouver ? Le cercle inscrit a un rayon égal à 0,5, son aire est donc égale à $\pi/4$. Par conséquent, la proportion de fléchettes qui se plantent dans le cercle devrait être de $\pi/4$. On peut donc estimer π en multipliant par 4 la proportion observée.

Utilisons une feuille Excel pour simuler l'expérience, comme illustré dans le tableau 17.1. On entre la fonction =ALEA(), qui renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, dans les cellules A1 et B1. Dans la cellule C1, on saisit la formule :

=SI((A1–0,5)^2+(B1–0,5)^2<0,25 ; 4 ; 0)

On recopie ensuite cette ligne vers le bas jusqu'à la ligne 100. La formule ci-dessus a pour effet d'écrire le nombre 4 dans la colonne C quand le point dont les coordonnées sont dans les colonnes A et B est dans le cercle, et le nombre 0 sinon. On saisit ensuite dans la cellule C102 l'instruction =MOYENNE(C1:C100) et en C103 l'instruction =ECARTYPEP(C1:C100). En C102 (égal à 3,04 dans le tableau 17.1) on a une estimation de π calculée avec 100 « jets de fléchettes automatisés » et en C103 on trouve l'écart-type de cette estimation. Comme nous le verrons dans l'exemple 17.7, cette mesure peut être utilisée pour juger de la qualité de l'estimation obtenue. Quand on accroît le nombre de tirages au hasard (ce qui joue le rôle des jets de fléchettes), la pertinence de l'estimation augmente mais la convergence vers la valeur exacte est lente.



Calcul de π par jets de fléchettes

Tableau 17.1 Exemple de feuille de calcul pour l'encadré 17.1

	A	B	C
1	0,207	0,690	4
2	0,271	0,520	4
3	0,007	0,221	0
...	...	...	...
...	...	...	...
100	0,198	0,403	4
101			
102		Moyenne :	3,04
103		EC :	1,69

L'évaluation des options par simulations de Monte Carlo repose en grande partie sur l'évaluation risque-neutre. Les paiements futurs espérés sont en effet calculés dans l'univers risque-neutre en suivant une procédure d'échantillonnage, avant d'être actualisés au taux d'intérêt sans risque. Considérons un actif dérivé ayant pour support une variable de marché S et délivrant un payoff à la date T. Avec des taux d'intérêt supposés constants[13], il est possible d'évaluer cet actif dérivé de la manière suivante :

1. Tirer au hasard une trajectoire de S dans l'univers risque-neutre.
2. Calculer le flux payé à l'échéance par l'actif dérivé pour cette trajectoire.
3. Répéter les étapes 1 et 2 de façon à disposer d'un grand nombre de flux terminaux de l'actif dérivé dans l'univers risque-neutre.
4. Calculer la moyenne des flux terminaux pour obtenir une estimation de l'espérance du flux terminal dans l'univers risque-neutre.
5. Actualiser le flux terminal espéré au taux d'intérêt sans risque pour obtenir une estimation de la valeur de l'actif dérivé.

Supposons que, dans l'univers risque-neutre, la variable de marché sous-jacente suive le processus :

$$dS = \hat{\mu} S dt + \sigma S dz \qquad (17.13)$$

où z est un processus de Wiener standard, $\hat{\mu}$ désigne la rentabilité espérée dans l'univers risque-neutre, et σ la volatilité[14]. Si on divise la vie de l'option en N intervalles de longueur Δt, on peut simuler la trajectoire suivie par S en approximant l'équation (17.13) par :

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \hat{\mu} S(t) \Delta t + \sigma S(t) \varepsilon \sqrt{\Delta t} \qquad (17.14)$$

13. Des taux d'intérêt stochastiques sont introduits à partir de la section 25.4.

14. Si S est le prix d'une action ne versant pas de dividendes, $\hat{\mu} = r$; s'il s'agit d'un taux de change, $\hat{\mu} = r - r_f$, et ainsi de suite pour les différents types d'actifs sous-jacents. Il est important de noter que, comme nous l'avons montré à la section 11.7, la volatilité est la même dans l'univers « réel » et dans l'univers risque-neutre.

où $S(t)$ est la valeur de S à la date t, et ε est une variable normale centrée-réduite. La valeur de S à la date Δt est calculée à partir de la valeur initiale de S, la valeur de S à la date $2\Delta t$ est obtenue à partir de $S(\Delta t)$, et ainsi de suite. Cette procédure a déjà été illustrée à la section 12.3. La simulation implique la construction d'une trajectoire complète pour le prix de l'actif sous-jacent et nécessite ainsi N tirages aléatoires selon la loi normale.

En pratique, on obtient des résultats plus précis en simulant $\ln(S)$ plutôt que S. D'après le lemme d'Itô, le processus suivi par $\ln(S)$ s'écrit :

$$d\ln(S) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz \tag{17.15}$$

de telle façon que :

$$\ln(S(t + \Delta t)) - \ln(S(t)) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

ou encore :

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp\left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}\right] \tag{17.16}$$

Travailler avec $\ln(S(t))$ (plutôt qu'avec $S(t)$) est plus aisé car il s'agit d'un processus de Wiener général. Cela signifie que l'équation suivante est vérifiée pour toute date[15] T :

$$S(T) = S(0) \exp\left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma z_T\right] \tag{17.17}$$

Cette relation permet, comme l'équation (17.14), de construire une trajectoire de S et d'évaluer des options dont le payoff n'est pas standard à la date T. L'encadré 17.2 montre que cette démarche peut aussi être utile pour tester les formules de Black et Scholes.

Encadré 17.2 Tester le modèle de Black et Scholes

La formule d'évaluation d'une option européenne de Black-Scholes peut être testée en construisant un arbre binomial comptant un grand nombre de périodes. Une alternative consiste à utiliser une simulation de Monte Carlo. Le tableau 17.2 montre comment cela peut être réalisé dans une feuille Excel. Les cellules C2, D2, E2, F2 et G2 contiennent S_0, K, r, σ et T. Les cellules D4 et E4 contiennent les valeurs calculées de d_1 et d_2 alors que F4 donne la valeur de l'option calculée par la formule de Black-Scholes (4,817 dans cet exemple).

15. *A contrario*, l'égalité (17.14) n'est valide que pour Δt proche de zéro.

Dans Excel, la fonction LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE() est la fonction réciproque de la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite. Par conséquent, la formule :

=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())

simule un tirage aléatoire selon cette loi. On saisit alors dans la cellule A1 :

=$C$2*EXP(($E$2–$F$2*$F$2)*$G$2+$F$2
*LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())*RACINE($G$2))

Cette formule simule un prix terminal de l'action. Dans la cellule B1, on écrit :

=EXP(–$E$2*$G$2)*MAX(A1–$D$2 ; 0)

Il s'agit de la valeur actuelle du paiement terminal engendré par un call. On recopie vers le bas ces formules jusqu'à la ligne 1000. Dans la cellule B1002, on calcule la moyenne des résultats obtenus par la formule =MOYENNE(B1:B1000), qui vaut 4,98 dans cet exemple, et en B1003, on fait apparaître une estimation de l'écart-type de cette série à l'aide de la formule =ECARTYPEP(B1:B1000). Le résultat obtenu par cette méthode ne doit pas être très éloigné de celui donné par la formule de Black-Scholes. Comme nous le verrons dans l'exemple 17.8, le contenu de la cellule B1003 peut être utilisé pour évaluer la qualité de l'estimation.

Tableau 17.2 Simulation de Monte Carlo pour tester la formule de Black-Scholes

	A	B	C	D	E	F	G
1	45,95	0	S_0	K	r	σ	T
2	54,49	4,38	50	50	0,05	0,3	0,5
3	50,09	0,09		d_1	d_2	Prix BS	
4	47,46	0		0,2239	0,0118	4,817	
5	44,93	0					
...	...	...					
...	...	...					
1000	68,27	17,82					
1001							
1002	Moyenne :	4,98					
1003	EC :	7,68					

L'avantage de la simulation de Monte Carlo est de pouvoir être utilisée aussi bien quand les flux terminaux de l'actif dérivé dépendent du chemin suivi par S, que quand ils dépendent seulement de la valeur terminale de S. En outre, des flux intermédiaires peuvent aussi être pris en compte ; de même, n'importe quel processus d'évolution peut être envisagé pour S. Enfin, comme nous allons maintenant le montrer, la procédure

peut être étendue au cas où les flux de l'actif dérivé dépendent de plusieurs variables de marché sous-jacentes. Les principaux inconvénients de la simulation de Monte Carlo sont le temps de calcul élevé et la difficulté à gérer les situations dans lesquelles l'actif dérivé peut être exercé prématurément[16].

Les actifs dérivés dépendant de plus d'une variable de marché

Considérons un actif dérivé dont le payoff dépend de n variables θ_i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Notons s_i la volatilité de θ_i, $\hat{m}_i$ le taux de croissance espéré de θ_i dans l'univers risque-neutre, et ρ_{ik} la corrélation instantanée en θ_i et θ_k[17]. Comme dans le contexte à une seule variable, il faut diviser la vie de l'option en N périodes de durée Δt. La version discrète du processus suivi par θ_i est alors :

$$\theta_i (t + \Delta t) - \theta_i (t) = \hat{m}_i \theta_i (t) \Delta t + s_i \theta_i (t) \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \tag{17.18}$$

où ε_i suit une loi normale centrée-réduite. Le coefficient de corrélation entre ε_i et ε_k est ρ_{ik} pour $1 \leqslant i,\ k \leqslant n$. La simulation d'une trajectoire implique le tirage de N valeurs du vecteur aléatoire $(\varepsilon_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$ dont la loi jointe est normale centrée-réduite. Ces valeurs sont intégrées dans l'équation (17.18) pour simuler autant de trajectoires qu'il existe de variables θ_i, et permettre ainsi le calcul du paiement de l'actif dérivé sur cette trajectoire.

Le tirage d'échantillons aléatoires de distributions normales

La formule ci-dessous permet de tirer un échantillon satisfaisant de loi normale centrée-réduite.

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{12} R_i - 6 \tag{17.19}$$

où les R_i $(1 \leqslant i \leqslant 12)$ sont des tirages indépendants selon une loi uniforme sur l'intervalle [0 ;1]. On peut aussi utiliser la fonction d'Excel, déjà présentée dans l'encadré 17.2 :

=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())

Quand le tirage de deux valeurs ε_1 et ε_2 de lois normales centrées-réduites est nécessaire, on peut suivre la procédure consistant à tirer au hasard deux valeurs indépendantes

16. Toutefois, nous verrons au chapitre 24 que de nombreux travaux ont proposé des moyens de prendre en compte le caractère américain des options dans le cadre de simulations de type Monte Carlo.

17. s_i, $\hat{m}_i$ et ρ_{ik} peuvent éventuellement dépendre de θ_i.

de lois normales univariées, x_1 et x_2, et à calculer ensuite ε_1 et ε_2 ainsi :

$$\varepsilon_1 = x_1$$
$$\varepsilon_2 = \rho x_1 + x_2\sqrt{1-\rho^2}$$

où ρ est le coefficient de corrélation.

Si maintenant, n tirages corrélés de distributions normales sont nécessaires, et si le coefficient de corrélation entre i et j est ρ_{ij}, il faut d'abord tirer au hasard n valeurs indépendantes x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ à partir de distributions normales univariées. Les ε_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ désirés sont alors égaux à :

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik} x_k$$

Pour que la variance des ε_i et leur covariance avec les ε_j $(1 \leqslant j < i)$ soient correctes, il faut que :

$$\varepsilon_1 = \alpha_{11}x_1$$
$$\varepsilon_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2$$
$$\varepsilon_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3$$

et ainsi de suite.

Il faut choisir les coefficients de ces combinaisons de façon à retrouver les corrélations. Cela se fait pas à pas : on pose $\alpha_{11} = 1$, on choisit α_{21} tel que $\alpha_{21}\alpha_{11} = \rho_{21}$ et α_{22} tel que $\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = 1$, et ainsi de suite[18]. Cette procédure est connue sous le nom de décomposition de Cholesky.

Le nombre de trajectoires à simuler

La précision du résultat obtenu par simulation de Monte Carlo dépend du nombre de trajectoires tirées. Il convient généralement de calculer non seulement la moyenne des payoffs actualisés simulés (qui donne l'estimation de la valeur de l'actif dérivé), mais aussi leur écart-type. Si M trajectoires indépendantes ont été simulées avec la procédure décrite précédemment, si μ désigne la moyenne des payoffs actualisés et ω son écart-type, l'écart-type de l'estimateur est égal à :

$$\frac{\omega}{\sqrt{M}}$$

Un intervalle de confiance à 95 % pour le prix de l'actif dérivé est alors donné par :

$$\mu - \frac{1{,}96\omega}{\sqrt{M}} < f < \mu + \frac{1{,}96\omega}{\sqrt{M}}$$

18. Dans le cas où les équations n'admettent pas de solution réelle pour les α, la structure interne de corrélation supposée n'est pas cohérente. Ce point sera discuté au chapitre 19.

Il apparaît clairement dans cette relation que l'incertitude sur la valeur de l'actif dérivé est inversement liée à la racine carrée du nombre de trajectoires simulées. Pour doubler la précision de la simulation, il faut donc quadrupler le nombre de trajectoires simulées ; pour la multiplier par dix, il faut multiplier par cent le nombre de trajectoires, et ainsi de suite.

■ **Exemple 17.7**

Dans le tableau 17.1, π est calculé comme une moyenne de 100 nombres. L'écart-type de cette série de nombres est 1,69. Dans ce cas, $M = 100$ et $\omega = 1{,}69$, de sorte que l'écart-type de l'estimateur est $1{,}69/10 = 0{,}169$. La feuille de calcul donne un intervalle de confiance à 95 % pour π allant de $3{,}04 - 1{,}96 \times 0{,}169$ à $3{,}04 + 1{,}96 \times 0{,}169$, c'est-à-dire de 2,71 à 3,37.

■ **Exemple 17.8**

Dans le tableau 17.2, la valeur de l'option est calculée avec un échantillon de taille 1 000. L'écart-type de cette série est 7,68, ce qui donne un écart-type de l'estimateur de $7{,}68/\sqrt{1000} = 0{,}24$. L'intervalle de confiance à 95 % donné par la feuille de calcul pour la valeur de l'option est alors :

$$[4{,}98 - 1{,}96 \times 0{,}24; 4{,}98 + 1{,}96 \times 0{,}24] = [4{,}51; 5{,}45]$$

Les utilisations

La simulation de Monte Carlo tend à être numériquement plus performante que les autres procédures quand trois variables stochastiques ou plus sont considérées. Cela tient au fait que le temps nécessaire à la simulation augmente à peu près linéairement avec le nombre de variables, alors que le temps nécessaire à la plupart des autres procédures augmente exponentiellement avec le nombre de variables. La simulation de Monte Carlo a l'avantage de fournir les écarts-types des estimations produites. Cette approche peut aussi être adaptée à des structures de payoffs et à des processus stochastiques complexes, ce qui constitue un autre atout. Ainsi, elle peut être utilisée même quand les revenus terminaux de l'actif dérivé à évaluer dépendent du sentier suivi par les variables sous-jacentes plutôt que de leur seule valeur finale.

Le calcul des lettres grecques

Les lettres grecques présentées au chapitre 15 peuvent être calculées dans le cadre de simulations de Monte Carlo. Soit f la valeur d'un actif dérivé et x celle de son sous-jacent ou d'un paramètre. Dans un premier temps, la simulation est menée comme précédemment pour déterminer une estimation de la valeur de l'actif dérivé, $\hat{f}$. Dans un second temps, une légère variation Δx est appliquée à la valeur de x et une nouvelle simulation est entreprise, conduisant à une seconde estimation $\hat{f}^*$. Le delta de f par rapport à x est alors estimé par :

$$\frac{\hat{f}^* - \hat{f}}{\Delta x}$$

Pour minimiser l'écart-type d'estimation, il faut que le nombre de périodes, N, les suites de nombres aléatoires, et le nombre de trajectoires simulées, M, soient les mêmes pour le calcul de $\hat{f}$ et de $\hat{f}^*$.

La sélection de trajectoires dans un arbre

Plutôt que de construire des trajectoires à partir du processus stochastique de la variable sous-jacente, il est possible de les tirer au hasard parmi les 2^N trajectoires possibles d'un arbre binomial à N périodes. Par exemple, si un arbre binomial décrit l'évolution d'un sous-jacent avec une probabilité de mouvement up égale à 0,6, la procédure de sélection aléatoire d'une trajectoire est la suivante. À chaque nœud, un nombre est tiré selon une loi uniforme sur [0 ;1] ; s'il est inférieur à 0,4, un mouvement down est retenu ; si, au contraire, il est supérieur à 0,4, c'est un mouvement up qui sera considéré. Une fois le nœud terminal atteint, le flux terminal de l'actif dérivé est calculé, ce qui achève la première étape. Il s'agit ensuite de reproduire cette procédure jusqu'à l'obtention d'un nombre suffisant de trajectoires. L'estimation de la valeur de l'actif dérivé est donnée par la moyenne des payoffs terminaux actualisée au taux d'intérêt sans risque[19].

■ **Exemple 17.9**

Supposons que l'arbre du graphique 17.3 soit utilisé pour évaluer une option qui délivre un payoff égal à $\max(S_{\text{moy}} - 50\,;\,0)$ où S_{moy} est le prix moyen d'une action mesuré sur une période de 5 mois (le premier et le dernier prix comptant dans le calcul de la moyenne). Il s'agit d'une « option asiatique ». Le tableau 17.3 montre un résultat possible pour 10 tirages.

La valeur de l'option est égale au paiement moyen actualisé au taux sans risque. Dans notre exemple, le paiement moyen est de 7,08 et le taux sans risque de 10 %. L'estimation du prix de l'option est donc $7{,}08e^{-0{,}1\times 5/12} = 6{,}79$. Il s'agit d'une simple illustration ; pour traiter les cas concrets, on utilise des sous-périodes plus courtes et un nombre de tirages bien plus important.

17.7 Les procédés de réduction de la variance

Un très grand nombre de trajectoires doit généralement être simulé pour estimer f avec une précision raisonnable, si l'on conduit les simulations comme nous les avons présentées jusqu'ici. C'est particulièrement coûteux en temps de calcul. Dans cette section, nous présentons des procédés de réduction de la variance qui peuvent conduire à de notables économies de temps de calcul.

19. Pour une discussion sur la façon de rendre efficace l'échantillonnage sur un arbre, on pourra se référer à D. Mintz, « Less is More », *RISK*, juillet 1997, 42-45.

Tableau 17.3 Simulation de Monte Carlo pour évaluer une option asiatique avec l'arbre de la figure 17.3. Le payoff est le montant par lequel le prix moyen dépasse le prix d'exercice de 50. U = up ; D = down

Tirage	Trajectoire	Prix moyen de l'action	Paiement de l'option
1	UUUUD	64,98	14,98
2	UUUDD	59,82	9,82
3	DDDUU	42,31	0,00
4	UUUUU	68,04	18,04
5	UUDDU	55,22	5,22
6	UDUUD	55,22	5,22
7	DDUDD	42,31	0,00
8	UUDDU	55,22	5,22
9	UUUDU	62,25	12,25
10	DDUUD	45,56	0,00
Moyenne			7,08

La technique de la variable antithétique

La technique de la variable antithétique repose sur le calcul de deux valeurs de l'actif dérivé par simulation. La première valeur, f_1, est calculée selon la procédure maintenant usuelle. La seconde valeur, f_2, est déterminée en changeant le signe de tous les tirages aléatoires de la loi normale centrée-réduite (si ε est tiré pour f_1, on utilise $-\varepsilon$ pour f_2). On retient alors la moyenne de f_1 et f_2 pour calculer la valeur de l'actif dérivé. Ce procédé fonctionne bien puisque quand l'une des valeurs est supérieure à la vraie valeur, l'autre tend à être inférieure et *vice versa*.

La moyenne de f_1 et de f_2 est notée $\bar{f}$:

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

L'estimation finale de la valeur de l'actif dérivé est donnée par la moyenne des $\bar{f}$. Si on note $\bar{\omega}$ l'écart-type des $\bar{f}$ et M le nombre de trajectoires simulées (c'est-à-dire le nombre de couples de valeurs), l'écart-type de l'estimation est $\bar{\omega}\big/\sqrt{M}$, ce qui est généralement très inférieur à l'écart-type obtenu par simulation de $2M$ trajectoires.

La technique du contrôle de la différence

Nous avons déjà donné à la section 17.3 un exemple de cette technique pour l'évaluation des options américaines avec des arbres. Elle est applicable quand il existe deux actifs dérivés, A et B, semblables. L'actif dérivé A est l'actif à évaluer et l'actif dérivé B est

semblable au précédent, mais une solution analytique permet son évaluation. Deux simulations reposant sur les mêmes suites de nombres aléatoires et la même périodicité Δt sont conduites en parallèle pour le calcul des estimations respectives f_A^* et f_B^* des valeurs de A et de B. Une meilleure estimation de la valeur de A, f_A, est alors donnée par la formule :

$$f_A = f_A^* - f_B^* + f_B \tag{17.20}$$

où f_B est la vraie valeur de B, qui est connue. Hull et White[20] donnent un exemple de l'utilisation de cette technique dans leur étude de l'effet de la volatilité stochastique sur le prix d'un call européen ; f_A est l'estimation de la valeur de l'option pour une volatilité supposée stochastique, et f_B sa valeur estimée pour une volatilité supposée constante.

L'échantillonnage par importance

La façon la plus simple d'expliquer l'échantillonnage par importance (*importance sampling*) est d'en donner un exemple. Supposons que nous cherchions à évaluer un call européen très en dehors de prix d'exercice K et d'échéance T. Si nous simulons des valeurs terminales du prix de l'actif sous-jacent avec la méthode usuelle, la plupart des trajectoires vont conduire à un flux terminal nul. Cela constitue une perte de temps de calcul puisque ces trajectoires contribuent très peu à la détermination de la valeur de l'option. Il serait donc plus intéressant de ne choisir que les trajectoires importantes, c'est-à-dire celles qui conduisent à un prix terminal du sous-jacent supérieur au prix d'exercice K.

Notons F la distribution de probabilité non conditionnelle du prix de l'action à la date T et supposons aussi que la probabilité, notée q, que le prix de l'action soit supérieur à K à l'échéance puisse être déterminée analytiquement. Dans ce cas, $G = F/q$ est la distribution de probabilité du prix de l'action, conditionnellement à l'événement $S > K$. Pour la mise en place d'un échantillonnage par importance, la simulation est effectuée à partir de valeurs tirées de G plutôt que de F. L'estimation de la valeur de l'option est alors la moyenne actualisée du payoff terminal multipliée par q.

L'échantillonnage stratifié

L'échantillonnage de valeurs représentatives d'une distribution de probabilité plutôt que de valeurs aléatoires permet généralement d'améliorer la précision de la simulation. Une façon de procéder consiste à effectuer un échantillonnage stratifié. Si l'on désire par exemple 1 000 tirages d'une distribution de probabilité, il convient de diviser la distribution en, par exemple, 10 intervalles équiprobables et de choisir 100 valeurs dans chacun de ceux-ci.

20. Voir J. Hull et A. White, « The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities », *Journal of Finance*, 42 (juin 1987), 281-300.

Si la loi est normale centrée-réduite et qu'on considère n intervalles, la valeur représentative du i-ième intervalle est :

$$N^{-1}\left(\frac{i-0{,}5}{n}\right)$$

où N^{-1} est la fonction réciproque de la fonction de répartition de la loi normale. Ainsi, pour $n = 4$, les valeurs représentatives des quatre intervalles sont $N^{-1}(0{,}125)$, $N^{-1}(0{,}375)$, $N^{-1}(0{,}625)$ et $N^{-1}(0{,}875)$. Elles peuvent être calculées à l'aide de la fonction LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE disponible dans Excel.

La méthode des moments

La méthode des moments consiste à ajuster les échantillons tirés de la distribution normale centrée-réduite de façon à récupérer la valeur exacte du premier, du second moment, et éventuellement des moments d'ordre supérieur. Notons ε_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ l'échantillon, extrait d'une distribution normale centrée-réduite, utilisé pour le calcul des variations d'une variable particulière pour une certaine période. Pour coller aux deux premiers moments de la distribution, nous calculons la moyenne de l'échantillon, m, et son écart-type, s. L'échantillon ajusté ε_i^* $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est donné par :

$$\varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i - m}{s}$$

C'est cet échantillon ajusté, de moyenne effectivement nulle et d'écart-type égal à 1,0, qui est utilisé pour les calculs.

La méthode des moments permet d'économiser du temps de calcul, mais peut entraîner des problèmes de mémoire car chaque valeur tirée au sort doit être conservée jusqu'à la fin de la simulation. Cette méthode des moments est parfois appelée « rééchantillonnage quadratique ». Elle est souvent appliquée conjointement avec la technique de la variable antithétique car cette dernière renvoie automatiquement la bonne valeur des moments impairs, aussi est-il suffisant dans ce cas d'ajuster l'échantillon pour récupérer la valeur exacte du deuxième et éventuellement du quatrième moment.

L'utilisation de séquences quasi-aléatoires

Une séquence quasi-aléatoire[21] (aussi appelée séquence à faible divergence) est une séquence de valeurs représentatives tirées d'une distribution de probabilité. Brotherton-Ratcliffe ainsi que Press *et al.* ont décrit plusieurs utilisations de séquences quasi-aléatoires[22]. Ces séquences peuvent avoir l'intéressante propriété de réduire l'écart-

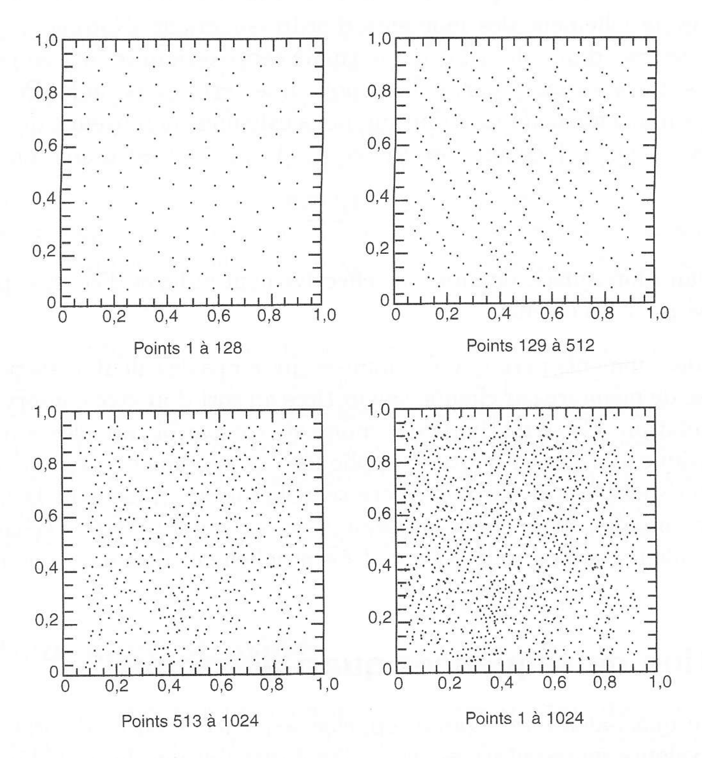
21. Il faut être attentif au fait que le terme quasi-aléatoire est en fait inapproprié puisqu'une séquence quasi-aléatoire est totalement déterministe.

22. Voir à ce sujet R. Brotherton-Ratcliffe, « Monte Carlo Monitoring », *RISK*, décembre 1994, 53-58, et W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling et B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, 2e éd., Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

type d'estimation ; il devient proportionnel à $1/M$ plutôt qu'à $1\big/\sqrt{M}$, où M est la taille de l'échantillon.

L'échantillonnage quasi-aléatoire est semblable à l'échantillonnage stratifié dans la mesure où l'objectif est de tirer au hasard des valeurs représentatives des variables sous-jacentes. Dans le cas de l'échantillonnage stratifié, le nombre de valeurs tirées au sort est supposé initialement connu. Le schéma d'échantillonnage quasi-aléatoire est plus flexible : les valeurs sont tirées au hasard de façon à toujours combler les vides existant dans l'échantillon déjà construit. À chaque étape de la simulation, les valeurs de l'échantillon sont espacées à peu près régulièrement au sein de l'espace d'échantillonnage.

Le graphique 17.13 représente les points générés dans un espace à deux dimensions à l'aide de la procédure suggérée par Sobol'[23]. On observe bien que les nouveaux points tendent à combler les vides laissés par les points précédents.



Graphique 17.13 : Les 1 024 premiers points d'une séquence de Sobol'.

23. Voir I. M. Sobol', *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7, n° 4 (1967), 86-112. Une description de la procédure de Sobol' peut être trouvée dans W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling et B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, 2e éd., Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

17.8 Les méthodes des différences finies

La méthode des différences finies (ou schéma aux différences finies) permet d'évaluer les actifs dérivés à travers la résolution de l'équation aux dérivées partielles (EDP) satisfaite par le prix de tout actif dérivé. Pour cela, l'EDP est convertie en un ensemble d'équations aux différences, et ces équations sont résolues de façon itérative.

Illustrons cette approche pour l'évaluation d'un put américain sur une action versant un taux de dividende q. Cette option doit vérifier l'EDP suivante, déjà introduite à l'équation (14.6) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial f}{\partial S} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \tag{17.21}$$

La durée de vie de l'option, T, est divisée en N intervalles de durée $\Delta t = T/N$. Les $N + 1$ dates pertinentes sont alors :

$$0,\ \Delta t,\ 2\Delta t,\ \ldots,\ T$$

Notons aussi $S_{\max}$ un prix de l'action suffisamment élevé pour qu'une fois celui-ci atteint, le put n'ait virtuellement plus aucune valeur. L'intervalle $[0\,;\,S_{\max}]$ est aussi divisé en M intervalles de longueur $\Delta S = S_{\max}/M$. On considère donc $M + 1$ prix de l'action régulièrement espacés :

$$0,\ \Delta S,\ 2\Delta S, \ldots,\ S_{\max}$$

La valeur de $S_{\max}$ doit être choisie de façon que l'un de ces prix soit le prix actuel de l'action.

Les dates et les prix de l'action définissent une grille de $(M + 1) \times (N + 1)$ points, représentée dans le graphique 17.14. Le point $(i,\ j)$ de la grille correspond à la date $i\Delta t$ et au prix de l'action $j\Delta S$, et $f_{i,j}$ désigne la valeur de l'option en ce point.

La méthode implicite des différences finies

Pour tout point intérieur $(i,\ j)$ de la grille, $\partial f/\partial S$ peut être approximé par :

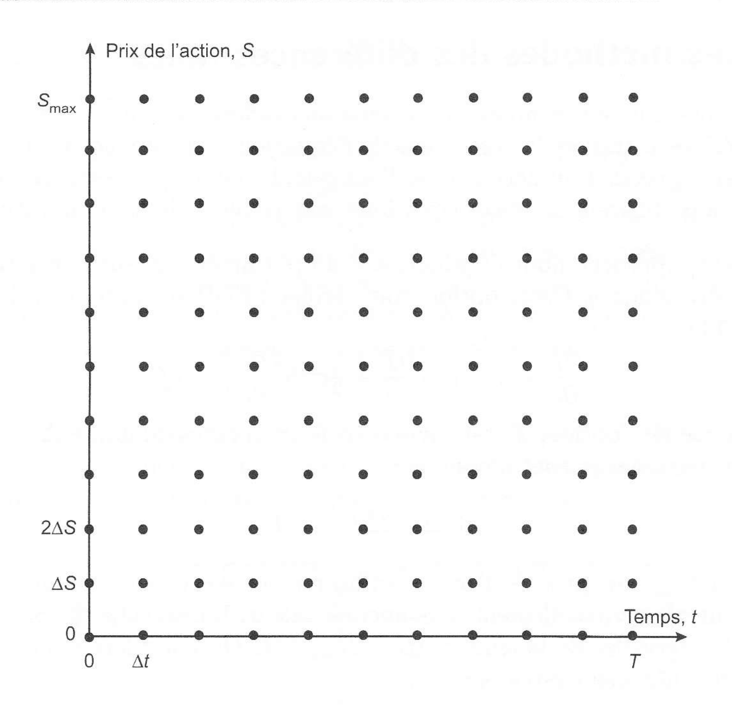
$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} \tag{17.22}$$

ou par :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S} \tag{17.23}$$

L'équation (17.22) est connue sous le nom d'approximation de la différence forward (ou progressive), et l'équation (17.23) sous le nom d'approximation de la différence backward (ou rétrograde). Une approximation centrée sera cependant privilégiée, en faisant la moyenne des deux précédentes :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} \tag{17.24}$$



Graphique 17.14 : Grille utilisée pour la méthode des différences finies.

Pour $\partial f/\partial t$, l'approximation de la différence forward est retenue de façon que la valeur en date $i\Delta t$ soit liée à la valeur en date $(i + 1)\Delta t$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} \tag{17.25}$$

L'approximation de la différence backward de $\partial f/\partial S$ au point (i, j) est donnée par l'équation (17.23). Au point $(i, j + 1)$, la différence backward est donc :

$$\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S}$$

Dès lors, une approximation aux différences finies pour $\partial^2 f/\partial S^2$ au point (i, j) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} - \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S}\right)\Big/\Delta S$$

ou encore :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} \tag{17.26}$$

En substituant les équations (17.24), (17.25) et (17.26) dans l'équation aux dérivées partielles (17.21) et en remarquant que $S = j\Delta S$, on obtient :

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} = rf_{i,j}$$

pour $j = 1, 2, \ldots, M - 1$ et $i = 0, 1, \ldots, N - 1$. Un réarrangement des termes conduit à :

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \qquad (17.27)$$

avec :

$$a_j = \tfrac{1}{2}(r-q)j\Delta t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t, \quad b_j = 1+\sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t, \quad c_j = -\tfrac{1}{2}(r-q)j\Delta t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

À l'échéance, la valeur du put est $\max(K - S_T\,;\,0)$, avec S_T la valeur de l'action à cette même date. Dès lors, on a :

$$f_{N,j} = \max\left[K - j\,\Delta S, 0\right] \qquad j = 0, 1, \ldots, M \qquad (17.28)$$

Quand le prix de l'action est nul, la valeur de l'option est K, aussi a-t-on :

$$f_{i,0} = K \qquad i = 0, 1, \ldots, N \qquad (17.29)$$

Du fait du choix de $S_{\max}$, on suppose que la valeur de l'option est nulle quand $S_{\max}$, de façon que :

$$f_{i,M} = 0 \qquad i = 0, 1, \ldots, N \qquad (17.30)$$

Les équations (17.28), (17.29) et (17.30) donnent la valeur du put sur les trois bordures de la grille du graphique 17.14, pour $S = 0$, $S = S_{\max}$ et $t = T$. Il ne reste plus qu'à appliquer l'équation (17.27) pour obtenir la valeur de f pour tous les autres points. Il convient de commencer avec les points de la date $T - \Delta t$, ce qui revient à appliquer l'équation (17.27) avec $i = N - 1$:

$$a_j f_{N-1,j-1} + b_j f_{N-1,j} + c_j f_{N-1,j+1} = f_{N,j} \qquad (17.31)$$

pour $j = 1, 2, \ldots, M - 1$. Le membre de droite de ces équations est donné par l'équation (17.28). De plus, les équations (17.29) et (17.30) permettent d'écrire :

$$f_{N-1,0} = K \qquad (17.32)$$

$$f_{N-1,M} = 0 \qquad (17.33)$$

L'équation (17.31) définit un système de $M - 1$ équations à $M - 1$ inconnues[24] : $f_{N-1,1}, f_{N-1,2}, \ldots, f_{N-1,M-1}$. Une fois la résolution effectuée, on compare chaque valeur de $f_{N-1,j}$ avec $K - j\Delta S$. Quand $f_{N-1,j} < K - j\Delta S$, l'exercice anticipé à la date $T - \Delta t$ est optimal, aussi la valeur de $f_{N-1,j}$ est-elle fixée à $K - j\Delta S$. La résolution est identique pour les points de la date $T - 2\Delta t$, et ainsi de suite jusqu'à la date initiale. En fin de compte, les valeurs $f_{0,1}, f_{0,2}, \ldots, f_{0,M-1}$ sont obtenues et le prix de l'option est l'une de ces valeurs.

La technique du contrôle de la différence peut être appliquée conjointement avec la méthode des différences finies. Dans ce cas, la même grille doit être utilisée pour évaluer une option semblable à celle dont on cherche à déterminer le prix, mais pour laquelle il existe une solution analytique. Il reste ensuite à appliquer l'équation (17.20) pour trouver un prix encore plus proche de la vraie valeur.

---

24. Ces équations peuvent être résolues sans avoir à inverser de matrice. L'équation (17.31) pour $j = 1$ permet d'exprimer $f_{N-1,2}$ en fonction de $f_{N-1,1}$; la deuxième équation permet d'exprimer $f_{N-1,3}$ en fonction de $f_{N-1,1}$; et ainsi de suite. La dernière équation donne une valeur pour $f_{N-1,1}$ qui peut alors être utilisée pour déterminer la valeur de tous les autres $f_{N-1,j}$.

■ **Exemple 17.10**

Le tableau 17.4 montre les résultats de l'utilisation de la méthode implicite des différences finies selon la procédure que nous venons de décrire pour l'évaluation du put américain de l'exemple 17.1. Nous avons choisi des valeurs de 20, 10 et 5 pour M, N et ΔS. Le prix de l'option est donc évalué pour des intervalles de prix de 5 €, entre 0 € et 100 €, avec des intervalles de temps d'une durée de quinze jours sur toute la durée de vie de l'option. La grille conduit à un prix du put de 4,07 €. La même grille conduit à une valeur de 3,91 € pour le même contrat européen. La formule de Black-Scholes donne 4,08 € comme véritable valeur du put européen, aussi l'estimation du contrôle de la différence pour le prix du put américain est-elle :

$$4{,}07 + 4{,}08 - 3{,}91 = 4{,}24\ €$$

Tableau 17.4 : Grille d'évaluation du put de l'exemple 17.1 pour la méthode implicite des différences finies

Cours de l'action (euros)	Distance à l'échéance (mois)										
	5	4,5	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
95	0,02	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
90	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
85	0,09	0,07	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
80	0,16	0,12	0,09	0,07	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
75	0,27	0,22	0,17	0,13	0,09	0,06	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00
70	0,47	0,39	0,32	0,25	0,18	0,13	0,08	0,04	0,02	0,00	0,00
65	0,82	0,71	0,60	0,49	0,38	0,28	0,19	0,11	0,05	0,02	0,00
60	1,42	1,27	1,11	0,95	0,78	0,62	0,45	0,30	0,16	0,05	0,00
55	2,43	2,24	2,05	1,83	1,61	1,36	1,09	0,81	0,51	0,22	0,00
50	4,07	3,88	3,67	3,45	3,19	2,91	2,57	2,17	1,66	0,99	0,00
45	6,58	6,44	6,29	6,13	5,96	5,77	5,57	5,36	5,17	5,02	5,00
40	10,15	10,10	10,05	10,01	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00
35	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00
30	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00
25	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00
20	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00
15	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00
10	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00
5	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00
0	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00

La méthode explicite des différences finies

La méthode implicite des différences finies présente l'avantage d'être d'une grande robustesse. Elle converge en effet toujours vers la solution de l'équation aux dérivées partielles quand ΔS et Δt tendent vers zéro[25]. L'un des désavantages de cette méthode est qu'il faut résoudre un système de $M - 1$ équations pour déterminer les valeurs des $f_{i,j}$ à partir des $f_{i+1,j}$. La méthode peut toutefois être simplifiée si l'on suppose que les valeurs de $\partial f/\partial S$ et de $\partial^2 f/\partial S^2$ au point (i, j) de la grille sont identiques à celles au point $(i + 1, j)$. Les équations (17.24) et (17.26) deviennent :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2}$$

L'équation aux différences s'écrit alors :

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2} = rf_{i,j}$$

ou encore :

$$f_{i,j} = a_j^* f_{i+1,j-1} + b_j^* f_{i+1,j} + c_j^* f_{i+1,j+1} \tag{17.34}$$

avec :

$$a_j^* = \frac{1}{1 + r\Delta t}\left(-\tfrac{1}{2}(r - q)j\Delta t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right)$$

$$b_j^* = \frac{1}{1 + r\Delta t}\left(1 - \sigma^2 j^2 \Delta t\right)$$

$$c_j^* = \frac{1}{1 + r\Delta t}\left(\tfrac{1}{2}(r - q)j\Delta t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right)$$

Ce choix correspond à la méthode explicite des différences finies[26]. Le graphique 17.15 illustre la différence entre les méthodes implicite et explicite. La méthode implicite conduit à l'équation (17.27) qui donne une relation entre trois valeurs différentes de l'option à la date $i\Delta t$ (à savoir $f_{i,j-1}$, $f_{i,j}$ et $f_{i,j+1}$) et une valeur de l'option à la date $(i+1)\Delta t$ (qui est $f_{i+1,j}$). La méthode explicite conduit à l'équation (17.34) qui donne une relation entre une valeur de l'option à la date $i\Delta t$ ($f_{i,j}$) et trois valeurs différentes de l'option à la date $(i+1)\Delta t$, c'est-à-dire $f_{i+1,j-1}$, $f_{i+1,j}$ et $f_{i+1,j+1}$.

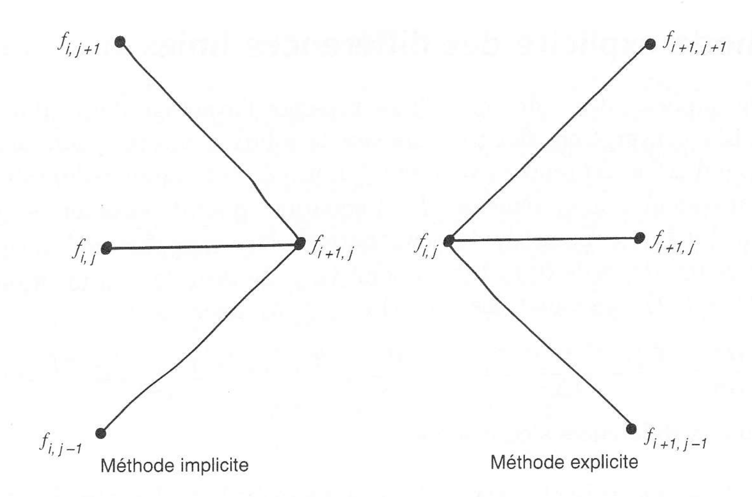
■ **Exemple 17.11**

Le tableau 17.5 donne les résultats de l'évaluation du put américain de l'exemple 17.1 à l'aide de la méthode explicite des différences finies. Comme dans l'exemple 17.10, les valeurs choisies pour M, N et ΔS sont respectivement de 20, 10 et 5. La grille[27] conduit à un prix de l'option de 4,26 €.

25. Dans la mise en œuvre des méthodes des différences finies, ΔS doit rester proportionnel à $\sqrt{\Delta t}$ quand on fait tendre ces deux variables vers zéro.

26. L'utilisation de l'approximation de la différence backward plutôt que de la différence forward pour $\partial f/\partial t$ conduit aussi à la méthode explicite des différences finies.

27. Nous expliquerons plus loin dans ce chapitre les nombres négatifs et autres incohérences apparaissant dans la partie supérieure gauche du tableau.



Graphique 17.15 : Différence entre les méthodes implicite et explicite des différences finies.

Le changement de variable

En termes de temps de calcul, il est plus efficace de mettre en place les méthodes des différences finies avec $\ln(S)$ plutôt que S. En notant $Z = \ln(S)$, l'équation (17.21) devient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q - \sigma^2/2)\frac{\partial f}{\partial Z} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} = rf$$

La grille permet alors d'évaluer l'actif dérivé pour des valeurs régulièrement espacées de Z plutôt que de S, et l'équation aux différences pour la méthode implicite devient :

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q - \sigma^2/2)\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta Z} + \tfrac{1}{2}\sigma^2\frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta Z^2} = rf_{i,j}$$

ou encore :

$$\alpha_j f_{i,j-1} + \beta_j f_{i,j} + \gamma_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \tag{17.35}$$

avec :

$$\alpha_j = \frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r - q - \sigma^2/2) - \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

$$\beta_j = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta Z^2}\sigma^2 + r\Delta t$$

$$\gamma_j = -\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r - q - \sigma^2/2) - \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

Et pour la méthode explicite, l'équation aux différences s'écrit :

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q - \sigma^2/2)\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta Z} + \tfrac{1}{2}\sigma^2\frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta Z^2} = rf_{i,j}$$

ou

$$\alpha_j^* f_{i+1,j-1} + \beta_j^* f_{i+1,j} + \gamma_j^* f_{i+1,j+1} = f_{i,j} \tag{17.36}$$

Tableau 17.5 : Grille d'évaluation du put de l'exemple 17.1 pour la méthode explicite des différences finies

Cours de l'action (euros)	Distance à l'échéance (mois)										
	5	4,5	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
95	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
90	–0,11	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
85	0,28	–0,05	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
80	–0,13	0,20	0,00	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
75	0,46	0,06	0,20	0,04	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
70	0,32	0,46	0,23	0,25	0,10	0,09	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
65	0,91	0,68	0,63	0,44	0,37	0,21	0,14	0,00	0,00	0,00	0,00
60	1,48	1,37	1,17	1,02	0,81	0,65	0,42	0,27	0,00	0,00	0,00
55	2,59	2,39	2,21	1,99	1,77	1,50	1,24	0,90	0,59	0,00	0,00
50	4,26	4,08	3,89	3,68	3,44	3,18	2,87	2,53	2,07	1,56	0,00
45	6,76	6,61	6,47	6,31	6,15	5,96	5,75	5,50	5,24	5,00	5,00
40	10,28	10,20	10,13	10,06	10,01	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00
35	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00
30	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00
25	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00
20	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00
15	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00
10	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00
5	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00
0	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00

avec :

$$\alpha_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(-\frac{\Delta t}{2\Delta Z}\left(r-q-\sigma^2/2\right)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2\right) \quad (17.37)$$

$$\beta_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(1-\frac{\Delta t}{\Delta Z^2}\sigma^2\right) \quad (17.38)$$

$$\gamma_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(\frac{\Delta t}{2\Delta Z}\left(r-q-\sigma^2/2\right)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2\right) \quad (17.39)$$

Il est intéressant de noter que le changement de variable a pour conséquence de rendre α_j, β_j, γ_j, de même que α_j^*, β_j^* et γ_j^*, indépendants de j. On peut en outre montrer que l'efficacité numérique est maximale pour $\Delta Z = \sigma\sqrt{3\Delta t}$.

Le lien avec les arbres trinomiaux

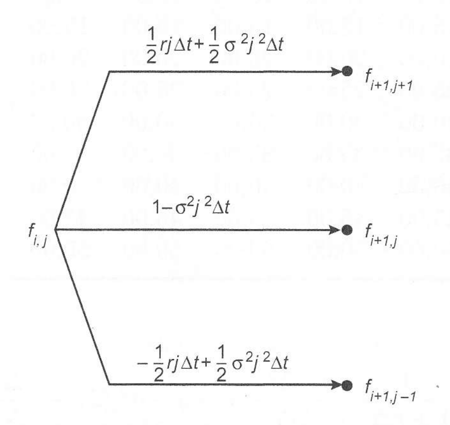
La méthode explicite des différences finies[28] est en fait équivalente à l'approche des arbres trinomiaux. Les expressions de a_j^*, b_j^* et c_j^* de l'équation (17.34) peuvent être interprétées de la sorte :

$-\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$: probabilité que le prix de l'action diminue de $j\Delta S$ à $(j-1)\Delta S$ pendant la période de longueur Δt

$1-\sigma^2 j^2 \Delta t$: probabilité que le prix de l'action reste inchangé pendant la période de longueur Δt

$\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$: probabilité que le prix de l'action augmente de $j\Delta S$ à $(j+1)\Delta S$ pendant la période de longueur Δt

Le graphique 17.16 illustre cette interprétation. La somme des trois probabilités est égale à 1,0. Sous ces probabilités, la variation espérée du prix de l'action pendant la durée Δt est $(r-q)j\Delta S\Delta t = (r-q)S\Delta t$, ce qui correspond à la variation espérée dans un univers risque-neutre. Sous ces mêmes probabilités, pour de petites valeurs de Δt, la variance de la variation du prix de l'action pendant la durée Δt est $\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \Delta t = \sigma^2 S^2 \Delta t$. Ces valeurs correspondent au processus stochastique suivi par S. La valeur de f à la date $i\Delta t$ est calculée comme la valeur espérée de f à la date $(i+1)\Delta t$ dans un univers risque-neutre, actualisée au taux d'intérêt sans risque.



Graphique 17.16 : La méthode explicite des différences finies exprimée sous la forme d'un arbre trinomial.

Pour que la méthode explicite des différences finies fonctionne correctement, les trois « probabilités » :

$$-\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\ , \quad 1-\sigma^2 j^2 \Delta t\ , \quad \frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

doivent toutes être positives. Dans l'exemple 17.11, $1-\sigma^2 j^2 \Delta t$ est négatif pour $j \geqslant 13$ (c'est-à-dire quand $S \geqslant 65$). Cette remarque explique les valeurs d'options négatives

28. On peut aussi montrer que la méthode implicite des différences finies est équivalente à une approche par arbres multinomiaux dans laquelle $M+1$ branches partent de chaque nœud.

et les autres incohérences de la partie supérieure gauche du tableau 17.5. Cet exemple illustre bien le principal problème associé à la mise en œuvre de la méthode explicite des différences finies : les probabilités associées à l'arbre trinomial pouvant être négatives, cette méthode ne converge pas nécessairement vers la solution de l'équation aux dérivées partielles[29].

Si on suit l'approche du changement de variable, correspondant aux équations (17.36) à (17.39), les probabilités que $Z = \ln(S)$ diminue de ΔZ, ne change pas, ou augmente de ΔZ sont respectivement égales à :

$$-\frac{\Delta t}{2\Delta Z}\left(r-q-\sigma^2/2\right)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2 - \frac{\Delta t}{2\Delta Z}\left(r-q-\sigma^2/2\right)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

$$1-\frac{\Delta t}{\Delta Z^2}\sigma^2$$

$$\frac{\Delta t}{2\Delta Z}\left(r-q-\sigma^2/2\right)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

Ces variations de Z correspondent respectivement à des variations de prix de S à $Se^{-\Delta Z}$, à S et à $Se^{\Delta Z}$. On retrouve l'arbre et les probabilités de l'approche trinomiale présentée à la section 17.4 en fixant $\Delta Z = \sigma\sqrt{3\Delta t}$.

D'autres méthodes des différences finies

La plupart des autres méthodes des différences finies proposées dans la littérature présentent des caractéristiques communes à la fois à la méthode explicite des différences finies et à la méthode implicite des différences finies.

Dans le cas de la méthode *hopscotch*, calculs explicites et implicites alternent au fur et à mesure du passage d'un nœud au nœud suivant, comme l'illustre le graphique 17.17. À chaque date, les valeurs aux nœuds « explicites » sont d'abord calculées en suivant la méthode usuelle. Les valeurs aux nœuds « implicites » peuvent ensuite être calculées sans qu'il soit nécessaire de résoudre un système d'équations puisque les valeurs aux nœuds adjacents sont déjà connues.

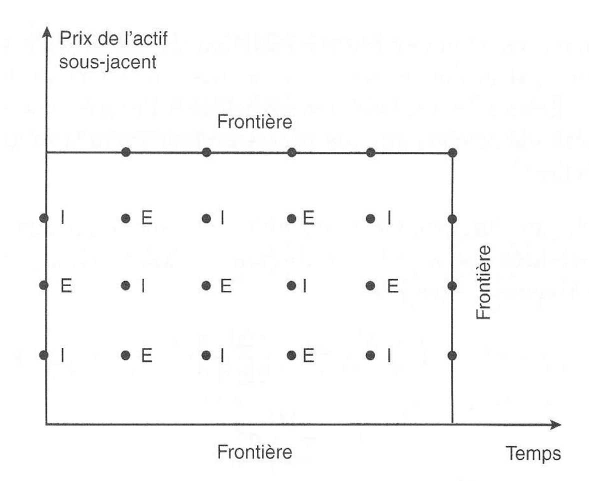
La méthode de Crank-Nicolson est en quelque sorte une moyenne entre méthode explicite et méthode implicite. Pour la méthode implicite, l'équation (17.27) donne :

$$f_{i,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1}$$

et pour la méthode explicite, l'équation (17.32) s'écrit :

$$f_{i-1,j} = a_j^* f_{i,j-1} + b_j^* f_{i,j} + c_j^* f_{i,j+1}$$

29. J. Hull et A. White montrent toutefois dans « Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25 (mars 1990), 87-100, qu'il est possible de dépasser cette difficulté. Dans cette situation particulière, il suffit ainsi de construire la grille pour $\ln(S)$ plutôt que pour S pour s'assurer de la convergence.



Graphique 17.17 : La méthode hopscotch : les nœuds auxquels les calculs implicites sont effectués sont identifiés par les I ; les nœuds auxquels les calculs explicites sont effectués sont identifiés par les E.

La méthode de Crank-Nicolson fait la moyenne de ces deux équations sous la forme :

$$f_{i,j} + f_{i-1,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1} + a_j^* f_{i,j-1} + b_j^* f_{i,j} + c_j^* f_{i,j+1}$$

En posant :

$$g_{i,j} = f_{i,j} - a_j^* f_{i,j-1} - b_j^* f_{i,j} - c_j^* f_{i,j+1}$$

on obtient :

$$g_{i,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j}$$

Ainsi, la mise en place de la méthode de Crank-Nicolson revient en fin de compte à la mise en place de la méthode implicite des différences finies. Elle présente toutefois l'avantage de converger plus rapidement que les méthodes explicite et implicite.

Les utilisations des méthodes des différences finies

Les méthodes des différences finies peuvent être employées pour la résolution des mêmes problèmes d'évaluation d'actifs dérivés que les approches reposant sur les arbres. Elles permettent l'évaluation de contrats européens aussi bien qu'américains, mais ne peuvent être facilement mises en œuvre quand les payoffs de l'actif dérivé dépendent du chemin suivi par le sous-jacent. Les méthodes des différences finies peuvent par contre être employées quand les payoffs dépendent de plusieurs sous-jacents, mais seulement au prix d'un accroissement considérable du temps de calcul. La grille représentée dans le graphique 17.14 devient alors multidimensionnelle.

La méthode de calcul des lettres grecques est semblable à celle qui est utilisée pour les arbres. Le delta, le gamma et le thêta peuvent être calculés directement à partir des valeurs de $f_{i,j}$ de la grille. Pour le vega, il est nécessaire d'appliquer une légère variation à la volatilité et de recalculer la valeur de l'actif dérivé en utilisant la même grille.

Résumé

Nous avons, dans ce chapitre, présenté trois procédures numériques différentes d'évaluation des actifs dérivés quand il n'existe pas de solution analytique ; ces procédures reposent respectivement sur la construction d'arbres, la simulation de Monte Carlo et les méthodes des différences finies.

Dans le cas des arbres binomiaux, le prix de l'action est supposé, pendant le court intervalle de temps Δt, augmenter d'une proportion u ou diminuer d'une proportion d. Les valeurs de u et d et les probabilités associées sont déterminées de telle façon que la moyenne et l'écart-type des changements de prix soient exacts dans un univers risque-neutre. Les prix des actifs dérivés sont alors calculés à partir de la date d'échéance par induction arrière. Pour les options américaines, la valeur retenue à un nœud est égale à la valeur maximale entre la valeur d'exercice immédiat et la valeur espérée actualisée résultant de la conservation de l'option pendant une période Δt supplémentaire.

La simulation de Monte Carlo consiste, à partir de nombres tirés au hasard, à construire un échantillon de trajectoires du sous-jacent dans l'univers risque-neutre. Le flux terminal de l'actif dérivé est calculé pour chaque trajectoire et actualisé au taux d'intérêt sans risque. La valeur estimée de l'actif dérivé est alors la moyenne arithmétique des payoffs actualisés.

Les méthodes des différences finies résolvent l'EDP en la transformant en une équation aux différences. Elles ont en commun avec les approches par arborescence l'utilisation de l'induction arrière. La méthode explicite est en outre identique à l'approche trinomiale. L'avantage de la méthode implicite, plus compliquée par ailleurs, est qu'il n'est alors pas nécessaire de prendre des précautions particulières pour que la convergence soit assurée.

En pratique, le choix de la méthode à employer dépend principalement des caractéristiques des produits dérivés à évaluer et de la précision requise. Les simulations de Monte Carlo, fonctionnant de la date initiale vers la date d'échéance, doivent plutôt être utilisées pour les contrats européens. Elles peuvent cependant s'accommoder de toutes sortes de raffinements, tant que ceux-ci concernent la définition des payoffs. Elles deviennent, en termes relatifs, plus économes en temps de calcul, à mesure qu'augmente le nombre de variables sous-jacentes. Les approches par arborescence et les méthodes des différences finies, fonctionnant depuis la date d'échéance vers la date initiale, peuvent être employées indifféremment pour l'évaluation des produits dérivés de type américain ou européen. Toutefois, elles sont délicates à appliquer quand les payoffs ne dépendent plus uniquement de la valeur terminale du sous-jacent mais aussi de la trajectoire suivie par celui-ci. Enfin, il y a de fortes chances qu'elles nécessitent des temps de calcul très importants dans le cas où plus de deux variables sous-jacentes doivent être prises en compte.

Références complémentaires

Générales

CLEWLOW L. et C. STRICKLAND, *Implementing Derivatives Models*, Wiley, Chichester, 1998.

PRESS W. H., S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING et B. P. FLANNERY, *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, 2e éd., Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

Sur l'approche par arborescences

COX J., S. ROSS et M. RUBINSTEIN, « Option Pricing : A Simplified Approach », *Journal of Financial Economics*, 7 (octobre 1979), 229-64.

FIGLEWSKI S. et B. GAO, « The Adaptive Mesh Model : A New Approach to Efficient Option Pricing », *Journal of Financial Economics*, 53 (1999), 313-51.

HULL J. C. et A. WHITE, « The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23 (septembre 1988), 237-51.

RENDLEMAN R. et B. BARTTER, « Two State Option Pricing », *Journal of Finance*, 34 (1979), 1092-1110.

Sur la simulation de Monte Carlo

BOYLE P. P., « Options : A Monte Carlo Approach », *Journal of Financial Economics*, 4 (1977), 323-38.

BOYLE P. P., M. BROADIE et P. GLASSERMAN, « Monte Carlo Methods for Security Pricing », *Journal of Economics Dynamics and Control*, 21 (1997), 1267-1322.

BROADIE M., P. GLASSERMAN et G. JAIN, « Enhanced Monte Carlo Estimates for American Option Prices », *Journal of Derivatives*, 5, automne 1997, 25-44.

Sur les méthodes des différences finies

HULL J. C. et A. WHITE, « Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25 (mars 1990), 87-100.

WILMOTT P., *Derivatives : The Theory and Practice of Financial Engineering*, Wiley, Chichester, 1998.

Problèmes et exercices

17.1 Quelles lettres grecques peuvent être estimées pour une option américaine en ne construisant qu'un seul arbre binomial : le delta, le gamma, le vega, le thêta, le rhô ?

17.2 Calculez le prix d'un put américain de prix d'exercice 60 €, d'échéance 3 mois sur une action ne versant pas de dividendes, cotant 60 €, de volatilité annuelle 45 % quand le taux sans risque annuel s'élève à 10 %. Utilisez pour cela un arbre binomial avec des périodes d'un mois.

17.3 Expliquez comment mettre en œuvre la technique du contrôle de la différence quand une option américaine est évaluée à l'aide d'un arbre binomial.

17.4 Considérons un call américain d'échéance 9 mois et de prix d'exercice 200 cents sur un contrat futures sur maïs. Calculez le prix de cette option si le prix futures est 198 cents, le taux sans risque 8 % et la volatilité 30 %. Utilisez pour cela un arbre binomial avec des périodes d'une durée de trois mois.

17.5 Considérons une option dont le payoff terminal est égal à la différence entre le prix terminal de l'action et la moyenne des cours observés sur la durée de vie de l'option si celle-ci est positive, et nul sinon. Ce contrat peut-il être évalué à l'aide d'un arbre binomial ? Expliquez votre raisonnement.

17.6 « L'arbre du prix d'un actif payant des dividendes n'est pas recombinant, mais l'arbre pour le prix de l'action diminué de la valeur des dividendes futurs est recombinant. » Expliquez cette affirmation.

17.7 Montrez que les probabilités d'un arbre binomial à la Cox-Ross-Rubinstein sont négatives quand la condition de la note de bas de page n° 9 est vérifiée.

17.8 Utilisez un échantillon stratifié de taille 100 pour améliorer l'estimation de π dans l'encadré 17.1 et le tableau 17.1.

17.9 Expliquez pourquoi l'approche par simulation de Monte Carlo ne peut pas facilement être utilisée pour évaluer les produits dérivés de type américain.

17.10 Considérons un put américain d'échéance 9 mois et de prix d'exercice 49 € sur une action ne versant pas de dividendes. Calculez le prix de cette option si l'action cote 50 €, pour un taux d'intérêt sans risque annuel de 5 % et une volatilité de 30 %. Utilisez pour cela un arbre binomial à trois périodes.

17.11 Utilisez un arbre binomial à trois périodes pour évaluer un call américain sur un contrat futures sur blé. Le prix futures est 400 cents, le prix d'exercice 420 cents, le taux sans risque 6 % et la volatilité annuelle 35 %. Estimez le delta de l'option à partir de l'arbre.

17.12 Considérons un call américain d'échéance 3 mois et de prix d'exercice 20 € sur une action dont le cours actuel est 20 €. Le taux sans risque annuel est égal à 3 %, la volatilité annuelle est estimée à 25 % et un dividende de 2 € doit être versé dans un mois et demi. Utilisez un arbre binomial à trois périodes pour évaluer cette option.

17.13 Considérons un put américain sur une action ne versant pas de dividendes, d'échéance 1 an et de prix d'exercice 18 €. Le cours actuel de l'action est 20 €, le taux sans risque est égal à 15 % et la volatilité est estimée à 40 %. Utilisez le logiciel DerivaGem avec des périodes d'une durée de trois mois pour évaluer ce contrat. Imprimez l'arbre et vérifiez que les valeurs de l'option aux nœuds de la dernière et de l'avant-dernière date sont exactes. Utilisez le logiciel DerivaGem pour évaluer la version européenne de ce contrat. Améliorez votre estimation du prix de l'option américaine à l'aide de la technique du contrôle de la différence.

17.14 Considérons un put américain sur un indice boursier d'échéance 2 mois et de prix d'exercice 480. L'indice vaut actuellement 484 points, le taux sans

risque est égal à 3 % et la volatilité de l'indice est estimée à 25 % par an. Évaluez ce contrat à l'aide d'un arbre binomial en divisant la durée de vie de l'option en quatre périodes de quinze jours.

17.15 Comment la technique du contrôle de la différence peut-elle être utilisée pour améliorer l'estimation du delta d'une option américaine obtenue à l'aide d'un arbre binomial ?

17.16 Supposez qu'on décide d'évaluer un call européen sur une action ne versant pas de dividendes, dont la volatilité est stochastique, à l'aide d'une simulation de Monte Carlo. Comment les techniques du contrôle de la différence et de la variable antithétique peuvent-elles permettre d'en améliorer l'efficacité numérique ? Expliquez pourquoi il est nécessaire de calculer six valeurs de l'option pour chaque trajectoire simulée si l'on veut employer à la fois la technique du contrôle de la différence et celle de la variable antithétique.

17.17 Quelles sont les modifications à apporter aux équations (17.27) à (17.30) quand on emploie la méthode des différences finies pour évaluer un call américain sur devises ?

17.18 Considérons un put américain sur une action ne versant pas de dividendes, d'échéance 4 mois et de prix d'exercice 21 €. Le cours actuel de l'action est 20 €, le taux d'intérêt sans risque annuel est égal à 20 % et la volatilité annuelle est estimée à 30 %. Évaluez cette option à l'aide de la méthode explicite des différences finies avec des intervalles de prix de 4 € et des intervalles de temps d'un mois.

17.19 Le prix spot du cuivre est de 0,60 $ par livre. Supposez que les prix futures (en dollars par livre) soient les suivants :

3 mois	0,59
6 mois	0,57
9 mois	0,54
12 mois	0,50

La volatilité annuelle du prix du cuivre est estimée à 40 % et le taux sans risque annuel est égal à 6 %. Évaluez un call américain sur le cuivre, de prix d'exercice 0,60 $ et d'échéance 1 an, à l'aide d'un arbre binomial en divisant la durée de vie de l'option en quatre trimestres. (Indication : comme nous l'avons expliqué à la section 14.7, le prix futures d'une variable est l'espérance de son prix futur dans un univers risque-neutre.)

17.20 Servez-vous de l'arbre binomial construit pour le problème 17.19 pour évaluer un titre délivrant un flux égal à x^2 dans un an, x étant le prix du cuivre.

17.21 Expliquez dans quel(s) cas les estimations du prix des actifs dérivés données par la méthode explicite des différences finies sont affectées par les conditions aux bornes pour $S = 0$ et $S \to \infty$.

17.22 Comment utiliseriez-vous la méthode de la variable antithétique pour améliorer l'estimation de la valeur de l'option européenne de l'encadré 17.2 et du tableau 17.2 ?

17.23 Une entreprise a émis des obligations convertibles d'une maturité de 3 ans et de nominal 25 € échangeables à tout moment contre deux actions de la société. L'entreprise peut en outre rembourser l'emprunt par anticipation, forçant ainsi la conversion, dès que le prix de l'action devient supérieur ou égal à 18 €. En supposant que l'entreprise décide de forcer la conversion à la première opportunité, quelles sont les conditions aux bornes du prix de l'actif dérivé ? Expliquez comment vous emploieriez les méthodes des différences finies pour évaluer l'obligation convertible si les taux d'intérêt sont constants. Vous supposerez pour cela que l'entreprise est sans risque de défaut.

17.24 Indiquez quelles formules peuvent être employées pour l'obtention de trois échantillons aléatoires tirés de lois normales centrées-réduites quand il y a une corrélation ρ_{ij} entre l'échantillon i et l'échantillon j.

Questions complémentaires

17.25 Considérons un put américain, d'échéance 1 an, donnant le droit de vendre des francs suisses (CHF) contre des USD, à un prix d'exercice de 0,80 $. La volatilité du franc suisse est estimée à 10 % ; les taux d'intérêt des placements en USD et en CHF sont respectivement égaux à 6 % et 3 % ; le taux de change actuel est de 0,81. Évaluez cette option à l'aide d'un arbre binomial à trois périodes et estimez le delta de cette option.

17.26 Considérons un call américain d'échéance 1 an et de prix d'exercice 9,00 $ sur un contrat futures sur argent. Le prix futures est aujourd'hui 8,50 $, le taux d'intérêt sans risque annuel est égal à 12 % et la volatilité annuelle du prix futures est estimée à 25 %. Évaluez cette option à l'aide du logiciel DerivaGem pour quatre périodes trimestrielles. Imprimez l'arbre et vérifiez que les valeurs de l'option aux nœuds de la date finale et de l'avant-dernière date sont exactes. Évaluez la version européenne de cette option avec DerivaGem et employez la technique du contrôle de la différence pour améliorer votre estimation du prix de l'option américaine.

17.27 Considérons un call américain d'échéance 6 mois portant sur une action devant verser un dividende de 1 € à la fin des deuxième et cinquième mois. L'action cote 30 €, le prix d'exercice est 34 €, le taux d'intérêt sans risque annuel est égal à 10 % et la volatilité de la part incertaine du prix de l'action est estimée à 30 % par an. Évaluez cette option à l'aide du logiciel DerivaGem en divisant la durée de vie de l'option en six périodes mensuelles. Comparez votre résultat avec l'approximation de Black donnée à la section 13.12.

17.28 La livre sterling (GBP) s'échange actuellement contre 1,60 $, et la volatilité du taux de change GBP/USD est estimée à 15 % par an. Les taux d'intérêt sans risque annuels aux États-Unis et en Grande-Bretagne sont respectivement égaux à 6 % et 9 %. Évaluez un call américain de prix d'exercice 1,62 $ et d'échéance 1 an à l'aide de la méthode explicite des différences

finies. Considérez pour cela des taux de change entre 0,80 et 2,40 par pas de 0,20, et des intervalles de temps trimestriels.

17.29 Répondez aux questions suivantes concernant les procédures alternatives de construction d'arbres vues à la section 17.4.

a. Montrez que le modèle binomial de la section 17.4 donne exactement la moyenne et la variance des variations du logarithme du prix de l'action pendant la période de temps Δt.

b. Montrez que l'arbre trinomial de la section 17.4 donne exactement la moyenne et la variance des variations du logarithme du prix de l'action pendant la période de temps Δt quand les termes d'ordre supérieur à 2 en Δt sont ignorés.

c. Construisez un modèle trinomial alternatif à celui de la section 17.4 tel que les probabilités associées aux branches haute, moyenne et basse partant de chaque nœud soient respectivement égales à 1/6, 2/3 et 1/6. Supposez pour cela que les branches mènent de S à Su, Sm et Sd avec $m^2 = ud$. Votre arbre doit donner les valeurs exactes de la moyenne et de la variance du logarithme du prix de l'action.

17.30 Les fonctions du développeur d'applications de DerivaGem vous permettent de vérifier dans quelle mesure les prix d'options calculés à l'aide d'arbres binomiaux convergent vers la valeur correcte à mesure que l'on augmente le nombre de périodes (voir graphique 17.4 et l'application A de DerivaGem). Considérons une option de vente d'échéance 2 ans et de prix d'exercice 900 portant sur un indice boursier valant aujourd'hui 900 points. Le taux sans risque annuel est égal à 5 % et le rendement en dividendes de l'indice est estimé à 2 %.

a. Présentez des résultats de convergence semblables à ceux de l'application dans le cas où l'option est européenne et la volatilité de l'indice est égale à 20 %.

b. Présentez des résultats de convergence semblables à ceux de l'application dans le cas où l'option est américaine et la volatilité de l'indice est égale à 20 %.

c. En employant la technique du contrôle de la différence avec une volatilité de 20 %, construisez un diagramme dans lequel le prix de l'option américaine est fonction du nombre de périodes choisi.

d. Supposez que l'option américaine cote 85,0. Construisez un diagramme liant l'estimation de la volatilité implicite avec le nombre de périodes choisi.

Chapitre 18

Value at Risk

Au chapitre 15, nous avons examiné des mesures telles que le delta, le gamma ou le vega pour décrire différents aspects du risque d'un portefeuille contenant des options, et éventuellement d'autres actifs. Une institution financière calcule ces différentes mesures chaque jour, pour chaque variable de marché à laquelle sa situation est sensible. Mais des centaines ou des milliers de variables peuvent avoir une influence. Une analyse en termes de delta-gamma-vega requiert la production d'une quantité énorme de mesures. Si celles-ci sont utiles aux traders, elles le sont beaucoup moins à la direction générale, qui doit disposer d'informations pertinentes, certes, mais surtout synthétiques.

La valeur exposée au risque (qu'on appelle parfois, en français, Valeur-à-Risque ou encore Valeur-en-Risque, mais pour laquelle on garde le plus souvent l'appellation anglo-saxonne *Value at Risk* ou VaR) est une tentative pour résumer en un seul nombre l'exposition au risque d'un portefeuille ou d'une position. Les banques centrales et, plus généralement, les régulateurs utilisent aussi la VaR pour déterminer le niveau de capitaux propres que doivent posséder les institutions financières lorsqu'elles détiennent des positions risquées.

Dans ce chapitre, nous expliquons cette mesure de VaR et nous exposons deux approches pour la calculer. Ce sont respectivement la simulation historique et l'approche de construction de modèle (ou approche variance-covariance). Ces deux méthodes sont largement utilisées ; il n'existe pas, aujourd'hui, de consensus quant à la supériorité de l'une sur l'autre.

18.1 La mesure de la VaR

Lorsqu'un gérant de portefeuille utilise une mesure de risque comme la VaR, il cherche à élaborer une constatation du type suivant : « Nous perdrons moins de V euros dans les N prochains jours avec une probabilité de X. »

La variable V est alors la VaR du portefeuille à N jours au seuil X. Dans l'évaluation des capitaux propres nécessaires à la couverture des risques, le régulateur utilise en général $N = 10$ et $X = 99$ % (voir l'encadré 18.1). Il s'intéresse donc à la perte potentielle qui sera dépassée avec une probabilité de 1 %. Les capitaux propres requis sont alors au moins égaux à trois fois V. Le plus souvent, lorsque N est l'horizon et X le seuil de confiance, la VaR est le $100(1 - X)$ centile de la distribution de probabilité des variations de valeur du portefeuille dans les N jours à venir.

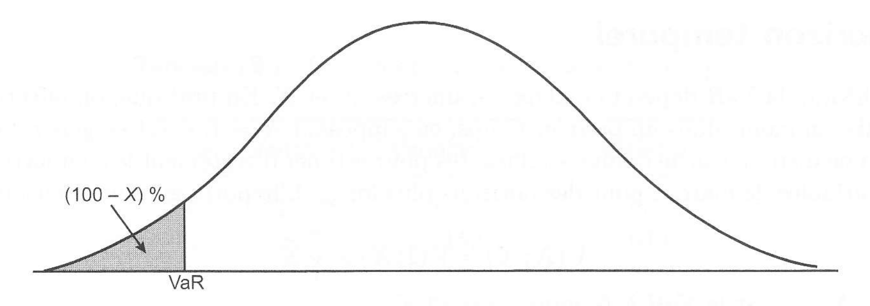
Encadré 18.1 Comment le régulateur utilise-t-il la VaR ?

La Comité de Bâle, qui se réunit régulièrement à Bâle, est une institution regroupant les régulateurs des systèmes bancaires du monde entier. En 1988, par « l'accord de Bâle », le comité a défini la façon de calculer les montants de capitaux propres exigibles pour compenser un risque de crédit supporté par une institution financière. Quelques années plus tard, en 1996, il a publié un « amendement », mis en œuvre en 1998. Il englobe à la fois le risque de marché et le risque de crédit en distinguant la composante marché (*trading book*) et la composante bancaire classique (*banking book*). Cette dernière contient en particulier les prêts accordés par les établissements bancaires. Le risque associé n'est pas réévalué aussi souvent que celui de la composante marché, pour des raisons comptables et de gestion évidentes. Le trading book contient les divers instruments financiers traités par les institutions financières (actions, obligations, swaps, contrats forward et futures, options, etc.) ; il est réévalué chaque jour.

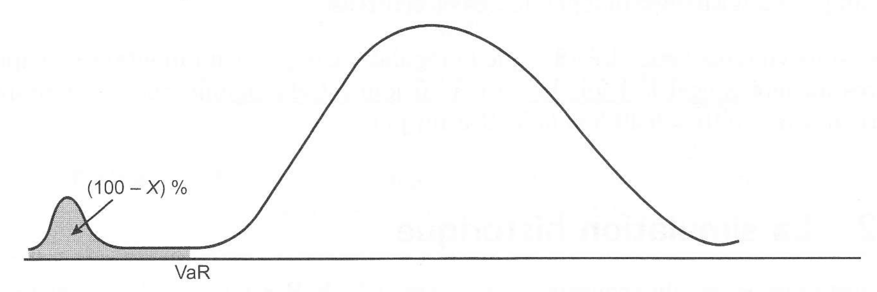
L'amendement de 1996 préconise, pour le trading book, d'utiliser $N = 10$ et $X = 99$ pour le calcul de la VaR. Cela signifie que l'évaluation des pertes potentielles est faite à l'horizon de 10 jours avec une probabilité de 1 % de dépasser le niveau de VaR calculé. Le capital requis est alors défini comme k fois cette mesure de VaR (avec un ajustement éventuel s'il existe des risques spécifiques). Le multiplicateur k peut varier d'une banque à l'autre (au gré du régulateur) mais il est supérieur ou égal à 3. Cette valeur minimale de 3 est réservée aux banques qui ont fait leurs preuves dans l'estimation de leurs propres risques. Si ce n'est pas le cas, la valeur de ce multiplicateur peut être plus élevée.

Le graphique 18.1 illustre ce calcul de VaR lorsque les variations de valeur du portefeuille sont supposées gaussiennes. La VaR a pour qualité essentielle sa simplicité. En bref, elle permet de répondre à la question : « Dans quelle mesure la valeur d'un portefeuille peut-elle se dégrader ? » C'est évidemment la question à laquelle tous les gérants souhaitent répondre. De plus, synthétiser l'ensemble des grecques (delta, gamma, thêta, etc.) en un seul nombre est attractif.

Si on suppose que le risque doit être mesuré par un seul nombre, la question est de savoir si la VaR est le meilleur choix. Certains chercheurs ont évoqué la possibilité que cette mesure engendre, chez les traders, une incitation à construire des portefeuilles



Graphique 18.1 : Calcul de la VaR au seuil de confiance X à partir d'une loi normale pour les variations de valeur du portefeuille.



Graphique 18.2 : Situation alternative à celle du graphique 18.1 ; la VaR est la même mais les pertes potentielles sont plus importantes.

dont la variation soit distribuée selon une loi comme celle qui est illustrée dans le graphique 18.2.

La VaR est la même que dans le graphique 18.1 mais le risque est bien plus important. Une mesure tenant compte de cet aspect est la VaR conditionnelle (C–VaR)[1]. Si la VaR répond à la question « Comment la valeur de mon portefeuille peut-elle se dégrader ? », la VaR conditionnelle répond à la question « Si la situation se dégrade effectivement, quelle sera ma perte moyenne ? ». La C–VaR mesure donc l'espérance de perte conditionnellement à une variation de valeur du portefeuille située dans le $100(1 - X)$ centile. Quand $X = 99\ \%$ et $N = 10$ jours, elle donne la perte moyenne dans les 10 jours en supposant que la situation évolue dans le 1 % des cas les plus défavorables.

En dépit de ses faiblesses, la VaR reste la mesure la plus prisée, aussi bien chez les régulateurs que chez les professionnels. Par conséquent, le reste de ce chapitre est presque exclusivement consacré à cette mesure du risque.

1. Cette mesure est suggérée par P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber et D. Heath, « Coherent Measures of Risk », *Mathematical Finance*, 9 (1999), 203-28. Ces auteurs définissent les « bonnes » propriétés que doit posséder une mesure de risque et montrent que la VaR ne les possède pas toutes.

L'horizon temporel

En théorie, la VaR dépend de deux paramètres, N et X. En pratique, on effectue les calculs, au moins dans un premier temps, en supposant $N = 1$. C'est en général parce qu'on ne dispose pas de données suffisantes pour estimer directement le comportement des variables de marché pour des horizons plus longs. L'hypothèse retenue ensuite est que :

$$V(N; X) = V(1; X) \times \sqrt{N}$$

où $V(N;\ X)$ est la VaR à N jours au seuil X.

Cette formule est exacte quand les variations successives de la valeur du portefeuille sont supposées normales, indépendantes et centrées.

Nous avons vu dans l'encadré 18.1 que le régulateur requiert un montant de capitaux propres au moins égal à 3 fois la VaR à 10 jours. Cela signifie que ce montant est supérieur à $3 \times \sqrt{10} = 9{,}49$ fois la VaR à un jour.

18.2 La simulation historique

L'un des moyens les plus courants pour estimer la VaR est la simulation historique. Cette méthode s'appuie très directement sur les variations passées pour estimer la distribution des variations futures. Supposons que nous souhaitions calculer la VaR à un jour au seuil de 99 %, c'est-à-dire $V(1\,;\,99\ \%)$, à partir d'un historique de 500 données journalières. La première étape consiste à identifier les variables de marché pertinentes. Ce seront par exemple des taux d'intérêt, des taux de change, des prix d'actions, etc. On collecte alors des données pour ces variables sur les 500 jours qui viennent de s'écouler. Cela donne 500 scénarios sur les possibilités de variation entre aujourd'hui et demain. Pour chacun des scénarios, on calcule la variation de valeur du portefeuille entre aujourd'hui et demain. On construit ainsi une distribution de probabilité des variations de valeur du portefeuille analysé. La cinquième variation la plus défavorable définit le premier centile, soit $V(1\,;\,99\ \%)$. Sous l'hypothèse que les 500 jours passés fournissent un bon estimateur des variations futures, cette cinquième variation la plus défavorable est bien l'estimateur de la VaR à un jour au seuil de 99 %. La probabilité que la perte dépasse la VaR est alors de 1 %.

Cette méthodologie est illustrée dans les tableaux 18.1 et 18.2.

Le tableau 18.1 montre l'évolution des variables de marché sur 500 jours. Ces mesures sont le plus souvent prises à la clôture du marché. On note jour 0 la première observation, jour 1 la deuxième, et ainsi de suite. Le jour 500 correspond à la date d'aujourd'hui. Le tableau 18.2 montre les valeurs des variables de marché demain (jour 501) si les pourcentages de variation sont ceux des 500 scénarios fournis par l'historique des données.

Tableau 18.1 : Données pour la simulation historique

Jour	Variable 1	Variable 2	···	Variable N
0	20,33	0,1132	···	65,37
1	20,78	0,1159	···	64,91
2	21,44	0,1162	···	65,02
3	20,97	0,1184	···	64,90
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
498	25,72	0,1312	···	62,22
499	25,75	0,1323	···	61,99
500	25,85	0,1343	···	62,10

Tableau 18.2 : Scénarios engendrés pour demain (jour 501) en utilisant les données du tableau 18.1

N° scénario	Variable 1	Variable 2	···	Variable N	Valeur du portefeuille (en M €)	Variation (en M €)
1	26,42	0,1375	···	61,66	23,71	0,21
2	26,67	0,1346	···	62,21	23,12	-0,38
3	25,28	0,1368	···	61,99	22,94	-0,56
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
499	25,88	0,1354	···	61,87	23,63	0,13
500	25,95	0,1363	···	62,21	22,87	-0,63

Par exemple, la première ligne est obtenue en supposant que les valeurs d'aujourd'hui (jour 500) changent d'un pourcentage égal à la variation entre le jour 0 et le jour 1 du tableau 18.1. Les 500 lignes du tableau 18.2 sont obtenues par le même type de calcul.

Notons ν_i la valeur d'une variable de marché au jour i et m la date d'aujourd'hui. Le scénario n° i pour cette variable est défini par :

$$v_m \frac{v_i}{v_{i-1}}$$

Dans notre exemple, $m = 500$; pour la première variable, $\nu_m = 25{,}85$, $\nu_0 = 20{,}33$ et $\nu_1 = 20{,}78$. On aura donc pour le premier scénario la valeur :

$$25{,}85 \times \frac{20{,}78}{20{,}33} = 26{,}42$$

L'avant-dernière colonne du tableau 18.2 indique les valeurs du portefeuille étudié si les valeurs des variables de marché sont celles qui sont définies par les différents

scénarios. La valeur du portefeuille aujourd'hui est connue ; supposons qu'elle soit égale à 23,5 millions d'euros. On peut alors calculer les variations pour ces 500 scénarios. Par exemple, pour le scénario 1, la variation est de 210 000 €, pour le scénario 2, elle vaut -380 000 €, et ainsi de suite (voir dernière colonne du tableau 18.2). Ces variations sont alors triées en ordre croissant et la cinquième définit la VaR à 99 %. On peut aussi utiliser la théorie des valeurs extrêmes pour lisser la queue de la distribution de probabilité et obtenir une meilleure estimation du dernier centile de la distribution[2]. Comme nous l'avons mentionné à la section précédente, la VaR à N jours sera égale à la VaR à un jour multipliée par $\sqrt{N}$.

Chaque jour, l'estimation de la VaR est mise à jour en utilisant l'historique de 500 jours le plus récent. Considérons par exemple ce qui survient au jour 501. On dispose d'une observation nouvelle pour chaque variable de marché et pour la valeur du portefeuille[3]. La procédure décrite ci-dessus est reprise pour calculer une estimation de la VaR en utilisant les données des jours 1 à 501 pour élaborer les nouveaux scénarios. De la même façon, au jour suivant, on réalisera les calculs avec les données des jours 2 à 502, et ainsi de suite.

18.3 L'approche variance-covariance

L'alternative essentielle à la simulation historique est l'approche variance-covariance, encore appelée approche de construction de modèle (*model building approach*). Avant d'entrer dans la présentation détaillée, il est bon de revenir sur la façon de mesurer la volatilité.

Les volatilités journalières

Dans les modèles d'évaluation d'options, les volatilités sont exprimées en base annuelle. Dans l'approche de construction de modèle pour le calcul de la VaR, la période de référence est le jour ; la volatilité est donc exprimée par jour. Quelle est la relation entre la volatilité en base journalière intervenant dans le calcul de la VaR et la volatilité en base annuelle de l'univers des options ? Notons σ_a la volatilité annuelle et σ_j la volatilité journalière ; en supposant qu'il y a 252 jours de cotation par an, l'équation (13.2) établit entre ces deux quantités la relation :

$$\sigma_a = \sigma_j\sqrt{252}$$

De manière équivalente, l'écart-type journalier s'écrit :

$$\sigma_j = \frac{\sigma_a}{\sqrt{252}}$$

2. Voir P. Embrechts, C. Kluppelberg et T. Mikosch, *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, New York, 1997 ; ou A. J. McNeil, « Extreme Value Theory for Risk Managers », dans *Internal Modeling and CAD II*, London, Risk Books, 1999, accessible à l'adresse www.math.ethz.ch/~mcneil.

3. Il est bon de garder à l'esprit que la composition du portefeuille peut avoir changé entre-temps.

En d'autres termes, la volatilité journalière représente environ 6 % de la volatilité annuelle. Dans le calcul de la VaR, on suppose en général que la volatilité journalière est l'écart-type de la variation journalière (en pourcentage) de l'actif ou du portefeuille considéré (voir section 13.4). Dans les sections suivantes, nous supposons que des estimations des volatilités et des corrélations sont disponibles pour les calculs présentés. Au chapitre 19, l'obtention de ces estimations sera abordée plus en détail.

Le cas d'un seul actif

Considérons pour l'instant le cas le plus simple d'un portefeuille contenant une seule action, par exemple 10 millions d'euros d'actions France Télécom ; comme précédemment, nous traitons le cas $N = 10$ et $X = 99$ %, mais nous cherchons dans un premier temps à calculer la VaR à un jour. Si la volatilité journalière de France Télécom est de 2 % (correspondant à une volatilité annuelle de 32 %), l'écart-type des variations journalières du portefeuille est 200 000 €. Il est courant de supposer, sur un horizon court (un jour ou dix jours), que l'espérance des variations est nulle. Cette hypothèse se justifie par le fait que l'espérance sur un intervalle court est négligeable face aux variations liées à la volatilité. Si, par exemple, France Télécom a une rentabilité annuelle espérée de 20 %, la rentabilité espérée journalière est 20 %/252 = 0,08 % alors que l'écart-type journalier est 2 %. À l'horizon de 10 jours, la rentabilité espérée est 0,8 % et l'écart-type $2\% \times \sqrt{10} = 6{,}3$ %.

Si on suppose de plus que les variations de valeur du portefeuille sont normalement distribuées[4], la variation de valeur du portefeuille a une probabilité inférieure à 1 % d'être supérieure à 2,33 fois l'écart-type. En d'autres termes, au seuil de confiance de 99 %, la valeur du portefeuille ne baissera pas de plus de 2,33 fois l'écart-type. Par conséquent, sur un portefeuille de 10 millions d'euros d'actions France Télécom, la VaR à 99 % (à un jour) est :

$$2{,}33 \times 200\ 000 = 466\ 000 \text{ €}$$

Si $N = 10$, la VaR est égale à :

$$\sqrt{10} \times 466\ 000 = 1473621 \text{ €}$$

Considérons maintenant un portefeuille de 5 millions d'euros d'actions Renault, dont la volatilité journalière est 1 %. Les mêmes calculs conduisent à une VaR à un jour égale à :

$$2{,}33 \times 0{,}01 \times 5\ 000\ 000 = 116\ 500 \text{ €}$$

La VaR à 10 jours est, quant à elle, égale à :

$$\sqrt{10} \times 116\ 500 = 368\ 405 \text{ €}$$

4. Pour être cohérent avec le modèle d'évaluation d'options du chapitre 13, nous devrions supposer que le prix de France Télécom demain suit une loi log-normale. En fait, sur un intervalle très court, la différence avec l'hypothèse de variations gaussiennes est négligeable.

Le cas de deux actifs

Que se passe-t-il pour un portefeuille qui contient simultanément 10 millions d'euros d'actions France Télécom et 5 millions d'euros d'actions Renault si la corrélation des rentabilités des deux titres est $\rho = 0{,}3$? On sait que la variance de la somme de deux variables aléatoires X et Y s'écrit :

$$\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y$$

L'application de ce résultat au portefeuille, en assimilant X à l'action France Télécom et Y à l'action Renault, donne un écart-type de variation de valeur du portefeuille égal à :

$$\sqrt{200\,000^2 + 50\,000^2 + 2 \times 0{,}3 \times 200\,000 \times 50\,000} = \quad 220\,227 \text{ €}$$

La VaR à un jour du portefeuille est donc :

$$2{,}33 \times 220\,227 = 513\,129 \text{ €}$$

et la VaR à 10 jours est égale à $513\,129 \times \sqrt{10} = 1\,622\,657$ €.

Les bénéfices de la diversification

Dans l'exemple considéré ci-dessus, on a donc :

1. La VaR à 10 jours au seuil de 99 % de France Télécom est 1 473 621 €.
2. La VaR à 10 jours au seuil de 99 % de Renault est 368 405 €.
3. La VaR à 10 jours au seuil de 99 % pour le portefeuille de deux titres vaut 1 622 657 €.

Le montant :

$$1\,473\,621 + 368\,405 - 1\,622\,657 = 219\,369 \text{ €}$$

représente le gain de diversification. Si les deux rentabilités étaient parfaitement (positivement) corrélées, la VaR du portefeuille serait égale à la somme des VaR des deux titres individuels. Dès que cette corrélation n'est pas parfaite, il existe des gains de diversification[5].

18.4 Le modèle linéaire

Les exemples qui viennent d'être traités sont de simples illustrations de l'utilisation d'un modèle linéaire pour calculer la VaR. De manière générale, considérons un portefeuille P composé de n actifs avec des montants α_i, $1 \leq i \leq n$ investis dans ces

5. Harry Markowitz fut l'un des premiers à étudier les bénéfices de la diversification. Il fut lauréat du prix Nobel d'économie en 1990 pour ses travaux. Voir H. Markowitz, « Portfolio Selection », *Journal of Finance*, 7, n° 1, mars 1952, 77-91.

actifs. Notons Δx_i la rentabilité journalière de l'actif i. La variation journalière de valeur du portefeuille, notée ΔP, s'écrit :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i \tag{18.1}$$

Dans l'exemple de la section précédente, nous avions, en millions d'euros, $\alpha_1 = 10$ et $\alpha_2 = 5$ correspondant aux montants investis dans France Télécom et Renault. On peut donc écrire :

$$\Delta P = 10\Delta x_1 + 5\Delta x_2$$

Si les Δx_i de l'équation (18.1) suivent une loi jointe gaussienne, alors ΔP est normalement distribuée. Pour calculer la VaR, il suffit donc de calculer l'écart-type de ΔP. De plus, comme nous l'avons déjà mentionné, il est d'usage de supposer que $E(\Delta x_i) = 0$ pour tout i, ce qui entraîne $E(\Delta P) = 0$. Notons donc σ_i l'écart-type de la variation journalière de i et ρ_{ij} la corrélation entre Δx_i et Δx_j. La variance de ΔP, notée σ_P^2, est alors définie par :

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j$$

Cette équation peut encore s'écrire :

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \alpha_i^2 + 2 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j<i} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \tag{18.2}$$

L'écart-type de ΔP sur N jours vaut alors $\sigma_P \sqrt{N}$ et la VaR à 99 % du portefeuille est égale à $2{,}33 \times \sigma_P \sqrt{N}$.

Dans l'exemple de la section précédente, $\sigma_1 = 0{,}02$, $\sigma_2 = 0{,}01$ et $\rho_{12} = 0{,}3$; comme $\alpha_1 = 10$ et $\alpha_2 = 5$, on peut écrire :

$$\sigma_P^2 = 10^2 \times 0{,}02^2 + 5^2 \times 0{,}01^2 + 2 \times 10 \times 5 \times 0{,}3 \times 0{,}02 \times 0{,}01 = 0{,}0485$$

d'où l'on déduit $\sigma_P = 0{,}22$. Cette quantité est l'écart-type en millions d'euros de la variation de valeur journalière du portefeuille. La VaR à 99 % à 10 jours vaut donc $2{,}33 \times \sqrt{10} \times 0{,}22 =$ 1,623 million d'euros. C'est, bien sûr, le résultat trouvé précédemment.

Le cas des instruments de taux

Il est évidemment hors de question de définir une variable de marché pour chaque obligation ou chaque taux d'intérêt ; des simplifications sont nécessaires. Un moyen simple consiste à envisager uniquement des déplacements parallèles de la courbe des taux. Dans ce cas, une seule variable de marché est nécessaire, à savoir l'amplitude Δy de ce déplacement. La variation de valeur du portefeuille considéré s'écrit dans ce cas :

$$\Delta P = -DP\Delta y$$

où D désigne la duration modifiée du portefeuille.

Cette approche n'est cependant pas suffisamment précise. La procédure suivie habituellement consiste plutôt à choisir, comme variables de marché, quelques prix d'obligations zéro-coupon avec des maturités usuelles : trois mois, six mois, un an, deux ans, cinq ans, sept ans, dix ans, trente ans. Les flux engendrés par le portefeuille sont alors transformés en flux équivalents reçus aux dates d'échéance des ZC de référence. Considérons un portefeuille de 1 million d'euros d'obligations d'État, payant des coupons semestriels au taux annuel de 6 %, et d'échéance 1,2 an. Les coupons sont donc payés dans 0,2 an et 0,7 an ; de plus, le principal et le dernier coupon sont payés dans 1,2 an. Ces différents flux vont être remplacés par un portefeuille de ZC à un mois, trois mois, six mois, un an et deux ans, selon les principes suivants.

Le flux de 30 000 € à recevoir dans 0,2 an est équivalent à un portefeuille de ZC à un mois et trois mois. Le flux de 30 000 € à recevoir dans 0,7 an est équivalent à un portefeuille de ZC à six mois et un an. Enfin, le flux de 1 030 000 € à recevoir dans un 1,2 an est équivalent à un portefeuille de ZC à un an et deux ans. En définitive, l'obligation à coupons est équivalente à un portefeuille contenant des ZC pour les cinq échéances un mois, trois mois, six mois, un an et deux ans. La procédure de mise en œuvre de cette méthode, qualifiée de *cash-flow mapping*, est explicitée dans l'annexe de ce chapitre.

Les applications du modèle linéaire

Le modèle linéaire s'applique de manière naturelle aux portefeuilles ne contenant pas d'actifs dérivés, c'est-à-dire aux portefeuilles d'actions, d'obligations, de devises et de matières premières. Il est par ailleurs bon de remarquer que, pour le calcul de la VaR, toutes les valeurs sont exprimées en devise domestique. Si une banque française retient la valeur du Nikkei 225 et celles d'obligations d'État britanniques comme variables de marché, les deux seront exprimées en euros.

Les contrats forward sur devises sont des actifs dérivés mais ils peuvent être analysés dans le cadre du modèle linéaire. En effet, notons T l'échéance du contrat ; ce dernier peut être vu comme l'échange d'une obligation étrangère d'échéance T contre une obligation domestique de même échéance. Dans le calcul de la VaR, ce contrat est donc équivalent à une position longue sur l'obligation étrangère combinée à une position courte sur l'obligation domestique. De plus, comme nous l'avons montré précédemment, chaque obligation peut être transformée en utilisant le cash-flow mapping.

Considérons maintenant un swap de taux ; au chapitre 7, nous avons vu qu'un tel swap pouvait s'interpréter comme l'échange d'une obligation à taux variable contre une obligation à taux fixe. L'obligation à taux fixe est une obligation classique à coupons et l'obligation à taux variable cote le pair juste après chaque date de paiement. Le swap se réduit donc à un portefeuille d'obligations avec une position longue et une position courte. Il peut ainsi être traité par le modèle linéaire et le cash-flow mapping.

Modèle linéaire et options

Que se passe-t-il quand le portefeuille analysé comporte des options ? Imaginons un portefeuille contenant des options sur un sous-jacent unique coté S aujourd'hui, et notons δ le delta de la position[6] (voir chapitre 15).

Comme δ est le taux de variation de la valeur du portefeuille par rapport à S, on peut écrire, en première approximation :

$$\delta = \frac{\Delta P}{\Delta S}$$

ou encore :

$$\Delta P = \delta \Delta S \tag{18.3}$$

Si $\Delta S = S\Delta x$, on a :

$$\Delta P = \delta S \Delta x$$

Quand une position dépendant de plusieurs variables de marché contient des options, on obtient une relation linéaire approximative sous la forme :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} S_i \delta_i \Delta x_i \tag{18.4}$$

où S_i est la valeur de la i-ième variable de marché et δ_i est le delta du portefeuille par rapport à cette variable. Cette relation correspond à l'équation (18.1) :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i \tag{18.5}$$

où $\alpha_i = S_i \delta_i$. L'équation (18.2) peut alors être utilisée pour calculer l'écart-type de ΔP.

- **Exemple 18.1**

  Un portefeuille contient des options sur France Télécom (FTEL) et sur Renault (RNO), et ΔP désigne la variation de valeur de ce portefeuille. Les options sur France Télécom ont un delta global égal à 6 000 et les options sur Renault ont un delta global égal à 6 000. L'action France Télécom cote 20 € et l'action Renault vaut 100 €. L'équation (18.4) permet, en première approximation, d'écrire :

  $$\Delta P = 20 \times 6\,000 \Delta x_1 + 100 \times 6\,000 \Delta x_2$$

  ou encore :

  $$\Delta P = 120\,000 \Delta x_1 + 600\,000 \Delta x_2$$

6. Normalement le delta et le gamma d'un portefeuille sont notés avec des lettres grecques majuscules. Au cours de cette section, nous utilisons des minuscules pour éviter les confusions, Δ étant déjà utilisé à d'autres fins.

où Δx_1 et Δx_2 sont ici les rentabilités journalières des deux actions considérées. Dans ce contexte, le portefeuille d'options est considéré équivalent à un investissement de 120 000 € dans France Télécom et de 600 000 € dans Renault. La volatilité journalière est de 2 % pour FTEL et de 1 % pour RNO, et la corrélation entre les deux est 0,3. Dans ces conditions, l'écart-type de ΔP (en milliers d'euros) est donné par :

$$\sqrt{(120 \times 0{,}02)^2 + (600 \times 0{,}01)^2 + 2 \times 120 \times 0{,}02 \times 600 \times 0{,}01 \times 0{,}3} = 7{,}099$$

Si l'on souhaite ensuite calculer la VaR à 5 jours au seuil de 95 %, on obtient :

$$1{,}65 \times \sqrt{5} \times 7\ 099 = 26\ 193 \text{ €}$$

car la probabilité qu'une variable normale centrée-réduite soit inférieure à –1,65 est égale à 5 %.

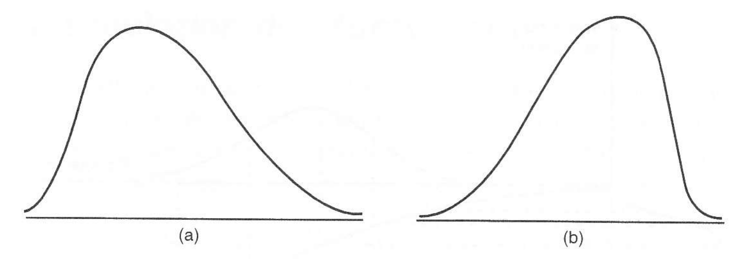
18.5 Le modèle quadratique

Quand un portefeuille comporte des options, le modèle linéaire est très approximatif. En particulier, il ne tient pas compte du gamma du portefeuille. Nous l'avons déjà mentionné au chapitre 15, le delta du portefeuille mesure le taux de variation du portefeuille par rapport à une variable de marché (le prix d'une action par exemple), et le gamma mesure le taux de variation du delta par rapport à cette même variable. Le gamma caractérise donc la courbure de la fonction qui lie la valeur du portefeuille à la valeur de la variable de marché considérée.

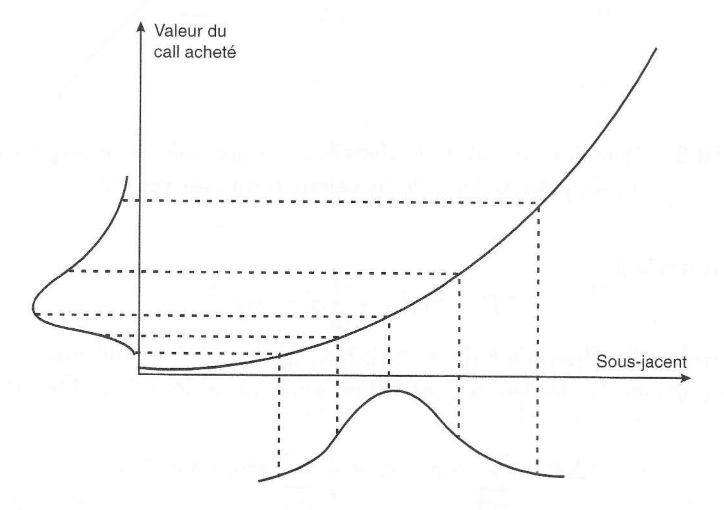
Le graphique 18.3 montre l'impact d'un gamma non nul sur la distribution de probabilité de la valeur du portefeuille. Quand le gamma est positif (négatif), cette distribution a une skewness positive (négative). Les graphiques 18.4 et 18.5 justifient cette remarque. Le graphique 18.4 montre l'évolution du prix d'un call en fonction du prix du support. L'achat de call est la position la plus simple ayant un gamma positif. Le graphique montre que si la loi du prix est log-normale, celle du prix du call a une skewness positive[7]. Le graphique 18.5, quant à lui, illustre la relation entre la valeur d'une position courte sur un call et la valeur du support. Cette position a un gamma négatif et l'on constate que la loi du prix du call a une skewness négative.

La VaR d'une position dépend de manière cruciale de la queue gauche de la distribution de probabilité de la valeur du portefeuille considéré. Par exemple, au seuil de 99 %, la VaR est définie comme la valeur V telle que Prob $(P < -V) = 0{,}01$. Comme on peut le voir dans les graphiques 18.3a et 18.4, un gamma positif est associé à une queue de distribution plus fine à gauche. En supposant que la loi est normale, la VaR calculée sera surévaluée. Dans les graphiques 18.3b et 18.5, le gamma est négatif et la queue de distribution est plus épaisse à gauche. Une approximation gaussienne aura tendance, dans ce cas, à sous-évaluer la VaR.

7. Comme nous l'avons déjà mentionné dans la note n° 4, la distribution log-normale est très proche de la distribution normale sur un horizon court.



Graphique 18.3 : Distribution de la valeur du portefeuille pour (a) gamma positif et (b) gamma négatif.



Graphique 18.4 : Transformation de la distribution normale pour le prix du support en la distribution de la valeur d'un call acheté.

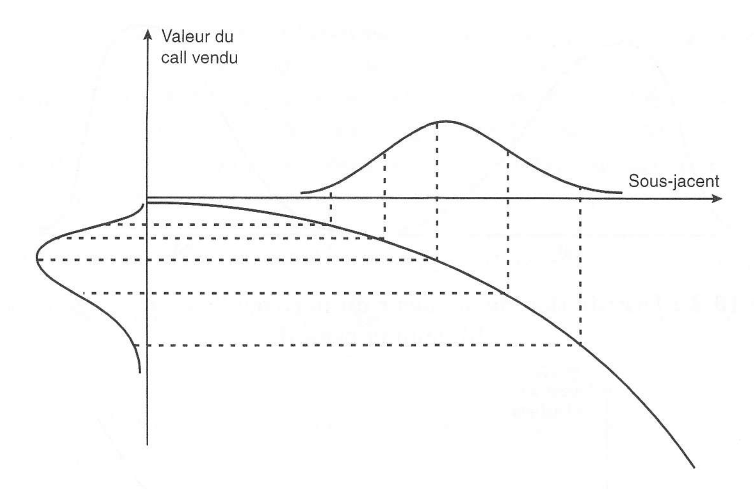
Pour améliorer l'estimation, on peut utiliser à la fois le delta et le gamma du portefeuille pour relier ΔP aux Δx_i. Considérons pour simplifier un portefeuille dépendant d'un seul actif dont le prix est noté S ; notons aussi δ et γ les delta et gamma du portefeuille. De l'annexe du chapitre 15 on déduit :

$$\Delta P = \delta \Delta S + \frac{1}{2}\gamma\,(\Delta S)^2$$

Il s'agit donc d'une amélioration par rapport à l'équation (18.3)[8]. En posant :

$$\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$$

8. Le développement en série de Taylor de l'annexe du chapitre 15 suggère l'approximation :
$\Delta P = \theta \Delta t + \delta \Delta S + \frac{1}{2}\gamma\,(\Delta S)^2$
quand les termes d'ordre supérieur à 1 par rapport à Δt sont négligés. En pratique, le terme $\theta \Delta t$ est très faible, il est donc négligé lui aussi.



Graphique 18.5 : Transformation de la distribution normale pour le prix du support en la distribution de la valeur d'un call vendu.

cette relation devient :

$$\Delta P = S\delta\Delta x + \frac{1}{2}S^2\gamma\left(\Delta x\right)^2 \tag{18.6}$$

Pour un portefeuille dépendant de n variables de marché, et où chaque instrument financier du portefeuille ne dépend que d'une seule variable, l'équation (18.6) s'écrit :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} S_i\delta_i\Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} S_i^2\gamma_i\left(\Delta x_i\right)^2$$

où S_i est la valeur de la i-ième variable de marché, δ_i et γ_i désignant les coefficients delta et gamma correspondant à cette variable. Quand les actifs composant le portefeuille peuvent dépendre simultanément de plusieurs variables de marché, cette équation prend la forme plus générale :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} S_i\delta_i\Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_iS_j\gamma_{ij}\Delta x_i\Delta x_j \tag{18.7}$$

où γ_{ij} est un gamma « croisé », c'est-à-dire :

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial^2 P}{\partial S_i \partial S_j}$$

L'équation (18.7) est moins simple à manipuler que l'équation (18.5), mais elle est utile pour calculer les moments de ΔP. Un résultat connu en statistique sous le nom de « développement de Cornish-Fisher » fournit une relation entre les moments d'une distribution et ses centiles[9].

9. Voir la note technique n° 10 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr) pour les détails du calcul des moments et l'utilisation du développement de Cornish-Fisher. Quand il y a une seule

18.6 La simulation de Monte Carlo

L'approche de construction de modèle (ou de variance-covariance) peut être une alternative aux méthodes décrites précédemment ; la distribution de probabilité de ΔP peut en effet être simulée par une méthode de Monte Carlo. Supposons que nous souhaitions calculer la VaR à un jour d'un portefeuille. La procédure se déroule ainsi :

1. Évaluer le portefeuille aujourd'hui avec les valeurs observées des variables de marché.
2. Tirer un échantillon de la loi jointe[10] des Δx_i.
3. Utiliser les valeurs obtenues en (2) pour calculer les valeurs de fin de journée des variables de marché.
4. Réévaluer le portefeuille en fin de journée avec ces nouvelles valeurs.
5. Soustraire de la valeur du portefeuille ainsi calculée la valeur calculée dans l'étape 1 pour disposer d'une simulation de ΔP.
6. Répéter les étapes 2 à 5 un grand nombre de fois pour estimer la distribution de probabilité de ΔP.

La VaR est ensuite calculée au seuil de confiance souhaité. Considérons un échantillon de 5 000 valeurs de ΔP, obtenu par la méthode décrite ci-dessus. La VaR à un jour au seuil de 99 % correspond à la 50e valeur la plus défavorable de ΔP ; de même, la VaR à 95 % correspond à la 250e valeur la plus défavorable, et ainsi de suite[11]. La VaR à N jours s'obtient ici encore en multipliant la VaR à un jour par $\sqrt{N}$[12].

L'inconvénient essentiel de la simulation de Monte Carlo est le temps de calcul nécessaire. Le portefeuille complet d'une banque peut contenir des centaines, voire des milliers de titres différents. Il doit être évalué de nombreuses fois dans le cadre de la simulation[13]. Un moyen d'accélérer les calculs consiste à considérer que l'équation (18.7) décrit la relation entre ΔP et les Δx_i. On peut alors passer de l'étape 2 à l'étape 5 directement et éviter une réévaluation complète du portefeuille à chaque étape. Cette méthode est parfois appelée « simulation partielle ».

---

variable sous-jacente, on a $E(\Delta P) = 0{,}5S^2\gamma\sigma^2; E(\Delta P^2) = S^2\delta^2\sigma^2 + 0{,}75S^4\gamma^2\sigma^4$ et $E(\Delta P^3) = 4{,}5S^4\delta^2\gamma\sigma^4 + 1{,}875S^6\gamma^3\sigma^6$ où S est la valeur de la variable sous-jacente et σ la volatilité journalière. L'exemple E du développeur d'applications de DerivaGem met en œuvre ce développement de Cornish-Fisher.

10. Une façon de réaliser ce tirage est décrite au chapitre 17.

11. Comme dans le cas de la simulation historique, la théorie des valeurs extrêmes permet de lisser les queues de distribution pour mieux estimer les centiles extrêmes de la loi de ΔP.

12. Ceci n'est vrai que de manière approchée quand le portefeuille contient des options, mais c'est l'hypothèse faite habituellement par les praticiens.

13. Jamshidian et Zhu proposent une méthode permettant de réduire le nombre d'évaluations du portefeuille ; voir F. Jamshidian et Y. Zhu, « Scenario Simulation Model : Theory and Methodology », *Finance and Stochastics*, 1 (1997), 43-67.

18.7 Comparaison des différentes approches

Nous avons abordé deux méthodes de calcul de la VaR : la simulation historique et l'approche variance-covariance. Les avantages de cette dernière résident dans la rapidité d'obtention des résultats et dans la possibilité de mettre à jour les structures de volatilité. L'inconvénient principal est l'hypothèse de normalité du vecteur des variables de marché. En pratique, les variations journalières des variables de marché ne suivent pas une loi normale (voir tableau 16.1). Enfin, cette méthode ne donne pas de bons résultats pour des portefeuilles à faible delta (voir problème 18.21).

La simulation historique a l'avantage d'estimer la distribution jointe des variables de marché à partir des observations passées. Elle évite aussi le recours au cash-flow mapping (voir problème 18.2). À l'inverse, cette méthode nécessite de longs calculs et ne permet pas de faire varier facilement la structure des volatilités[14].

18.8 Stress tests et vérifications ex post

Au-delà des calculs de VaR, de nombreuses entreprises mettent en œuvre des stress tests, c'est-à-dire des tests analysant les conséquences de variations extrêmes des variables de marché. Par exemple, sur un portefeuille d'actions, on inclura dans les variations possibles celles qui ont été observées sur les indices le 19 octobre 1987. Sur le marché des taux britanniques, on pourrait inclure les variations du 10 avril 1992, date à laquelle les taux actuariels à 10 ans ont varié de 7,7 écarts-types.

Ces tests ont pour objet la prise en compte d'événements extrêmes qui sont virtuellement impossibles à observer sur les distributions de probabilité usuelles, mais qui arrivent pourtant de temps à autre sur les marchés. Par exemple, sous l'hypothèse de loi normale, une variation de cinq écarts-types devrait être observée en moyenne tous les 7 000 ans sur des données quotidiennes. En pratique, de telles variations surviennent une à deux fois par décennie !

Quelle que soit la méthode retenue pour calculer la VaR, il est important d'opérer des vérifications *a posteriori* (*back-testing*). Elles consistent à s'assurer que les estimations de VaR ne sont pas trop fréquemment dépassées. Dans le cadre d'une VaR à un jour au seuil de 99 %, il faut vérifier que la VaR calculée n'est pas dépassée dans plus de 1 % des cas. Si des dépassements surviennent, par exemple, sept jours sur cent, c'est le signe que la méthodologie et/ou les hypothèses retenues sont inadaptées.

---

14. Pour une adaptation de la méthode de simulation historique permettant d'intégrer une mise à jour de la volatilité, voir J. C. Hull et A. White, « Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk », *Journal of Risk*, 1, n° 1 (1998), 5-19.

18.9 L'analyse en composantes principales (ACP)

Une des approches permettant de tenir compte de corrélations non négligeables entre variables de marché est l'analyse en composantes principales. Lorsque de nombreuses variables (les taux d'intérêt par exemple) sont corrélées, il est plus intéressant de construire, par combinaison linéaire des variables initiales, un faible nombre de variables non corrélées qui pourront servir de variables de marché dans le calcul de la VaR. Il s'agit donc de synthétiser l'information contenue dans l'ensemble des (nombreuses) variables initiales corrélées entre elles.

Pour illustrer brièvement cette méthode, considérons un ensemble de taux d'État de maturités variant de trois mois à trente ans. Les tableaux 18.3 et 18.4 donnent les résultats obtenus par Frye sur 1 548 observations journalières de ces taux entre 1989 et 1995[15].

La première colonne du tableau 18.3 indique les maturités considérées. Les dix colonnes suivantes donnent les corrélations (appelées aussi saturations, mais plus couramment *loadings*) entre les différentes variables de marché et les facteurs, c'est-à-dire les variables synthétiques construites par l'ACP, notées F1 à F10, de façon à résumer l'information contenue dans le tableau de données initial.

Tableau 18.3 : Loadings pour les taux US

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
3 m	0,21	–0,57	0,50	0,47	–0,39	–0,02	0,01	0,00	0,01	0,00
6 m	0,26	–0,49	0,23	–0,37	0,70	0,01	–0,04	–0,02	–0,01	0,00
12 m	0,32	–0,32	–0,37	–0,58	–0,52	–0,23	–0,04	–0,05	0,00	0,01
2 ans	0,35	–0,10	–0,38	0,17	0,04	0,59	0,56	0,12	–0,12	–0,05
3 ans	0,36	0,02	–0,30	0,27	0,07	0,24	–0,79	0,00	–0,09	–0,00
4 ans	0,36	0,14	–0,12	0,25	0,16	–0,63	0,15	0,55	–0,14	–0,08
5 ans	0,36	0,17	–0,04	0,14	0,08	–0,10	0,09	–0,26	0,71	0,48
7 ans	0,34	0,27	0,15	0,01	0,00	–0,12	0,13	–0,54	0,00	–0,68
10 ans	0,31	0,30	0,28	–0,10	–0,06	0,01	0,03	–0,23	–0,63	0,52
30 ans	0,25	0,33	0,46	–0,34	–0,18	0,33	–0,09	0,52	0,26	–0,13

On constate que les loadings sur le premier facteur sont tous positifs ; cela signifie qu'une variation positive de ce facteur implique une hausse de tous les taux considérés. Si les taux sont mesurés en points de base, une augmentation d'une unité du premier facteur entraîne une hausse de 0,21 point de base du taux à trois mois. Le second facteur a une interprétation différente. Les loadings des taux de court et moyen terme (jusqu'à deux ans) sont négatifs alors qu'ils deviennent positifs pour les maturités plus longues. Par conséquent, une augmentation de ce facteur entraîne une baisse des

15. Voir J. Frye, « Principals of Risk : Finding VaR through Factor Based Interest Rate Scenarios », *VaR : Understanding and Applying Value-at-Risk*, RISK Publications, London, 1997, 275-88.

taux courts et une hausse des taux longs, c'est-à-dire un accroissement de la pente de la courbe des taux. De ce fait, le deuxième facteur est appelé facteur de pente alors que le premier est appelé facteur de niveau. Quant au troisième facteur, les loadings sont positifs pour les taux courts et longs, et négatifs pour les taux de maturité moyenne. Ce troisième facteur caractérise la courbure de la structure par termes des taux d'intérêt[16]. Dans l'exemple traité ici, il y a dix facteurs et dix variables ; les variations de taux s'expriment donc parfaitement comme des combinaisons linéaires de ces dix facteurs. Il suffit de résoudre dix équations à dix inconnues. Cependant, nous n'avons rien gagné si dix facteurs sont conservés. Il faut donc mesurer leur capacité à restituer la dispersion des taux et garder ceux dont le pouvoir de restitution est le plus élevé.

Pour comprendre de quoi il s'agit, supposez que vous souhaitiez donner rendez-vous à un ami sur les Champs-Élysées. Cette avenue peut être vue comme un rectangle (c'est-à-dire un morceau de plan) dont la longueur est beaucoup plus grande que la largeur. Pour être précis sur le lieu du rendez-vous, il faudrait spécifier deux coordonnées, l'une sur la longueur (à 300 mètres de l'Arc de Triomphe) et l'autre sur la largeur (à 3 mètres des façades situées à gauche en descendant l'avenue). Il est évident que la deuxième information est de peu d'utilité par rapport à la première. On peut résumer le lieu de rendez-vous à la distance par rapport à l'Arc de Triomphe en ayant sacrifié peu d'informations tout en ayant économisé une donnée.

C'est ce que fait l'analyse en composantes principales. Les 1 548 observations des variations de 10 taux d'intérêt peuvent être vues comme un nuage de points dans un espace à 10 dimensions. Le premier axe factoriel correspondra à la direction d'allongement maximal de ce nuage. Le deuxième sera, parmi les axes orthogonaux (non corrélés) au premier, celui qui traduit la dispersion maximale du nuage le long de cet axe, et ainsi de suite.

On appelle composantes principales les variables obtenues par combinaison linéaire des variables initiales selon le principe que nous venons de décrire. L'écart-type (ou la variance) de chaque composante principale mesure son importance en termes de restitution de l'information contenue dans les données initiales. Les résultats pour les dix facteurs, en points de base, apparaissent dans le tableau 18.4.

Tableau 18.4 : Écart-type des composantes principales

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
17,49	6,05	3,10	2,17	1,97	1,69	1,27	1,24	0,80	0,79

Par exemple, une variation sur la première composante principale d'un écart-type entraîne une variation du taux à trois mois égale à $17{,}49 \times 0{,}21 = 3{,}67$ points de base, et du taux à six mois de $17{,}49 \times 0{,}26 = 4{,}55$ points de base, et ainsi de suite.

16. Pour chaque facteur, la somme des carrés des loadings est égale à 1.

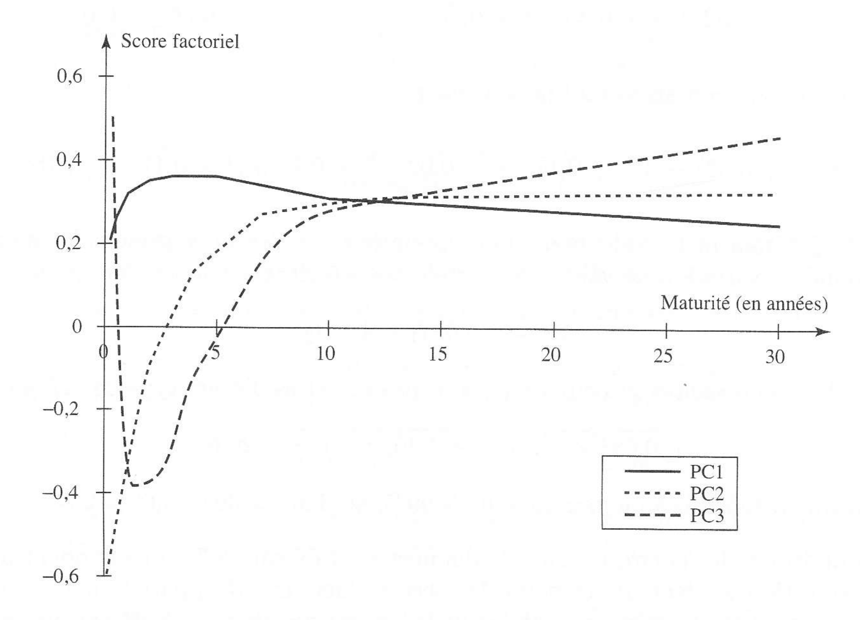
Les détails de la détermination des axes factoriels ne sont pas précisés ici. Mentionnons simplement que les variances des composantes principales (qui ne sont pas corrélées par construction) sont égales aux valeurs propres de la matrice de variance-covariance des variables initiales, et que la somme de ces variances est égale à la somme des variances des variables de marché (cette somme est appelée inertie). Dans notre exemple, l'inertie du nuage de points représentant les variations de taux est donnée par :

$$17{,}49^2 + 6{,}05^2 + \ldots\ldots + 0{,}79^2 = 367{,}9$$

Par conséquent, le pourcentage d'inertie expliqué par le premier axe est égal à :

$$\frac{17{,}49^2}{367{,}9} = 83{,}1\ \%$$

De même, les deux premiers axes expliquent $\frac{17{,}49^2+6{,}05^2}{367{,}9} = 93{,}1\%$ de l'inertie, et le troisième axe environ 2,8 %. Ces calculs montrent que trois facteurs, voire deux, sont suffisants pour rendre compte de l'information contenue dans les variations des 10 taux d'intérêt. Par conséquent, l'évaluation du risque d'une position sensible à l'évolution des taux ne nécessite pas forcément la prise en compte de toutes les maturités mais simplement celle des trois facteurs les plus significatifs. Le graphique 18.6 représente les données du tableau 18.3 pour les trois premiers axes factoriels[17].



Graphique 18.6 : Les trois facteurs les plus importants régissant la courbe des taux.

17. Des résultats analogues à ceux décrits ici peuvent être obtenus sur n'importe quelle courbe de taux dans n'importe quel pays, du moins en ce qui concerne les trois premiers axes, essentiels pour l'explication des mouvements de taux.

L'utilisation de l'ACP pour le calcul de la VaR

Supposons que nous souhaitions calculer la VaR pour le portefeuille dont l'exposition au risque de taux est décrite dans le tableau 18.5.

Tableau 18.5 : Variation de valeur du portefeuille (en millions d'euros) pour une hausse d'un point de base du taux

Taux 1 an	Taux 2 ans	Taux 3 ans	Taux 4 ans	Taux 5 ans
+10	+4	–8	–7	+2

Un changement d'un point de base dans le taux d'intérêt à un an entraîne une hausse de 10 millions d'euros de la valeur du portefeuille ; la même hausse du taux à deux ans entraîne une augmentation de 4 millions, et ainsi de suite. Les deux premiers facteurs de l'ACP sont utilisés ici pour modéliser les variations de taux (plus de 90 % des variations de taux sont expliquées par ces deux facteurs). En utilisant les données du tableau 18.3, l'exposition au premier facteur s'écrit :

$$10 \times 0{,}32 + 4 \times 0{,}35 - 8 \times 0{,}36 - 7 \times 0{,}36 + 2 \times 0{,}36 = -0{,}08$$

alors que l'exposition au second facteur vaut :

$$10 \times (-0{,}32) + 4 \times (-0{,}1) - 8 \times 0{,}02 - 7 \times 0{,}14 + 2 \times 0{,}17 = -4{,}40$$

Si f_1 et f_2 désignent les valeurs des deux premières composantes principales pour un jour donné, la variation de valeur du portefeuille s'écrit, pour le jour en question :

$$\Delta P = -0{,}08 f_1 - 4{,}40 f_2$$

Comme les composantes principales ne sont pas corrélées, l'écart-type de ΔP s'écrit :

$$\sqrt{0{,}08^2 \times (17{,}49)^2 + 4{,}40^2 \times 6{,}05^2} = 26{,}66$$

La VaR du portefeuille à un jour au seuil de 99 % est donc égale à $26{,}66 \times 2{,}33 = 62{,}12$.

Il est important de remarquer que les données du tableau 18.5 correspondent à une forte exposition au facteur de pente (le second facteur). Il apparaît que si seul le premier facteur était utilisé, caractérisant le niveau des taux, la VaR calculée serait largement sous-évaluée (voir problème 18.13). La méthode de duration, mentionnée à la section 18.4, sous-évaluerait de même la VaR, du fait de l'hypothèse implicite d'un déplacement parallèle de la courbe des taux dans cette approche, correspondant à peu de chose près à l'exposition au premier facteur de l'ACP.

L'ACP peut, en théorie, être utilisée pour d'autres variables de marché que les taux d'intérêt. Considérons par exemple une banque dont le portefeuille est exposé au risque

d'évolution de plusieurs indices. Une analyse en composantes principales peut alors servir à déterminer un nombre réduit de facteurs gouvernant l'évolution de l'ensemble des indices considérés. L'efficacité de cette méthode dépend en fait des corrélations entre les variations des divers indices.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, la VaR est habituellement calculée en reliant les changements de valeur d'un portefeuille aux variations de variables de marché (les Δx_i) exprimées en pourcentage. De ce fait, l'ACP est le plus souvent réalisée sur ces variations en pourcentage (rentabilités d'indices par exemple) plutôt que sur les variations absolues.

Résumé

L'objectif d'un calcul de VaR est de pouvoir assurer qu'au seuil de $X\,\%$, la perte sur un portefeuille ne dépassera pas un montant V dans les N prochains jours. La variable V est la VaR, X est le seuil de confiance et N est l'horizon temporel.

La première approche de la VaR est fondée sur la simulation historique. Elle suppose la constitution d'une base de données regroupant les variations passées des variables de marché sur une période suffisamment longue. La simulation consiste alors à considérer que le premier tirage correspond à la première variation des variables présentes dans la base ; le deuxième tirage correspond à la deuxième variation, et ainsi de suite. Pour chaque tirage, la variation de valeur du portefeuille est calculée. La VaR est évaluée comme le centile approprié de la distribution obtenue pour ΔP.

Une approche alternative est la méthode de variance-covariance, ou méthode de construction de modèle. Elle est très simple si deux hypothèses sont posées :

1. Les variations de valeur du portefeuille (en pourcentage) varient linéairement avec les variations (en pourcentage) des variables de marché.
2. Les variations en pourcentage des variables de marché sont gaussiennes.

Sous ces hypothèses, la variation de valeur du portefeuille peut aussi être supposée gaussienne. Des formules analytiques relient alors l'écart-type de ΔP à la matrice de variance-covariance des variables de marché. La VaR se déduit donc presque immédiatement de la lecture d'une table statistique de loi normale.

Quand un portefeuille contient des options, ΔP n'est pas une fonction linéaire des variables de marché. En connaissant le gamma du portefeuille, on peut toutefois obtenir une approximation quadratique, et la VaR peut alors être estimée soit par une simulation de Monte Carlo, soit par le développement de Cornish-Fisher.

Au chapitre suivant, nous verrons comment volatilités et corrélations peuvent être estimées dans le cadre de l'approche variance-covariance.

Références complémentaires

ARTZNER P., F. DELBAEN, J. M. EBER et D. HEATH, « Coherent Measures of Risk », *Mathematical Finance*, 9 (1999), 203-28.

BASAK S. et A. SHAPIRO, « Value-at-Risk-Based Risk Management : Optimal Policies and Asset Prices », *Review of Financial Studies*, 14, 2 (2001), 371-405.

BEDER T., « VaR : Seductive but Dangerous », *Financial Analysts Journal*, 51, 5 (1995), 12-24.

BOUDOUKH J., M. RICHARDSON et R. WHITELAW, « The Best of Both Worlds », *RISK*, mai 1998, 64-67.

DOWD K., *Beyond Value at Risk : The New Science of Risk Management*, Wiley, New York, 1998.

DUFFIE D. et J. PAN, « An Overview of Value at Risk », *Journal of Derivatives*, 4, n° 3 (printemps 1997), 7-49.

EMBRECHTS P., C. KLUPPELBERG et T. MIKOSCH, *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, New York, 1997.

FRYE J., « Principals of Risk : Finding VAR through Factor-Based Interest Rate Scenarios », *VAR : Understanding and Applying Value at Risk*, RISK Publications, London, 1997, 275-88.

HENDRICKS D., « Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data », *Economic Policy Review*, Federal Reserve Bank of New York, 2 (avril 1996), 39-69.

HOPPER G., « Value at Risk : A New Methodology for Measuring Portfolio Risk », *Business Review*, Federal Reserve Bank of Philadelphia, juillet/août 1996, 19-29.

HUA P. et P. WILMOTT, « Crash Courses », *RISK*, juin 1997, 64-67.

HULL J. C. et A. WHITE, « Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk », *Journal of Risk*, 1, n° 1 (1998), 5-19.

HULL J. C. et A. WHITE, « Value at Risk When Daily Changes in Market Variables Are Not Normally Distributed », *Journal of Derivatives*, 5 (printemps 1998), 9-19.

JACKSON P., D. J. MAUDE et W. PERRAUDIN, « Bank Capital and Value at Risk », *Journal of Derivatives*, 4, n° 3 (printemps 1997), 73-90.

JAMSHIDIAN F. et Y. ZHU, « Scenario Simulation Model, Theory and Methodology », *Finance and Stochastics*, 1 (1997), 43-67.

JORION P., *Value at Risk*, 2nd ed., McGraw Hill, 2001.

LONGIN F., « Beyond the VaR », *Journal of Derivatives*, 8, 4 (été 2001), 36-48.

MARSHALL C. et M. SIEGEL, « Value at Risk : Implementing a risk measurement Standard », *Journal of Derivatives*, 4, 3 (printemps 1997), 91-111.

MCNEIL A. J., « Extreme Value Theory for Risk Managers », dans *Internal Modeling and CAD II*, London, Risk Books, 1999. Voir aussi www.math.ethz.ch/~mcneil.

NEFTCI S. N., « Value at Risk Calculations, Extreme Events and Tails Estimation », *Journal of Derivatives*, 7, 3 (printemps 2000), 23-28.

RICH D., « Second Generation VaR and Risk-Adjusted Return on Capital », *Journal of Derivatives*, 10, 4 (été 2003), 51-61.

Problèmes et exercices

18.1 Considérons un portefeuille constitué de 100 000 € investis dans l'actif A et 100 000 € dans l'actif B. Les volatilités journalières de A et B sont égales à 1 %, et le coefficient de corrélation entre les deux est de 0,3. Quelle est la VaR à 5 jours au seuil de 99 % de ce portefeuille ?

18.2 Décrivez trois méthodes pour modéliser le comportement des instruments dépendant des taux d'intérêt quand l'approche de construction de modèle est retenue pour le calcul de la VaR. Comment feriez-vous pour traiter ces mêmes instruments dans la méthode de simulation historique ?

18.3 Une banque américaine possède un portefeuille d'options sur la livre sterling (GBP). Le delta du portefeuille est de 56 alors que le taux de change est 1,5000 USD/GBP. Donnez une approximation linéaire de la relation entre les variations de valeur du portefeuille et les variations (en pourcentage) du taux de change. Si la volatilité journalière du taux de change est de 0,7 %, quelle est la VaR à 10 jours du portefeuille au seuil de 99 % ?

18.4 On suppose que le gamma du portefeuille de l'exercice précédent est 16,2. En quoi cette information modifie-t-elle votre estimation de la relation entre variation de valeur du portefeuille et variation en pourcentage du taux de change ?

18.5 Supposons que la variation journalière de valeur d'un portefeuille dépende linéairement de deux facteurs, déduits d'une ACP. Les deltas du portefeuille par rapport à chacun de ces facteurs sont respectivement 6 et –4. Les écarts-types des facteurs sont 20 et 8. Quelle est la VaR à 5 jours du portefeuille au seuil de 90 % ?

18.6 Le portefeuille d'une entreprise comporte des actions, des obligations, des devises et des matières premières, mais pas d'actifs dérivés. Quelles sont les hypothèses sous-jacentes au (a) modèle linéaire (b) modèle fondé sur la simulation historique pour le calcul de la VaR ?

18.7 Pour le calcul de la VaR, expliquez comment un swap de taux peut être assimilé à un portefeuille d'obligations zéro-coupon aux maturités bien choisies.

18.8 Expliquez la différence entre VaR et C–VaR.

18.9 Expliquez pourquoi le modèle linéaire ne peut donner que des résultats approximatifs dans le calcul de la VaR lorsque le portefeuille considéré contient des options.

18.10 Dans l'exemple de l'annexe de ce chapitre, vérifiez que le ZC de maturité 0,3 an est équivalent à 37 397 € de nominal d'une obligation à 3 mois, et 11 793 € de nominal d'une obligation à 6 mois.

18.11 Les taux à 5 et 7 ans sont respectivement 6 % et 7 % en composition annuelle. Les volatilités journalières des ZC pour ces deux maturités sont 0,5 % et 0,58 %. La corrélation des rentabilités journalières de ces deux ZC est 0,6. Quel est le portefeuille, composé de ces deux obligations, équivalent à un flux de 1 000 € à recevoir dans 6,5 ans ?

18.12 Il y a quelques mois, une entreprise a conclu un contrat forward à 6 mois l'engageant à acheter 1 million de GBP contre paiement de 1,5 million d'USD. Les volatilités journalières des ZC à 6 mois en GBP (mais exprimés en USD) et des ZC à 6 mois en USD sont respectivement 0,06 % et 0,05 %. La corrélation des rentabilités de ces deux titres est de 0,8 et le taux de change aujourd'hui est à 1,53 USD/GBP. Quel est l'écart-type de la variation journalière (en USD) du contrat forward ? Quelle est la VaR à 10 jours au seuil de 99 % du contrat ? Les taux à 6 mois, en composition annuelle, sont supposés égaux à 5 % dans les deux pays.

18.13 Dans l'exemple du calcul de VaR effectué avec les données du tableau 18.5, quels seraient les changements si on considérait (a) un seul facteur et (b) trois facteurs ?

18.14 Une banque détient un portefeuille d'options sur un actif sous-jacent. Le delta des options est –30 et le gamma est –5. Quelle est l'interprétation de ces deux nombres ? Le sous-jacent est coté 20 et sa volatilité journalière est 1 %. En adaptant l'application E du développeur de DerivaGem, calculez la VaR à 1 jour au seuil de 99 %.

18.15 Dans le problème 18.14, supposez que le vega du portefeuille soit égal à –2 pour chaque hausse de 1 % de la volatilité journalière. Construisez un modèle reliant la variation journalière de valeur du portefeuille à delta, gamma, vega. Expliquez, sans entrer dans le détail des calculs, comment vous utiliseriez ce modèle dans un calcul de VaR.

Questions complémentaires

18.16 Une entreprise a un portefeuille d'obligations valant 6 millions d'euros, dont la duration modifiée est de 5,2 ans. Seuls des déplacements parallèles de la courbe des taux sont envisagés. La volatilité journalière du taux actuariel est 0,09 %. Utilisez la duration pour estimer la VaR à 20 jours au seuil de 90 % du portefeuille. Expliquez précisément les faiblesses de cette approche dans le cadre du calcul de VaR. Indiquez deux approches alternatives qui amélioreraient les résultats.

18.17 Un portefeuille comporte 300 000 € investis en or et 500 000 € investis en argent ; les volatilités journalières de ces deux actifs sont 1,8 % et 1,2 %, et la corrélation entre les deux 0,6. Quelle est la VaR du portefeuille à 10 jours au seuil de 97,5 % ? De combien la diversification réduit-elle la VaR ?

18.18 Considérons un portefeuille d'options sur un actif sous-jacent ; le delta du portefeuille est 12, le sous-jacent vaut 10 € ; sa volatilité journalière est 2 %. Quelle est la VaR à 1 jour du portefeuille au seuil de 95 % ? Le

gamma du portefeuille est égal à –2,6. Donnez une relation quadratique entre les variations journalières du portefeuille et du sous-jacent. Comment utiliseriez-vous cette relation dans une simulation de Monte Carlo ?

18.19 Une entreprise possède un portefeuille consistant en une position longue sur une obligation à 2 ans, une position longue sur une obligation à 3 ans et une position courte sur une obligation à 5 ans. Chaque obligation a un nominal de 100 € et un taux de coupon de 5 %. Évaluez l'exposition au risque par rapport à chacun des taux ZC des maturités 1 à 5 ans. Utilisez les données des tableaux 18.3 et 18.4 pour calculer la VaR à 20 jours au seuil de 95 % sous l'hypothèse que les variations de taux sont expliquées par (a) un facteur (b), deux facteurs, et (c) trois facteurs. La courbe des taux ZC est supposée plate à 5 %.

18.20 Une banque a vendu un call sur une action A et un put sur une autre action B. L'action A cote 50 €, le prix d'exercice du call est 51 €, la volatilité annuelle 28 % et la maturité de l'option 9 mois. Les données correspondantes pour le put sont un prix du sous-jacent B de 20 €, un prix d'exercice à 19 €, une volatilité annuelle de 25 % et une maturité d'un an. Ces actions ne paient pas de dividendes pendant la durée de vie des options, et le taux sans risque est de 6 % par an. La corrélation des rentabilités est 0,4. Calculez la VaR à 10 jours au seuil de 99 % dans les conditions suivantes :

a. En utilisant seulement le delta.

b. En utilisant delta, gamma, et les deux premiers moments de la distribution des variations de valeur du portefeuille.

c. Mêmes éléments qu'au point (b) plus le troisième moment.

18.21 Les gérants de portefeuille considèrent souvent que l'approche variance-covariance ne fonctionne pas bien quand le portefeuille a un delta proche de zéro. En utilisant l'application E du développeur d'applications de DerivaGem, testez le cas d'un portefeuille dont le delta est proche de 0. Vous pouvez par exemple choisir un portefeuille d'options de façon que le delta global de la position soit nul. Expliquez les résultats obtenus.

Annexe

Procédure d'ajustement des flux (cash-flow mapping)

Cette annexe est consacrée à la description d'une procédure permettant de transformer un ou plusieurs flux en un ensemble de flux de maturités usuelles. Considérons, pour ce faire, l'exemple d'une position longue sur une obligation d'État dont le principal est de 1 million d'euros et la maturité de 0,8 an. Cette obligation paie des coupons semestriels au taux de 10 % par an. En d'autres termes, cette position engendre un flux de 50 000 € dans 0,3 an et un flux de 1 050 000 € dans 0,8 an. Elle est donc équivalente à un portefeuille contenant 50 000 zéro-coupon d'échéance 0,3 an et 1 050 000 zéro-coupon d'échéance 0,8 an. La première composante du portefeuille est transformée en une position équivalente en zéro-coupon à 3 et 6 mois. De même, la seconde composante est transformée en une position équivalente en zéro-coupon à 6 et 12 mois. Pour le calcul de la VaR, la détention de l'obligation initiale peut être analysée comme un portefeuille de zéro-coupon d'échéances 3, 6 et 12 mois.

La technique de calcul

Considérons tout d'abord les 1 050 000 zéro-coupon à 0,8 an et supposons que les taux zéro-coupon, les volatilités journalières et les corrélations des rentabilités des zéro-coupon soient donnés par le tableau 18.6. La première étape consiste à interpoler entre les taux à 6 mois (6 %) et à 1 an (7 %) pour obtenir un taux à 0,8 an égal à 6,6 % (les taux sont supposés composés annuellement). La valeur actuelle de 1 050 000 € à recevoir dans 0,8 an est donc :

$$\frac{1\,050\,000}{1{,}066^{0{,}8}} = 997\,662$$

Le même type d'interpolation sur la volatilité (0,1 % à 6 mois et 0,2 % à 1 an) conduit à 0,16 % de volatilité pour le zéro-coupon à 0,8 an.

Tableau 18.6 : Données pour l'ajustement des flux

Maturité	**3 mois**	**6 mois**	**1 an**
Taux ZC (en %)	5,50	6,00	7,00
Volatilité de l'obligation (en % par jour)	0,06	0,10	0,20
Corrélations des rentabilités journalières	**3 mois**	**6 mois**	**1 an**
3 mois	1,0	0,9	0,6
6 mois	0,9	1,0	0,7
1 an	0,6	0,7	1,0

Considérons donc un portefeuille de 997 662 € investis en proportion α dans le ZC à six mois et en proportion $(1 - \alpha)$ dans le ZC à un an. En utilisant l'équation (18.2) et en faisant correspondre les variances, on obtient l'équation :

$$0{,}0016^2 = 0{,}001^2\alpha^2 + 0{,}002^2(1-\alpha)^2 + 2 \times 0{,}7 \times 0{,}001 \times 0{,}002\alpha(1-\alpha)$$

Il s'agit d'une équation du second degré qui peut être résolue selon la méthode usuelle ; la solution est $\alpha = 0{,}320337$, soit 32,0337 % des 997 662 € investis dans le ZC à 6 mois et donc 67,9663 % de cette somme investis dans le ZC à 1 an. L'obligation à 0,8 an est ainsi équivalente à 319 589 € investis dans le ZC à 6 mois et 678 074 € investis dans le ZC à 1 an. L'intérêt de cette méthode est de faire correspondre à la fois la valeur actuelle des flux et la volatilité. On peut aussi montrer que les poids affectés aux deux ZC permettant de construire le portefeuille équivalent sont positifs.

Concernant le flux de 50 000 € d'échéance 0,3 an, l'application de la même technique (voir problème 18.10) donne une valeur actuelle du flux égale à 49 189 €. Le portefeuille équivalent consiste à investir 37 397 € en ZC à 3 mois et 11 793 € en ZC à 6 mois.

Tableau 18.7 : Cash-flows ajustés

	50 000 € à recevoir dans 0,3 an	**1 050 000 € à recevoir dans 0,8 an**	**Total**
Position en ZC 3 mois	37,397		37,397
Position en ZC 6 mois	11,793	319,589	331,382
Position en ZC 1 an		678,074	678,074

Les résultats sont résumés dans le tableau 18.7. En fin de compte, l'obligation à coupons de maturité 0,8 an est équivalente à un portefeuille de 37 397 € investis en ZC à 3 mois, 331 382 € en ZC à 6 mois et 678 074 € en ZC à 1 an. Avec les informations du tableau 18.6, l'équation (18.2) donne la variance des variations de prix de l'obligation à coupons en posant $n = 3$; $\alpha_1 = 37\ 937$; $\alpha_2 = 331\ 382$; $\alpha_3 = 678\ 074$; $\sigma_1 = 0{,}0006$; $\sigma_2 = 0{,}001$; $\sigma_3 = 0{,}002$; $\rho_{12} = 0{,}9$; $\rho_{13} = 0{,}6$ et $\rho_{23} = 0{,}7$. On obtient une variance égale à 2 628 518, ce qui correspond à un écart-type de $\sqrt{2\ 628\ 518} = 1\ 621{,}3$. Comme cette obligation est l'unique actif du portefeuille, la VaR à 10 jours au seuil de 99 % est égale à :

$$1\ 621{,}3 \times \sqrt{10} \times 2{,}33 = 11\ 946$$

soit environ 11 950 €.

Chapitre 19

L'estimation des volatilités et des corrélations

Ce chapitre est consacré aux méthodes d'estimation des niveaux actuels et anticipés des volatilités et corrélations. Il est donc utile, à la fois pour les calculs de Valeur-à-Risque (VaR) dans le cadre de l'approche variance-covariance et pour l'évaluation des produits dérivés. Pour le calcul de la VaR, ce sont plutôt les niveaux actuels des volatilités et corrélations qui importent puisque, dans ce contexte, il s'agit de déterminer les variations possibles de la valeur d'un portefeuille sur une très courte période. L'évaluation des produits dérivés, quant à elle, nécessite plutôt le recours à des volatilités et corrélations anticipées pour la durée de vie des contrats à évaluer.

Ce chapitre est consacré à la présentation de modèles portant les noms impressionnants de moyenne mobile à pondération exponentielle (*Exponentially Weighted Moving Average*, EWMA), hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, ARCH) et hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive généralisée (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, GARCH). Ces modèles n'imposent pas la constance de la volatilité ou des corrélations, et c'est là leur caractéristique distinctive. Les volatilités et corrélations d'un actif particulier peuvent en effet être tantôt faibles sur certaines périodes et tantôt élevées sur d'autres. Ces modèles constituent autant de tentatives de mesure de ces variations temporelles de la volatilité et des corrélations.

19.1 L'estimation de la volatilité

Notons σ_n la volatilité d'une variable de marché pour la journée n, estimée à la fin de la journée $n-1$. Le carré de la volatilité pour la journée n, σ_n^2, est le *taux de variance*. Nous avons présenté l'approche standard d'estimation de σ_n à partir de données historiques à la section 13.4. Notons S_i la valeur de la variable de marché à la fin de la journée i. La variable u_i est définie comme la rentabilité composée en

continu du jour i (entre la fin de la journée $i-1$ et la fin de la journée i) :

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Une estimation sans biais du taux de variance quotidien, σ_n^2, à partir des m observations les plus récentes, est donnée par :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i}-\bar{u})^2 \qquad (19.1)$$

où $\bar{u}$ est la moyenne des u_i :

$$\bar{u} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-i}$$

Dans l'optique du calcul de la VaR, la formule de l'équation (19.1) est généralement modifiée de la sorte :

1. u_i est défini[1] comme le pourcentage de variation de la variable de marché entre la fin de la journée $i-1$ et la fin de la journée i :

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} \qquad (19.2)$$

2. $\bar{u}$ est supposé nul[2].
3. $m-1$ est remplacé par m.[3]

Ces trois modifications, tout en n'engendrant que de faibles écarts dans les estimations de variance, permettent de simplifier la formule du taux de variance ainsi :

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m} u_{n-i}^2 \qquad (19.3)$$

les u_i étant donnés par l'équation (19.2)[4].

---

1. Cette modification est cohérente avec la définition de la volatilité présentée pour les calculs de la VaR à la section 18.3.

2. Comme nous l'avons expliqué à la section 18.3, cette hypothèse n'a généralement que très peu d'impact sur les estimations de la variance, dans la mesure où la variation espérée d'une variable sur une journée est très petite par rapport à l'écart-type des variations.

3. Le passage de $m-1$ à m fait passer d'une estimation sans biais à une estimation du maximum de vraisemblance. Ces estimations sont présentées plus loin dans ce chapitre.

4. Les u de ce chapitre jouent le même rôle que les Δx du chapitre 18. Tous deux représentent le pourcentage de variation des variables de marché. Dans le cas des u, l'indice se rapporte aux différentes journées pour lesquelles la variation est mesurée pour la même variable de marché. Dans le cas des Δx, l'indice se rapporte aux différentes variables de marché pour lesquelles la variation relative est mesurée sur une même journée. Les exposants utilisés pour les σ suivent la même logique de différenciation entre les deux chapitres. Dans ce chapitre, les exposants se rapportent aux journées, alors qu'au chapitre 18 ils se rapportaient aux différentes variables de marché.

Schémas de pondération

L'équation (19.3) accorde un poids égal à tous les u_i^2. Dans la mesure où notre objectif est d'estimer le niveau actuel de volatilité, σ_n, il paraît pertinent de pondérer plus fortement les données les plus récentes. Le modèle suivant permet ce type de pondération :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2 \tag{19.4}$$

où α_i est le poids attribué à la variation observée i jours auparavant. Les α sont positifs et, s'ils sont choisis tels que $\alpha_i < \alpha_j$ pour $i > j$, alors un poids plus faible est affecté aux observations plus anciennes. Enfin, la somme des pondérations doit être égale à l'unité :

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

Une extension du principe sous-tendant l'équation (19.4) consiste à supposer qu'il existe un taux de variance moyen de long terme auquel il convient d'attribuer un certain poids. Cela conduit à un modèle de la forme :

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2 \tag{19.5}$$

où V_L est le taux de variance de long terme et γ le poids attribué à V_L. Comme la somme de l'ensemble des pondérations doit être égale à l'unité :

$$\gamma + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

Cette formulation est connue sous le nom de modèle ARCH(m), proposé initialement par Engle[5]. L'estimation de la variance repose sur la variance moyenne de long terme et m observations dont le poids respectif diminue avec l'ancienneté.

En notant $\omega = \gamma V_L$, le modèle de l'équation (19.5) peut être réécrit :

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2 \tag{19.6}$$

Dans les deux sections suivantes, nous présentons successivement deux approches de suivi de la volatilité qui reposent sur les principes sous-tendant les équations (19.4) et (19.5).

---

5. Voir R. Engle, « Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation », *Econometrica*, 50 (1982), 987-1008. R. Engle s'est vu attribuer le prix Nobel d'économie 2003 « pour des méthodes d'analyse de séries temporelles économiques avec volatilité saisonnière (les modèles ARCH) ».

19.2 Le modèle de moyenne mobile à pondération exponentielle

Le modèle de moyenne mobile à pondération exponentielle (EWMA) est un cas particulier de l'équation (19.4) dans lequel les pondérations, α_i, diminuent exponentiellement à mesure qu'on remonte dans le temps. Plus précisément, $\alpha_{i+1} = \lambda\alpha_i$, où λ est une constante comprise entre 0 et 1.

Ce schéma de pondération conduit en fait à une formule particulièrement simple de mise à jour des estimations de volatilité, à savoir :

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)\,u_{n-1}^2 \tag{19.7}$$

L'estimation σ_n de la volatilité du jour n (effectuée à la fin de la journée $n-1$) est obtenue à partir de σ_{n-1} (l'estimation de la volatilité du jour $n-1$ qui a été calculée à la fin de la journée $n-2$) et de u_{n-1} (la variation relative quotidienne la plus récente de la variable de marché).

Pour comprendre en quoi l'équation (19.7) correspond à des poids qui diminuent exponentiellement, il suffit de remplacer σ_{n-1}^2 par sa valeur pour obtenir :

$$\sigma_n^2 = \lambda\left[\lambda\sigma_{n-2}^2 + (1-\lambda)\,u_{n-2}^2\right] + (1-\lambda)\,u_{n-1}^2$$

ou encore :

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\left(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2\right) + \lambda^2\sigma_{n-2}^2$$

En substituant de la même façon σ_{n-2}^2, on obtient :

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\left(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2 + \lambda^2 u_{n-3}^2\right) + \lambda^3\sigma_{n-3}^2$$

En continuant de la sorte, on aboutit à :

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}u_{n-i}^2 + \lambda^m\sigma_{n-m}^2$$

Pour m suffisamment grand, le terme $\lambda^m\sigma_{n-m}^2$ est suffisamment petit pour être ignoré, de sorte que l'équation (19.7) est équivalente à l'équation (19.4) avec $\alpha_i = (1-\lambda)\,\lambda^{i-1}$. Les pondérations des u_i diminuent au taux λ à mesure que l'on remonte dans le temps. Chaque poids vaut λ fois le poids précédent.

■ Exemple 19.1

Supposons que λ soit égal à 0,90, que la volatilité estimée pour la variable de marché pour la journée $n-1$ soit de 1 % par jour et que, pendant la journée $n-1$, la variable de marché augmente de 2 %. Nous avons donc $\sigma_{n-1}^2 = 0{,}01^2 = 0{,}0001$ et $u_{n-1}^2 = 0{,}02^2 = 0{,}0004$. L'équation (19.7) donne :

$$\sigma_n^2 = 0{,}9 \times 0{,}0001 + 0{,}1 \times 0{,}0004 = 0{,}00013$$

L'estimation de la volatilité pour la journée n, σ_n, est donc $\sqrt{0{,}00013}$, soit 1,14 % par jour, et la valeur espérée de u_{n-1}^2 est σ_{n-1}^2 ou 0,0001. Dans cet exemple, la

valeur observée de u_{n-1}^2 est supérieure à cette espérance, aussi la volatilité estimée augmente-t-elle. Si la valeur observée de u_{n-1}^2 avait été inférieure à son espérance, la volatilité estimée aurait diminué.

Le modèle EWMA n'impose le stockage que d'une quantité réduite de données. À tout moment, il faut simplement garder en mémoire l'estimation actuelle du taux de variance et la dernière valeur de la variable de marché. À la suite d'une nouvelle observation de la valeur de la variable de marché, la nouvelle variation relative peut être calculée et l'équation (19.7) permet de mettre à jour l'estimation du taux de variance. La précédente estimation du taux de variance et l'ancienne valeur de la variable de marché peuvent alors être abandonnées.

Le modèle EWMA est construit de façon à permettre le suivi des évolutions de volatilité. Supposons qu'il se produise une forte modification de la variable de marché sur la journée $n-1$, conduisant à un u_{n-1}^2 important. Cela entraîne alors une hausse de l'estimation de la volatilité actuelle observable dans l'équation (19.7). La valeur de λ détermine la sensibilité de la volatilité quotidienne à la dernière variation en pourcentage. Un λ faible octroie une forte pondération à u_{n-1}^2 dans le calcul de σ_n. Dans ce cas, les estimations successives de la volatilité quotidienne sont elles-mêmes hautement volatiles. Un λ élevé (c'est-à-dire d'une valeur proche de 1) conduit à des estimations de la volatilité quotidienne intégrant lentement les nouvelles informations apportées par la variation quotidienne en pourcentage.

La base de données RiskMetrics, créée par J. P. Morgan, et accessible depuis 1994, utilise le modèle EWMA avec $\lambda = 0{,}94$ pour la mise à jour des estimations de la volatilité quotidienne. La société a en effet trouvé que cette valeur spécifique de λ, pour un ensemble de variables de marché distinctes, produit les estimations du taux de variance anticipé les plus proches du taux de variance effectivement réalisé[6]. Pour ces comparaisons, le taux de variance réalisé pour un jour donné était calculé comme la moyenne simple des u_i^2 observés sur les 25 jours suivants. (Le problème 19.17 reprend ce point.)

19.3 Le modèle GARCH(1,1)

Passons maintenant au modèle connu sous le nom de GARCH(1,1), développé par Bollerslev[7] en 1986. La différence entre les modèles GARCH(1,1) et EWMA est analogue à la différence existant entre les équations (19.4) et (19.5). Dans un GARCH(1,1), σ_n^2 est calculé non seulement à partir de σ_{n-1} et de u_{n-1}, mais aussi du taux de variance

6. Voir à ce propos J. P. Morgan, *RiskMetrics Monitor*, quatrième trimestre, 1995. Une approche alternative d'estimation des paramètres (le maximum de vraisemblance) est exposée plus loin dans ce chapitre.

7. Voir T. Bollerslev, « General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity », *Journal of Econometrics*, 31 (1986), 307-327.

moyen de long terme, V_L. Un GARCH(1,1) s'écrit :

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \tag{19.8}$$

où γ est le poids attribué à V_L, α celui attribué à u_{n-1}^2, et β celui attribué à σ_{n-1}^2. La somme des pondérations devant être égale à l'unité, on a :

$$\gamma + \alpha + \beta = 1$$

Le modèle EWMA est en fait un cas particulier du modèle GARCH(1,1) dans lequel $\gamma = 0$, $\alpha = 1 - \lambda$ et $\beta = \lambda$.

Les deux « 1 » de GARCH(1,1) signifient que le calcul de σ_n^2 est effectué sur la base de la dernière observation de u^2 et de l'estimation la plus récente du taux de variance. Le modèle GARCH(p,q), plus général, calcule σ_n^2 en utilisant les p dernières observations de u^2 et les q estimations les plus récentes du taux de variance[8]. Toutefois, le GARCH(1,1) est de loin le plus populaire des modèles GARCH.

En posant $\omega = V_L$, on peut réécrire le modèle GARCH(1,1) sous la forme :

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \tag{19.9}$$

C'est cette forme du modèle qui est généralement utilisée pour l'estimation des paramètres. Une fois ω, α et β estimés, on peut en déduire γ qui vaut $1 - \alpha - \beta$. La variance de long terme V_L est alors donnée par ω/γ. Afin d'assurer la stabilité du processus GARCH(1,1), il faut imposer $\alpha + \beta < 1$. Dans le cas contraire, la variance de long terme est affectée d'une pondération négative.

- **Exemple 19.2**

Supposons qu'un modèle GARCH(1,1) ait été estimé à partir de données quotidiennes comme :

$$\sigma_n^2 = 0{,}000002 + 0{,}13 u_{n-1}^2 + 0{,}86 \sigma_{n-1}^2$$

Cela correspond à $\alpha = 0{,}13$, $\beta = 0{,}86$ et $\omega = 0{,}000002$. Comme $\gamma = 1 - \alpha - \beta$, nous avons $\gamma = 0{,}01$. De plus, $\omega = \gamma V_L$ implique que $V_L = 0{,}0002$. En d'autres termes, la variance moyenne de long terme impliquée par le modèle est de 0,0002 par jour, ce qui correspond à une volatilité quotidienne de $\sqrt{0{,}0002} = 0{,}014$, soit 1,4 %.

8. D'autres modèles GARCH, incorporant l'information de manière asymétrique, ont été proposés. Dans ces modèles, σ_n dépend du signe de u_{n-1}. Ces modèles sont sans doute plus appropriés pour les marchés d'actions que le GARCH(1,1). Comme nous l'avons mentionné au chapitre 16, la volatilité du prix d'une action a tendance à être inversement liée à son prix, de sorte qu'un u_{n-1} négatif devrait avoir un effet plus important sur σ_n qu'un u_{n-1} de même valeur, mais positif. Pour une présentation des modèles qui intègrent le caractère asymétrique de l'information, on pourra se référer à D. Nelson, « Conditional Heteroscedasticity and Asset Returns : A New Approach », *Econometrica*, 59 (1990), 347-370, ainsi qu'à R. F. Engle et V. Ng, « Measuring and Testing the Impact of News on Volatility », *Journal of Finance*, 48 (1993), 1749-1778.

Si la volatilité quotidienne pour la journée $n-1$ est de 1,6 %, $\sigma_{n-1}^2 = 0{,}016^2 = 0{,}000256$ et si la variable de marché a diminué de 1 % ce jour-là, $u_{n-1}^2 = 0{,}01^2 = 0{,}0001$. Ainsi :

$$\sigma_n^2 = 0{,}000002 + 0{,}13 \times 0{,}0001 + 0{,}86 \times 0{,}000256 = 0{,}00023516$$

La nouvelle estimation de la volatilité quotidienne pour la journée n est alors $\sqrt{0{,}00023516} = 0{,}0153$, soit 1,53 %.

Les pondérations

En substituant à σ_{n-1}^2 sa valeur dans l'équation (19.9), on obtient :

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\left(\omega + \alpha u_{n-2}^2 + \beta\sigma_{n-2}^2\right)$$

ou encore :

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta\omega + \alpha u_{n-1}^2 + \alpha\beta u_{n-2}^2 + \beta^2\sigma_{n-2}^2$$

En procédant de même pour σ_{n-2}^2, on obtient :

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta\omega + \beta^2\omega + \alpha u_{n-1}^2 + \alpha\beta u_{n-2}^2 + \alpha\beta^2 u_{n-3}^2 + \beta^3\sigma_{n-3}^2$$

En poursuivant de la sorte, on peut montrer que le poids affecté à u_{n-i}^2 est $\alpha\beta^{i-1}$. Les pondérations diminuent exponentiellement au taux β. Ce paramètre peut être interprété comme un « taux de déclin », tout comme le paramètre λ dans le modèle EWMA. Il représente l'importance relative des différentes observations de u dans la détermination du taux de variance actuel. Ainsi, avec $\beta = 0{,}9$, le poids de u_{n-2}^2 n'est plus que 90 % de celui de u_{n-1}^2, celui de u_{n-3}^2 n'est plus que 81 % de celui de u_{n-1}^2, et ainsi de suite. Le modèle GARCH(1,1) a donc la même propriété de diminution exponentielle des pondérations attribuées aux u^2 que le modèle EWMA, mais à la différence de celui-ci, il accorde un poids positif à la volatilité moyenne de long terme.

Le retour à la moyenne

Le modèle GARCH(1,1) tient compte de la tendance qu'a la variance à revenir vers son niveau moyen de long terme, V_L, auquel est affecté la pondération $\gamma = 1 - \alpha - \beta$. Le modèle GARCH(1,1) est équivalent à un modèle dans lequel la variance V suit le processus stochastique suivant :

$$dV = a\left(V_L - V\right)dt + \xi V dz$$

dans lequel le temps est mesuré en journées, $a = 1 - \alpha - \beta$, et $\xi = \alpha\sqrt{2}$ (voir à ce sujet le problème 19.14). Il s'agit d'un modèle avec retour à la moyenne, la variance ayant une tendance qui la ramène vers V_L au taux a. La tendance est négative quand $V > V_L$ et positive quand $V < V_L$. Une volatilité ξ est ajoutée à cette tendance. Nous présenterons ce type de modèles plus en détail au chapitre 24.

19.4 Le choix du modèle

En pratique, les taux de variance présentent effectivement une tendance au retour à la moyenne qui est intégrée dans le modèle GARCH(1,1), mais pas dans le modèle EWMA. L'alternative GARCH(1,1) semble donc théoriquement plus adaptée que le modèle EWMA.

Dans la section suivante, nous verrons comment il est possible d'estimer au mieux les paramètres ω, α et β d'un GARCH(1,1), sachant qu'il se réduit à un EWMA pour une valeur nulle du paramètre ω. Dans les cas où la valeur optimale de ω est négative, le modèle GARCH(1,1) n'est pas stable et il convient de basculer sur un modèle EWMA.

19.5 Les méthodes du maximum de vraisemblance

Nous allons maintenant montrer comment les paramètres des modèles considérés dans les sections précédentes peuvent être estimés à partir de données historiques. Nous utilisons ici la *méthode du maximum de vraisemblance*, qui consiste à rechercher la valeur des paramètres maximisant la probabilité d'occurrence des données historiques (leur vraisemblance).

Commençons d'abord par une très simple illustration de ce principe. Après la sélection au hasard de dix titres sur une journée particulière, nous observons que seul le prix d'un de ces titres a augmenté pendant la journée, alors que celui des neuf autres a diminué ou est resté stable. Quelle est la meilleure estimation de la proportion de titres pour lesquels le prix baisse ? La réponse naturelle est 10 %. Voyons maintenant ce qu'on obtient avec la méthode du maximum de vraisemblance.

Notons p la proportion des titres dont le prix baisse. La probabilité qu'un titre particulier voie son prix baisser alors que les autres prix restent stables ou augmentent est égale à $p(1-p)^9$. (La probabilité que le prix de ce titre particulier baisse est p et pour chacun des neuf autres titres celle que son prix ne baisse pas est $1-p$.) Avec la méthode du maximum de vraisemblance, la meilleure estimation de p est celle qui maximise $p(1-p)^9$. En dérivant cette expression par rapport à p et en annulant le résultat, nous trouvons que $p = 0{,}1$ maximise cette expression. Ainsi, l'estimation du maximum de vraisemblance de p est bien 10 %.

L'estimation d'une variance constante

Considérons maintenant le problème de l'estimation, à partir de m observations, de la variance d'une variable X de distribution normale de moyenne nulle par la méthode du maximum de vraisemblance. Notons u_1, $u_2, \ldots,$ u_m les observations dont nous disposons et supposons que la moyenne de la distribution sous-jacente soit nulle. La probabilité d'observer u_i est déterminée par la fonction de densité de X en $X = u_i$,

c'est-à-dire, si on note v la variance :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(\frac{-u_i^2}{2v}\right)$$

La vraisemblance d'occurrence des m observations dans leur ordre d'apparition est :

$$\prod_{i=1}^{m} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(\frac{-u_i^2}{2v}\right)\right] \tag{19.10}$$

Selon la méthode du maximum de vraisemblance, la meilleure estimation de v est la valeur qui maximise cette expression.

La maximisation du logarithme d'une expression est équivalente à la maximisation de l'expression elle-même. On peut donc prendre le logarithme de l'expression (19.10) et ignorer les facteurs multiplicatifs constants. L'expression à maximiser devient alors :

$$\sum_{i=1}^{m} (-\ln(v) - \frac{u_i^2}{2v}) \tag{19.11}$$

ou encore :

$$-m \ln(v) - \sum_{i=1}^{m} \frac{u_i^2}{v}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de v est alors obtenu en annulant la dérivée par rapport à v de cette expression. Il est égal[9] à :

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} u_i^2$$

L'estimation des paramètres d'un GARCH(1,1)

Comment utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres d'un modèle GARCH(1,1) ou de tout autre procédé de mise à jour de la volatilité ? Notons $v_i = \sigma_i^2$ la variance estimée pour le jour i. La distribution de probabilité de u_i conditionnelle à la variance est supposée normale. En procédant toujours de la même façon, il apparaît que les meilleurs paramètres sont ceux qui maximisent :

$$\prod_{i=1}^{m} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi v_i}} \exp\left(\frac{-u_i^2}{2v_i}\right)\right]$$

Après un passage aux logarithmes, cela revient à la maximisation de :

$$\sum_{i=1}^{m} \left(-\ln(v_i) - \frac{u_i^2}{v_i}\right) \tag{19.12}$$

9. Ce qui confirme bien ce qui avait été avancé dans la note n° 3.

À l'exception du remplacement de v par v_i, il s'agit de la même expression que dans l'équation (19.11). La recherche des paramètres du modèle qui maximisent l'expression (19.12) peut être effectuée par itérations successives.

Les calculs permettant la détermination des paramètres du modèle GARCH(1,1) sont détaillés dans le tableau 19.1. Les données étudiées concernent le taux de change JPY/USD entre le 6 janvier 1988 et le 15 août 1997. Les valeurs obtenues dans le tableau sont fondées sur des estimations candidates des trois paramètres du GARCH(1,1), ω, α et β. La date est donnée dans la première colonne, la deuxième colonne compte les jours, et le taux de change, S_i, en vigueur à la fin de la journée i, est renseigné dans la troisième colonne. La quatrième colonne renvoie la variation relative du taux de change entre la fin de la journée $i-1$ et la fin de la journée i donnée par $u_i = (S_i - S_{i-1})/S_{i-1}$. La cinquième colonne rapporte l'estimation du taux de variance pour le jour i, $v_i = \sigma_i^2$, calculée à la fin de la journée $i-1$. À partir du jour 3, la procédure est lancée en fixant le taux de variance à u_2^2, l'équation (19.9) permettant alors de l'ajuster pour les jours suivants. La sixième colonne calcule la mesure de vraisemblance, $-\ln(v_i) - u_i^2/v_i$. Les valeurs obtenues dans la cinquième et la sixième colonne sont calculées à partir des valeurs candidates courantes de ω, α et β. Notre objectif est de déterminer les ω, α et β qui maximisent la somme des valeurs rapportées dans la sixième colonne. Pour cela, il faut avoir recours à une procédure de recherche itérative[10].

Dans notre exemple, les valeurs optimales des paramètres sont :

$$\omega = 0{,}00000176,\ \alpha = 0{,}0626,\ \beta = 0{,}8976$$

et la valeur maximale de la fonction de vraisemblance de l'équation (19.12) est 22 063,5763. Les valeurs du tableau 19.1 correspondent à la dernière itération de la recherche des ω, α et β optimaux.

Le taux de variance de long terme, V_L, est dans notre exemple égal à :

$$\frac{\omega}{1-\alpha-\beta} = \frac{0{,}00000176}{0{,}0398} = 0{,}00004422$$

La volatilité de long terme est donc $\sqrt{0{,}00004422}$, soit 0,665 % par jour.

Le graphique 19.1 représente l'évolution de la volatilité du taux de change JPY/USD estimée avec le modèle GARCH(1,1) sur la période de dix ans couverte par les données. La volatilité quotidienne est généralement restée comprise entre 0,4 % et 0,8 %, mais on observe tout de même des pics de volatilité supérieurs à 1 % à certaines périodes.

Une alternative plus robuste pour l'estimation des paramètres des modèles GARCH(1,1) est connue sous le nom de ciblage de la variance (*variance targeting*[11]). Cette méthode

10. Comme nous le verrons par la suite, un algorithme général d'optimisation comme le solveur de Microsoft Excel peut être utilisé. Le recours à un algorithme plus spécifique, comme celui de Levenberg-Marquardt, constitue une alternative intéressante. On pourra se référer à ce sujet à W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky et W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

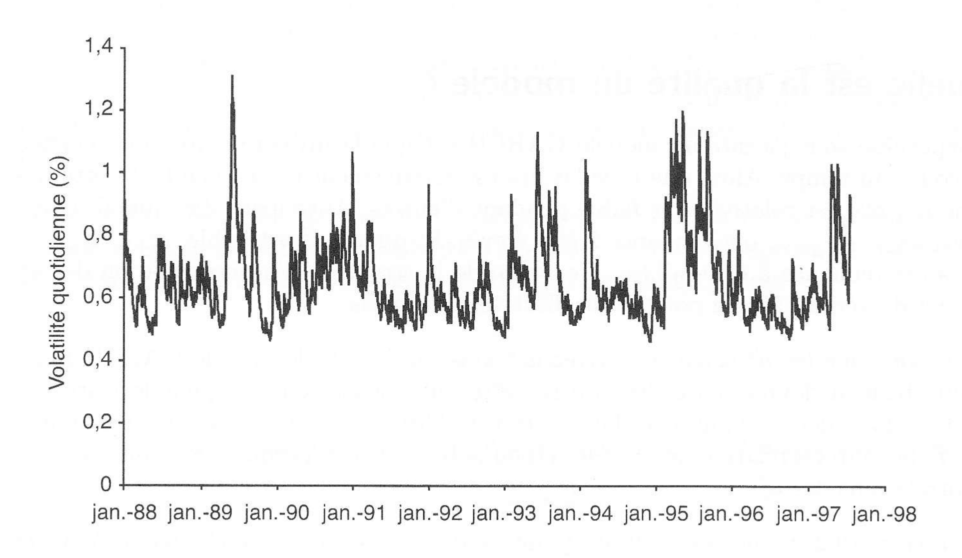
11. Voir R. Engle et J. Mezrich, « GARCH for Groups », *RISK*, août 1996, 36-40.

Tableau 19.1 : Estimation des paramètres du modèle GARCH(1,1)

Date	Jour i	S_i	u_i	$v_i = \sigma_i^2$	$-\ln(v_i) - u_i^2/v_i$
06-janv.-88	1	0,007728			
07-janv.-88	2	0,007779	0,006599		
08-janv.-88	3	0,007746	–0,004242	0,00004355	9,6283
11-janv.-88	4	0,007816	0,009037	0,00004198	8,1329
12-janv.-88	5	0,007837	0,002687	0,00004455	9,8568
13-janv.-88	6	0,007924	0,011101	0,00004220	7,1529
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
13-août-97	2421	0,008643	0,003374	0,00007626	9,3321
14-août-97	2422	0,008493	–0,017309	0,00007092	5,3294
15-août-97	2423	0,008495	0,000144	0,00008417	9,3824
					22 063,5763

Valeurs candidates des paramètres du modèle GARCH

ω	α	β
0,00000176	0,0626	0,8976



Graphique 19.1 : Volatilité quotidienne du taux de change yen/dollar entre 1988 et 1997.

consiste à prendre la variance de l'échantillon (ou toute autre valeur jugée raisonnable) comme taux de variance moyen de long terme, V_L. La valeur de ω est alors $V_L(1 - \alpha - \beta)$, et il ne reste plus que deux paramètres à estimer. Dans le cas des données du tableau 19.1, la variance de l'échantillon est égale à 0,00004341, ce qui correspond à une volatilité quotidienne de 0,659 %. En prenant la variance de l'échantillon comme valeur de V_L, les valeurs de α et β qui maximisent la fonction objectif donnée par l'équation (19.12) sont respectivement 0,0607 et 0,8990. La valeur maximale de la fonction objectif est égale à 22 063,5274, ce qui n'est que très légèrement inférieur aux 22 063,5763 obtenus avec la procédure précédente.

Dans le cas d'un recours au modèle EWMA, la procédure d'estimation est relativement simple. Il convient de fixer $\omega = 0$, $\alpha = 1 - \lambda$ et $\beta = \lambda$, aussi ne reste-t-il plus qu'un seul paramètre à estimer. Avec les données du tableau 19.1, la valeur de λ qui maximise la fonction objectif donnée par l'équation (19.12) est égale à 0,9686 pour une valeur maximale de la fonction objectif de 21 995,8377.

Le solveur d'Excel peut être utilisé pour la recherche de la valeur des paramètres qui maximisent la fonction de vraisemblance tant du modèle GARCH(1,1) que du modèle EWMA. Le programme fonctionne bien pour peu que la feuille de calcul soit organisée de façon à ce que les paramètres cherchés aient des valeurs du même ordre de grandeur. Par exemple, dans un modèle GARCH(1,1), on réserverait les cellules A1 à A3 pour les paramètres $10^5\omega$, α et $0{,}1\beta$. On pose alors B1 = A1/100 000, B2 = A2 et B3 = 10*A3. On utiliserait alors B1, B2 et B3 pour calculer la fonction de vraisemblance et le solveur déterminerait les valeurs de A1, A2 et A3 qui maximisent cette fonction.

Quelle est la qualité du modèle ?

L'hypothèse sous-jacente au modèle GARCH est que le niveau de volatilité change au cours du temps. Alors que la volatilité est relativement élevée pendant certaines périodes, elle est relativement faible pendant d'autres. Autrement dit, quand u_i^2 est élevé, $u_{i+1}^2, u_{i+2}^2, \ldots$ ont tendance à être élevés. Et quand u_i^2 est faible, $u_{i+1}^2, u_{i+2}^2, \ldots$ ont aussi tendance à être faibles. L'examen de la structure d'autocorrélation des u_i^2 permet de vérifier à quel point c'est effectivement le cas.

Supposons que les u_i^2 soient effectivement autocorrélés. Si le modèle GARCH fonctionne bien, il devrait faire disparaître cette autocorrélation. On peut le tester en étudiant la structure d'autocorrélation des variables u_i^2/σ_i^2. Si l'on ne retrouve qu'une très faible autocorrélation, le modèle retenu pour σ_i a bien permis d'expliquer les autocorrélations des u_i^2.

Le tableau 19.2 donne les résultats pour les données de taux de change JPY/USD présentées précédemment. Les décalages considérés pour le calcul de l'autocorrélation

Tableau 19.2 : Autocorrélations avant et après l'utilisation d'un modèle GARCH

Décalage	**Autocorrélation pour** u_i^2	**Autocorrélation pour** u_i^2/σ_i^2
1	0,072	0,004
2	0,041	–0,005
3	0,057	0,008
4	0,107	0,003
5	0,075	0,016
6	0,066	0,008
7	0,019	–0,033
8	0,085	0,012
9	0,054	0,010
10	0,030	–0,023
11	0,038	–0,004
12	0,038	–0,021
13	0,057	–0,001
14	0,040	0,002
15	0,007	–0,028

sont dans la première colonne. Les autocorrélations[12] pour les u_i^2 et les u_i^2/σ_i^2 apparaissent dans les deuxième et troisième colonnes. Le tableau montre que les autocorrélations entre les u_i^2 sont positives pour tous les décalages compris entre 1 et 15. Dans le cas de u_i^2/σ_i^2, certaines autocorrélations sont positives et d'autres sont négatives. Elles sont toutes largement inférieures aux autocorrélations mesurées pour les u_i^2.

Le modèle GARCH semble avoir bien expliqué les données. La statistique connue sous le nom de Ljung-Box offre la possibilité d'effectuer un test plus spécifique[13]. Pour une série composée de m observations, la statistique de Ljung-Box est :

$$m \sum_{k=1}^{K} \omega_k \eta_k^2$$

avec η_k l'autocorrélation pour le décalage k, K le nombre de décalages considérés et :

$$\omega_k = \frac{m+2}{m-k}$$

12. Pour une série x_i, l'autocorrélation avec un décalage k est le coefficient de corrélation entre x_i et x_{i+k}.

13. Voir G. M. Ljung et G. E. P. Box, « On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models », *Biometrica*, 65 (1978), 297-303.

Pour $K = 15$, l'absence de corrélation peut être rejetée au seuil de 5 % si la statistique de Ljung-Box est supérieure à 25.

La statistique de Ljung-Box calculée à partir de la série des u_i^2 du tableau 19.2, d'une valeur proche de 123, indique une autocorrélation manifeste. Pour la série des u_i^2/σ_i^2, la statistique de Ljung-Box vaut 8,2, ce qui laisse penser que l'autocorrélation a été largement atténuée par le modèle GARCH.

19.6 L'utilisation du GARCH(1,1) pour la prévision de la volatilité future

Le taux de variance estimé à la fin de la journée $n-1$ pour la journée n devient, avec un modèle GARCH(1,1) :

$$\sigma_n^2 = (1-\alpha-\beta)\,V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2$$

ce qui donne :

$$\sigma_n^2 - V_L = \alpha\left(u_{n-1}^2 - V_L\right) + \beta\left(\sigma_{n-1}^2 - V_L\right)$$

Pour la journée $n+t$ à venir, nous avons :

$$\sigma_{n+t}^2 - V_L = \alpha\left(u_{n+t-1}^2 - V_L\right) + \beta\left(\sigma_{n+t-1}^2 - V_L\right)$$

L'espérance de u_{n+t-1}^2 est σ_{n+t-1}^2, ce qui permet d'écrire :

$$E\left(\sigma_{n+t}^2 - V_L\right) = (\alpha+\beta)\,E\left(\sigma_{n+t-1}^2 - V_L\right)$$

où E représente l'espérance mathématique. L'utilisation répétée de cette équation nous conduit à :

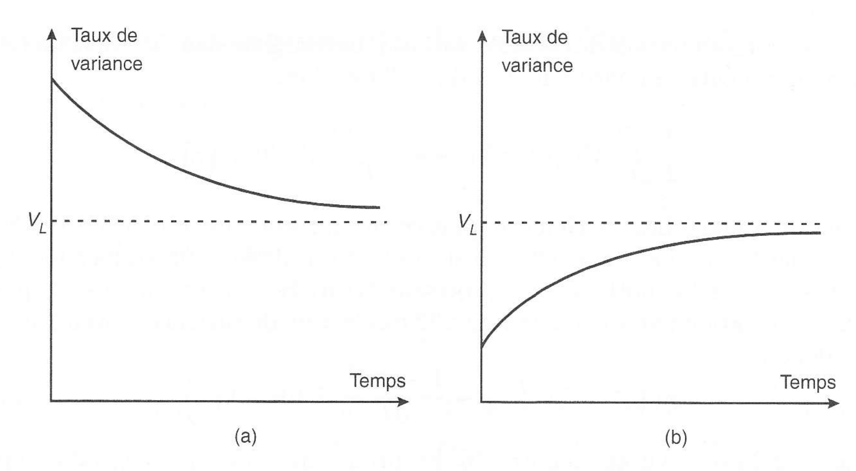
$$E\left(\sigma_{n+t}^2 - V_L\right) = (\alpha+\beta)^t\left(\sigma_n^2 - V_L\right)$$

ou encore :

$$E\left(\sigma_{n+t}^2\right) = V_L + (\alpha+\beta)^t\left(\sigma_n^2 - V_L\right) \tag{19.13}$$

Cette équation nous donne une prévision de la volatilité pour la journée $n+t$ à partir des seules informations disponibles à la fin de la journée $n-1$. Dans le modèle EWMA, $\alpha+\beta = 1$, aussi, comme on peut le voir dans l'équation (19.13), le taux de variance espéré futur est égal au taux de variance actuel. Quand $\alpha+\beta < 1$, le dernier terme de l'équation diminue à mesure que t augmente. Le graphique 19.2 montre la trajectoire suivie par le taux de variance quand sa valeur actuelle est différente de V_L. Comme nous l'avons déjà mentionné, le taux de variance montre une tendance au retour à la moyenne, avec un niveau de retour V_L et un taux de retour de $1-\alpha-\beta$. Plus nous nous projetons dans le futur et plus les prévisions du taux de variance tendent vers V_L. Tout cela souligne qu'il faut $\alpha+\beta < 1$ pour que le processus GARCH(1,1) soit stable. Quand $\alpha+\beta > 1$, le poids attribué à la variance moyenne de long terme est négatif et le processus est alors un processus « d'éloignement de la moyenne » plutôt qu'un processus de « retour à la moyenne ».

Dans l'exemple du taux de change JPY/USD traité précédemment, nous avions $\alpha+\beta = 0{,}9602$ et $V_L = 0{,}00004422$. Supposons que nous ayons estimé le taux de



Graphique 19.2 : Trajectoire espérée du taux de variance pour (a) un taux de variance actuel supérieur au taux de variance de long terme, et (b) un taux de variance actuel inférieur au taux de variance de long terme.

variance actuel à 0,00006 par jour. (Cela correspond à une volatilité de 0,77 % par jour.) Le taux de variance espéré dans 10 jours est :

$$0{,}00004422 + 0{,}9602^{10}(0{,}00006 - 0{,}00004422) = 0{,}00005473$$

La volatilité espérée par jour est de 0,74 %, ce qui n'est que faiblement inférieur au niveau actuel de 0,77 %. Toutefois, le taux de variance espéré dans 100 jours est :

$$0{,}00004422 + 0{,}9602^{100}(0{,}00006 - 0{,}00004422) = 0{,}00004449$$

La volatilité espérée par jour est alors 0,667 %, soit un niveau très proche de celui de la volatilité de long terme.

Les structures par termes des volatilités

Plaçons-nous au jour n. On a :

$$V(t) = E\left(\sigma_{n+t}^2\right)$$

Posons maintenant :

$$a = \ln\left(\frac{1}{\alpha + \beta}\right)$$

L'équation (19.13) devient :

$$V(t) = V_L + e^{-at}\left[V(0) - V_L\right]$$

Ici, $V(t)$est une estimation du taux de variance instantanée dans t jours. Le taux de variance moyen entre aujourd'hui et la date T est alors :

$$\frac{1}{T}\int_0^T V(t)dt = V_L + \frac{1-e^{-aT}}{aT}\left[V(0) - V_L\right]$$

Plus l'option a une échéance éloignée, plus cette expression est proche de V_L. Notons $\sigma(T)$ la volatilité en base annuelle qui devrait être utilisée pour évaluer une option d'échéance T sous l'hypothèse d'un processus GARCH(1,1). En supposant qu'il y a 252 jours de cotation par an, $\sigma(T)^2$ vaut 252 fois le taux de variance moyen journalier, et on a donc :

$$\sigma\left(T\right)^2 = 252\left(V_L + \frac{1-e^{-aT}}{aT}\left[V(0) - V_L\right]\right) \tag{19.14}$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 16, les primes des différents contrats d'options sur un même actif sous-jacent sont souvent utilisées pour extraire une *structure par termes des volatilités*. Il s'agit de la relation existant entre les volatilités implicites des options et leurs maturités. On peut s'appuyer sur l'équation (19.14) pour estimer une structure par termes des volatilités à partir d'un modèle GARCH(1,1). La structure par termes des volatilités estimée est généralement différente de la structure par termes actuelle. Toutefois, comme nous allons le voir, elle sert souvent à prévoir la façon dont la structure par termes va répondre aux variations de volatilité.

Quand la volatilité courante est supérieure à la volatilité de long terme, le modèle GARCH(1,1) conduit à l'estimation d'une structure par termes des volatilités décroissante. Inversement, quand la volatilité courante est inférieure à la volatilité de long terme, la structure par termes des volatilités estimée est croissante. Dans le cas du taux de change yen/dollar, on a :

$$a = \ln\left(1/0{,}9602\right) = 0{,}0406 \text{ et } V_L = 0{,}00004422.$$

Supposons aussi que le taux de variance courant, $V(0)$, ait été estimé à 0,00006. On déduit de l'équation (19.14) :

$$\sigma(T)^2 = 252\left(0{,}00004422 + \frac{1-e^{-0{,}0406T}}{0{,}0406T}(0{,}00006 - 0{,}00004422)\right)$$

où T est mesuré en jours. Le tableau 19.3 rapporte la volatilité en base annuelle pour différentes valeurs de T.

Tableau 19.3 : Structure par termes des volatilités du taux de change yen/dollar construite avec un GARCH(1,1)

Durée de vie de l'option (jours)	**10**	**30**	**50**	**100**	**500**
Volatilité de l'option (% annuel)	12,03	11,61	11,35	11,01	10,65

L'impact des changements de volatilité

L'équation (19.14) peut être écrite :

$$\sigma(T)^2 = 252\left(V_L + \frac{1-e^{-aT}}{aT}\left[\frac{\sigma(0)^2}{252} - V_L\right]\right)$$

Quand $\sigma(0)$ subit une variation $\Delta\sigma(0)$, $\sigma(T)$ devient :

$$\frac{1-e^{-aT}}{aT}\frac{\sigma(0)}{\sigma(T)}\Delta\sigma(0) \tag{19.15}$$

Le tableau 19.4 illustre l'effet d'une modification de la volatilité sur des options d'échéances diverses, dans le cas de notre exemple relatif au taux de change JPY/USD. Comme précédemment, nous supposons $V(0)$ égal à 0,00006 par jour, de sorte que $\sigma(0) = 12{,}3$ %. Nous envisageons dans ce tableau une variation de 100 points de base de la volatilité instantanée, qui passe de 12,3 % à 13,3 %, en base annuelle. Cela s'écrit $\Delta\sigma(0) = 0{,}01$ ou 1 %.

Tableau 19.4 : Impact d'une augmentation de 1 % de la volatilité instantanée prédit par un GARCH(1,1)

Durée de vie de l'option (jours)	**10**	**30**	**50**	**100**	**500**
Volatilité de l'option (% annuel)	0,84	0,61	0,46	0,27	0,06

De nombreuses institutions financières se fondent sur des analyses semblables pour déterminer l'exposition de leurs positions aux variations de volatilité. Plutôt que de considérer une hausse uniforme, de 1 %, de la volatilité implicite pour le calcul du vega, la pratique consiste à utiliser l'augmentation de volatilité correspondant à l'échéance de l'option considérée. Sur la base du tableau 19.4, une hausse de volatilité de 0,84 % serait appliquée pour une option à 10 jours, une hausse de 0,61 % pour une option à 30 jours, une hausse de 0,46 % pour une option à 50 jours, et ainsi de suite.

19.7 Les corrélations

Nous nous sommes jusqu'ici concentré sur l'estimation et la prévision de la volatilité. Comme nous l'avons indiqué au chapitre 18, les corrélations jouent un rôle clé dans le calcul de la VaR. Nous allons montrer dans cette section comment les estimations des corrélations peuvent être actualisées selon une procédure analogue à celle employée dans les estimations de la volatilité.

La corrélation entre deux variables X et Y est définie par :

$$\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

où σ_X et σ_Y représentent les écarts-types respectifs de X et de Y, et $\text{cov}(X, Y)$ la covariance entre X et Y. La covariance entre X et Y est donnée par :

$$E\left[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right]$$

avec μ_X et μ_Y les moyennes respectives de X et de Y, et E l'opérateur d'espérance mathématique. Bien que les interprétations possibles des corrélations soient plus intuitives que celles des covariances, nous nous fonderons sur ces dernières pour mener l'analyse[14].

Notons x_i et y_i les variations relatives de X et de Y entre la fin de la journée $i - 1$ et la fin de la journée i :

$$x_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i-1}} \qquad y_i = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}}$$

avec X_i et Y_i les valeurs de X et de Y à la fin de la journée i. Notons aussi :

$\sigma_{x,n}$: la volatilité quotidienne de la variable X, estimée pour le jour n

$\sigma_{y,n}$: la volatilité quotidienne de la variable Y, estimée pour le jour n

cov_n : l'estimation de la covariance entre les variations quotidiennes de X et de Y calculée le jour n

On estime la corrélation entre X et Y pour le jour n par :

$$\frac{\text{cov}_n}{\sigma_{x,n}\sigma_{y,n}}$$

Si on pondère également l'ensemble des observations et qu'on suppose des moyennes nulles pour x_i et y_i, l'équation (19.3) donne l'estimation suivante des taux de variance de X et de Y à partir des m dernières observations :

$$\sigma_{x,n}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{n-i}^2, \; \sigma_{y,n}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{n-i}^2$$

Avec les mêmes hypothèses, un estimateur de la covariance entre X et Y est donné par :

$$\text{cov}_n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{n-i}y_{n-i} \tag{19.16}$$

Un modèle EWMA semblable à celui de l'équation (19.7) peut constituer une alternative intéressante. Dans ce cas, la formule d'actualisation des estimations de la covariance est :

$$\text{cov}_n = \lambda \text{cov}_{n-1} + (1 - \lambda)x_{n-1}y_{n-1}$$

14. Nous pouvons ici faire une analogie avec la première partie de ce chapitre, dans laquelle nous avons mené l'analyse des modèles EWMA et GARCH en nous fondant sur les taux de variance, alors même que les volatilités sont plus faciles à comprendre.

Une analyse semblable à celle développée pour le modèle de volatilité EWMA permet de montrer que les pondérations attribuées aux observations des $x_i y_i$ diminuent à mesure qu'on remonte dans le temps. En outre, plus la valeur de λ est faible, plus les pondérations associées aux observations récentes sont élevées.

Exemple 19.3

Supposons que $\lambda = 0{,}95$ et que l'estimation de la corrélation entre deux variables X et Y soit égale à 0,6 pour la journée $n-1$. Supposons de plus que les volatilités de X et Y soient estimées à 1 % et 2 % pour ce même jour. On peut déduire l'estimation de la covariance entre X et Y pour la journée $n-1$ de la relation liant corrélation et covariance. Cela donne :

$$0{,}6 \times 0{,}01 \times 0{,}02 = 0{,}00012$$

Si les variations relatives de X et Y sur la journée $n-1$ sont respectivement 0,5 % et 2,5 %, les variances et la covariance valables pour la journée n devront être modifiées ainsi :

$$\sigma_{x,n}^2 = 0{,}95 \times 0{,}01^2 + 0{,}05 \times 0{,}005^2 = 0{,}00009625$$

$$\sigma_{y,n}^2 = 0{,}95 \times 0{,}02^2 + 0{,}05 \times 0{,}025^2 = 0{,}00041125$$

$$\text{cov}_n = 0{,}95 \times 0{,}00012 + 0{,}05 \times 0{,}005 \times 0{,}025 = 0{,}00012025$$

Les valeurs mises à jour des volatilités sont $\sqrt{0{,}00009625} = 0{,}981\%$ pour X et $\sqrt{0{,}00041125} = 2{,}028\%$ pour Y. Enfin, le nouveau coefficient de corrélation entre X et Y est :

$$\frac{0{,}00012025}{0{,}00981 \times 0{,}02028} = 0{,}6044$$

Les modèles GARCH peuvent aussi être employés à des fins de mise à jour des estimations de covariances et de prévisions de leurs niveaux futurs. Ainsi, le modèle GARCH(1,1) de mise à jour de la covariance s'écrit :

$$\text{cov}_n = \omega + \alpha x_{n-1} y_{n-1} + \beta \text{cov}_{n-1}$$

et la covariance moyenne de long terme est $\omega/(1-\alpha-\beta)$. Des formules semblables à celles des équations (19.13) et (19.14) peuvent être développées pour la prévision des covariances futures et le calcul de la covariance moyenne pour la durée de vie de l'option[15].

15. Les modèles GARCH multivariés, dans lesquels la totalité de la matrice de variance-covariance est actualisée d'une façon cohérente, offrent une extension aux idées développées dans ce chapitre. Pour une étude des approches alternatives, on pourra se référer à R. Engle et J. Mezrich, « GARCH for Groups », *RISK*, août 1996, 36-40.

La condition de cohérence pour les covariances

Une fois les variances et covariances calculées, la matrice de variance-covariance peut être construite. L'élément (i, j) de la matrice correspond à la covariance entre la variable i et la variable j, pour $i \neq j$, et à la variance de la variable i, pour $i = j$.

Toutes les matrices de variance-covariance Ω n'ont pas nécessairement de cohérence interne. La condition pour que ce soit le cas est que :

$$w^T \Omega w \geqslant 0 \tag{19.17}$$

pour l'ensemble des vecteurs w (de taille $N \times 1$), où w^T est le transposé de w. Une matrice qui satisfait cette propriété est dite *semi-définie positive.*

Pour comprendre pourquoi la propriété (19.17) doit être satisfaite, notons $w^T = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$. L'expression $w^T \Omega w$ représente la variance de $w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n$ où x_i est la valeur de la variable i. En tant que variance, cette expression doit être positive ou nulle.

Pour s'assurer qu'on construit effectivement une matrice semi-définie positive, il convient de calculer les variances et covariances de façon cohérente. Si, par exemple, les variances sont calculées en attribuant un poids identique aux m dernières observations, il doit en être de même pour le calcul des covariances. Si les variances sont actualisées avec un modèle EWMA paramétré avec $\lambda = 0{,}94$, ce doit aussi être le cas pour les covariances.

Par exemple, la matrice suivante n'est pas semi-définie positive.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}9 \\ 0 & 1 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 0{,}9 & 1 \end{bmatrix}$$

La variance de chaque variable est 1,0 ; dès lors, les covariances sont aussi des coefficients de corrélation. La première variable est fortement corrélée avec la troisième variable, ce qui est aussi le cas de la deuxième variable. Toutefois, il n'y a aucune corrélation entre la première et la deuxième variable, ce qui semble très étrange. En fixant w à (1, 1, –1), on trouve que la condition posée dans l'équation (19.17) n'est pas vérifiée, prouvant par là même que la matrice n'est pas semi-définie positive[16].

Résumé

Les modèles d'évaluation d'options les plus utilisés, comme celui de Black-Scholes, supposent que la volatilité de l'actif sous-jacent est constante. Cette hypothèse est loin d'être vérifiée, et en pratique, la volatilité d'un actif, comme le prix d'une action, suit

16. Pour une matrice de corrélation de taille 3×3, on peut montrer qu'elle est semi-définie positive si :

$$\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} \leqslant 1$$

où ρ_{ij} est le coefficient de corrélation entre les variables i et j.

un processus stochastique. À la différence du prix de l'actif, elle n'est pas directement observable et ce chapitre était consacré aux procédures permettant de modéliser les évolutions du niveau de volatilité.

La variation relative d'une variable de marché entre la fin de la journée $i-1$ et la fin de la journée i est notée u_i. Le taux de variance de la variable de marché (qui est le carré de sa volatilité) est calculé comme une moyenne pondérée des u_i^2. Le trait caractéristique des schémas de pondération présentés ici est qu'ils n'attribuent pas un poids égal à toutes les observations de u_i^2. Plus une observation est récente, plus le poids qui lui est attribué est important. Dans les modèles EWMA et GARCH(1,1), les pondérations diminuent exponentiellement à mesure que les observations deviennent plus anciennes. Le modèle GARCH diffère toutefois du modèle EWMA en ce sens qu'il affecte aussi un certain poids au taux de variance moyen de long terme. Les modèles EWMA et GARCH(1,1) ont tous deux une structure permettant une prévision relativement aisée des niveaux futurs des taux de variance.

L'estimation des paramètres des modèles GARCH ou des modèles analogues se fait sur la base des données historiques et, généralement, à l'aide des méthodes du maximum de vraisemblance. Ces dernières nécessitent le recours à une procédure itérative pour déterminer la valeur des paramètres qui maximise la probabilité d'occurrence, ou vraisemblance, des données historiques. Une fois ces paramètres déterminés, il est possible de juger de la qualité d'un modèle en vérifiant à quel point il supprime l'autocorrélation des u_i^2.

Il est possible de développer un modèle de suivi des covariances correspondant à chacun des modèles développés pour suivre les évolutions de la variance. Les procédures détaillées ici peuvent ainsi être employées pour mettre à jour dans son intégralité la matrice de variance-covariance utilisée dans les calculs de la VaR.

Références complémentaires

BOLLERSLEV T., « General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity », *Journal of Econometrics*, 31 (1986), 307-327.

CUMBY R., S. FIGLEWSKI et J. HASBROUCK, « Forecasting Volatilities and Correlations with EGARCH Models », *Journal of Derivatives*, 1 (1993), 51-63.

ENGLE R. F., « Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation », *Econometrica*, 50 (1982), 987-1008.

ENGLE R. F. et J. MEZRICH, « Grappling with GARCH », *RISK*, septembre 1995, 112-117.

ENGLE R. F. et J. MEZRICH, « GARCH for Groups », *RISK*, août 1996, 36-40.

ENGLE R. F. et V. NG, « Measuring and Testing the Impact of News on Volatility », *Journal of Finance*, 48 (1993), 1749-1778.

NELSON D., « Conditional Heteroscedasticity and Asset Returns : A New Approach », *Econometrica*, 59 (1990), 347-370.

NOH J., R. F. ENGLE et A. KANE, « Forecasting Volatility and Option Prices of the S&P500 Index », *Journal of Derivatives*, 2 (1994), 17-30.

Problèmes et exercices

19.1 Expliquez le fonctionnement du modèle EWMA d'estimation de la volatilité à partir de données historiques.

19.2 Quelle différence y a-t-il entre les modèles EWMA et GARCH(1,1) pour la mise à jour des volatilités ?

19.3 L'estimation la plus récente de la volatilité quotidienne est de 1,5 % et le prix de l'actif à la clôture de la veille était de 30 €. Le paramètre λ du modèle EWMA est fixé à 0,94. Supposez que le prix de l'actif aujourd'hui à la clôture soit de 30,5 €. Quel effet cela aura-t-il sur la nouvelle valeur de la volatilité dans le modèle EWMA ?

19.4 Une société utilise un modèle EWMA pour prévoir la volatilité. Elle décide de changer son paramètre λ en le faisant passer de 0,95 à 0,85. Quelles vont être les conséquences vraisemblables de cette modification sur les prévisions ?

19.5 La volatilité annuelle d'une variable de marché est de 30 %. Calculez un intervalle de confiance à 99 % pour la variation relative quotidienne de cette variable.

19.6 Une société utilise un modèle GARCH(1,1) pour suivre les variations de volatilité. Les trois paramètres sont ω, α et β. Décrivez les effets d'une légère augmentation de la valeur de chacun des paramètres quand les autres restent constants.

19.7 La plus récente estimation de la volatilité quotidienne du taux de change USD/GBP est 0,6 %, et le taux de change était de 1,5000 la veille à 16 h 00. Le paramètre λ du modèle EWMA est fixé à 0,9. Supposez que le taux de change soit égal à 1,4950 aujourd'hui à la même heure. Quel est le nouveau niveau de volatilité ?

19.8 Supposez que l'indice CAC 40 ait clôturé hier soir à 3263,78 points et que la volatilité quotidienne de cet indice soit à ce moment-là estimée à 1 %. Les paramètres du modèle GARCH(1,1) sont $\omega = 0{,}000002$, $\alpha = 0{,}06$ et $\beta = 0{,}92$. Si l'indice clôture aujourd'hui à 3230,64 points, quelle sera la nouvelle estimation de la volatilité ?

19.9 Prenons deux actifs A et B dont les volatilités quotidiennes respectives sont actuellement 1,6 % et 2,5 %. La veille, à la clôture, les prix de ces actifs étaient 20 € et 40 €, et l'estimation du coefficient de corrélation entre les rentabilités des deux actifs était de 0,25. Le paramètre λ du modèle EWMA est fixé à 0,95.

a. Calculez le niveau estimé de la covariance entre les actifs.

b. Mettez à jour l'estimation de la corrélation en supposant que les prix des actifs aujourd'hui à la clôture sont respectivement 20,5 € et 40,5 €.

19.10 L'estimation des paramètres d'un GARCH(1,1) conduit à $\omega = 0{,}000004$, $\alpha = 0{,}05$ et $\beta = 0{,}92$. Quelle est, dans ce cas, la volatilité moyenne de long terme ? Déterminez l'équation qui régit le retour du taux de variance vers son niveau moyen de long terme. Pour un niveau actuel de volatilité de 20 % par an, quelle est la volatilité espérée à 20 jours ?

19.11 Prenons deux actifs X et Y dont les volatilités quotidiennes sont actuellement égales à 1,0 % et 1,2 %. La veille, à la clôture, les prix de ces actifs étaient 30 € et 50 €, et l'estimation du coefficient de corrélation entre les rentabilités des deux actifs est 0,50. Corrélations et volatilités sont mises à jour sur la base d'un modèle GARCH(1,1). Les paramètres ont été estimés avec pour résultats $\alpha = 0{,}04$ et $\beta = 0{,}94$. Pour la corrélation, on a $\omega = 0{,}000001$, et pour les volatilités, $\omega = 0{,}000003$. Si aujourd'hui, à la clôture, les prix des deux actifs sont 31 € et 51 €, comment l'estimation de la volatilité doit-elle être modifiée ?

19.12 Supposons que la volatilité quotidienne de l'indice FTSE 100 (mesuré en livres sterling) soit de 1,8 % et que la volatilité quotidienne du taux de change USD/GBP soit de 0,9 %. Supposons en outre que la corrélation entre l'indice FTSE 100 et le taux de change USD/GBP soit égale à 0,4. Quelle est la volatilité de l'indice FTSE 100 quand il est exprimé en USD ? Supposez pour cela que le taux de change USD/GBP est donné en quantité d'USD par GBP. (Indication : quand $Z = XY$, la variation relative de Z est à peu de choses près égale à la somme des variations relatives de X et Y.)

19.13 En reprenant les données du problème 19.12, supposons maintenant que la corrélation entre l'indice S&P500 (mesuré en USD) et l'indice FTSE 100 (mesuré en GBP) vaille 0,7, que la corrélation entre l'indice S&P500 (mesuré en USD) et le taux de change USD/GBP soit de 0,3, et enfin que la volatilité de l'indice S&P500 soit de 1,6 %. Quelle est la corrélation entre l'indice S&P500 (mesuré en USD) et l'indice FTSE 100 quand celui-ci est aussi exprimé en USD ? (Indication : pour trois variables X, Y et Z, la covariance entre $X + Y$ et Z est égale à la somme des covariances entre X et Y et entre X et Z.)

19.14 Montrez l'équivalence entre l'équation (19.9) du modèle GARCH(1,1) :

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

et le modèle à volatilité stochastique :

$$dV = a(V_L - V)\,dt + \xi V\,dz$$

dans lequel le temps est mesuré en jours, V représente le carré de la volatilité du prix de l'actif et :

$$a = 1 - \alpha - \beta$$

$$V_L = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

$$\xi = \alpha\sqrt{2}$$

Quel est le modèle à volatilité stochastique correspondant quand le temps est mesuré en années ? (Indication : si u_{n-1} est la rentabilité de l'actif sur la période Δt et suit une distribution normale de moyenne nulle et d'écart-type σ_{n-1}, les moyennes de u_{n-1}^2 et de u_{n-1}^4 sont respectivement égales à σ_{n-1}^2 et $3\sigma_{n-1}^4$.)

Questions complémentaires

19.15 Supposons que le prix au comptant de l'or la veille à la clôture ait été de 300 \$ l'once et que sa volatilité soit estimée à 1,3 % par jour. Le prix de clôture est aujourd'hui de 298 \$. Ajustez l'estimation de la volatilité en vous fondant sur :

a. Un modèle EWMA avec $\lambda = 0{,}94$.

b. Un modèle GARCH(1,1) avec $\omega = 0{,}000002$, $\alpha = 0{,}04$ et $\beta = 0{,}94$.

19.16 Reprenez les données du problème 19.15 et supposez en outre que l'argent s'échangeait à 8 \$ l'once hier soir à la clôture des échanges, que sa volatilité quotidienne était alors estimée à 1,5 % et que sa corrélation avec le prix de l'or était estimée à 0,8. Le prix de l'argent est aujourd'hui resté inchangé. Ajustez la volatilité du prix de l'argent et la corrélation entre les prix de l'or et de l'argent en vous fondant sur les deux modèles proposés dans le problème 19.15. Dans la réalité, pensez-vous que le paramètre ω est le même pour l'or et l'argent ?

19.17 Une feuille de calcul Excel constituée de 900 valeurs quotidiennes de différents taux de change et indices boursiers peut être téléchargée sur le site Internet de l'auteur : http ://www.rotman.utoronto.ca/~hull.

Choisissez un taux de change et un indice boursier. Déterminez la valeur du λ du modèle EWMA qui minimise la valeur de :

$$\sum_i (v_i - \beta_i)^2$$

avec v_i la prévision de la variance effectuée à la fin de la journée $i - 1$ et β_i la variance des données observée entre la journée i et la journée $i + 25$. Utilisez pour cela le solveur d'Excel et prenez pour prévision de la variance à la fin de la première journée le carré de la rentabilité observée ce jour-là pour lancer les calculs du modèle EWMA.

19.18 Prenons un modèle GARCH(1,1) avec les paramètres $\alpha = 0{,}03$, $\beta = 0{,}95$ et $\omega = 0{,}000002$.

a. Quel est le niveau moyen de volatilité de long terme ?

b. Si la volatilité est actuellement de 1,5 % par jour, quelle est votre estimation de la volatilité à 20, 40 et 60 jours ?

c. Quelle volatilité devrait être utilisée pour évaluer des contrats d'options d'échéance 20, 40 et 60 jours ?

d. Supposez qu'un événement induise une augmentation de la volatilité actuelle de 0,5 %, la faisant passer à 2 % par jour. Estimez l'effet de cette volatilité dans 20, 40 et 60 jours.

e. Dans quelles proportions l'événement s'étant produit aujourd'hui va-t-il se répercuter sur la volatilité utilisée pour évaluer les options d'échéance 20, 40 et 60 jours ? Réalisez ces estimations en utilisant les équations (19.14) et (19.15).

Chapitre 20

Le risque de crédit

La mesure de VaR (étudiée au chapitre 18) et les lettres grecques (présentées au chapitre 15) ont pour objet de quantifier le risque de marché. Dans ce chapitre, nous considérons un autre type de risque important : le risque de crédit.

La plupart des institutions financières consacrent des ressources considérables à la mesure et à la gestion de ce risque. De plus, les autorités de contrôle exigent des capitaux propres suffisants pour faire face à ces risques (ces capitaux viennent s'ajouter au capital dévolu à la couverture du risque de marché, illustré dans l'encadré 18.1).

La possibilité de défaut de la part des emprunteurs, des contreparties dans les transactions d'actifs dérivés et des émetteurs d'obligations met les banques ou les institutions financières face à un risque de crédit significatif. Dans ce chapitre, nous cherchons à quantifier ce risque. Nous décrivons tout d'abord les principales méthodes d'estimation des probabilités de défaut. Nous insistons sur la différence entre les probabilités réelles et les probabilités risque-neutre de défaut et nous examinons la nature du risque de crédit sur le marché OTC des actifs dérivés, ainsi que les clauses pouvant être introduites dans les contrats pour réduire ce type de risque. Enfin, nous présentons le phénomène de corrélation des défauts, les copulas gaussiennes et la VaR de crédit.

Au chapitre 21, nous nous appuierons sur les résultats de ce chapitre pour analyser les dérivés de crédit. Ce sont des actifs dérivés dont les payoffs dépendent d'une façon ou d'une autre du risque de crédit d'une ou plusieurs entreprises ou d'un ou plusieurs États.

20.1 Les notations

Les agences de rating comme Moody's ou Standard & Poor's sont spécialisées dans la notation des obligations émises par les entreprises. Dans le système élaboré par Moody's, la meilleure note est Aaa ; les obligations qui reçoivent cette note sont considérées comme ayant une probabilité de défaut quasi nulle. Les ratings suivants sont Aa, A,

Baa, Ba, B et Caa. Seules les obligations dont la note est supérieure à Baa sont considérées comme relativement sûres (*investment grade*). Les ratings correspondants chez S&P sont AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC. Les catégories de notes, aussi bien chez Moody's que chez S&P, font l'objet de diverses subdivisions. Par exemple, Aa est divisée en Aa1, Aa2 et Aa3 chez Moody's, A est divisée en A1, A2, A3 chez S&P, etc. Seules les catégories Aaa et AAA ne font pas l'objet de subdivisions.

20.2 Les probabilités de défaut historiques

Le tableau 20.1 est caractéristique des données fournies par les agences de rating. Il montre l'évolution des taux de défaut en fonction de l'horizon pour une entreprise située à un niveau de note donné. Par exemple, une société notée Baa a une probabilité de 0,2 % de faire défaut dans l'année, une probabilité de 0,57 % de faire défaut dans les deux ans, etc. On peut déduire de ce tableau la probabilité qu'une société fasse défaut une année donnée. La probabilité qu'une entreprise notée Baa fasse défaut la deuxième année est d'environ 0,57 % – 0,20 % = 0,37 %.

Le tableau 20.1 montre que pour la catégorie investissement la probabilité de défaut tend à être une fonction croissante de l'horizon (les probabilités qu'une société notée A fasse défaut en année 1, 2, 3 ou 4 sont respectivement 0,02 %, 0,07 %, 0,14 % et 0,15 %). Cela vient du fait que l'emprunteur est considéré initialement comme peu risqué et qu'au fur et à mesure que le temps passe, la possibilité de voir sa solvabilité se dégrader augmente. En revanche, pour les obligations risquées à la date initiale, la probabilité de défaut est souvent une fonction décroissante de l'horizon. Par exemple, une société notée Caa a des probabilités de défaillance les quatre premières années respectivement égales à 23,65 %, 13,55 %, 10,82 % et 7,54 %. Cela s'explique par le fait que pour ce type d'entreprise l'année ou les deux années à venir sont critiques. Si elles se passent sans encombre, la situation s'améliore ensuite dans la plupart des cas.

Tableau 20.1 : Probabilités de défaut cumulées (en %), 1970-2003

Maturité	1	2	3	4	5	7	10	15	20
Aaa	0,00	0,00	0,00	0,04	0,12	0,29	0,62	1,21	1,55
Aa	0,02	0,03	0,06	0,15	0,24	0,43	0,68	1,51	2,70
A	0,02	0,09	0,23	0,38	0,54	0,91	1,59	2,94	5,24
Baa	0,20	0,57	1,03	1,62	2,16	3,24	5,10	9,12	12,59
Ba	1,26	3,48	6,00	8,59	11,17	15,44	21,01	30,88	38,56
B	6,21	13,76	20,65	26,66	31,99	40,79	50,02	59,21	60,73
Caa	23,65	37,20	48,02	55,56	60,83	69,36	77,91	80,23	80,23

Sources : Moody's Investors Service

L'intensité de défaut

Du tableau 20.1 on peut déduire la probabilité qu'une obligation notée Caa fasse défaut pendant la troisième année sous la forme 48,02 % – 37,20 % = 10,82 %. Cette quantité sera appelée « probabilité non conditionnelle de défaut ». C'est la probabilité de défaut la troisième année, vue de la date 0. Mais la probabilité que la société survive jusqu'à la fin de l'année 2 est égale à 100 % – 37,20 % = 62,80 %. En conséquence, la probabilité que le défaut survienne au cours de la troisième année, sachant que l'entreprise n'a pas fait défaut avant, est égale à 0,1082 / 0,6280 = 17,23 %. Ces probabilités conditionnelles sont appelées *taux d'intensité du défaut*. Le taux de 17,23 % qui vient d'être calculé concerne une année. Supposons qu'on souhaite une mesure de même nature sur un intervalle de longueur Δt. L'intensité du défaut, notée $\lambda(t)$, à la date t est définie de sorte que le produit $\lambda(t)\Delta t$ soit la probabilité de défaut dans l'intervalle compris entre t et $t+\Delta t$, conditionnelle à l'absence de défaut avant t. Si $V(t)$ est la probabilité de survie cumulée jusqu'à la date t, c'est-à-dire la probabilité que le défaut ne survienne pas avant la date t, on a :

$$V(t+\Delta t) - V(t) = -\lambda(t)V(t)\Delta t$$

En passant à la limite, on peut écrire :

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\lambda(t)V(t)$$

On en déduit alors :

$$V(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right)$$

Notons $Q(t)$ la probabilité de défaut jusqu'à la date t. On peut écrire :

$$\begin{aligned} Q(t) &= 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\bar{\lambda}(t)t\right) \qquad (20.1) \end{aligned}$$

où $\bar{\lambda}(t)$ est l'intensité de défaut moyenne entre 0 et t.

20.3 Les taux de recouvrement

Les créanciers d'une entreprise qui fait défaut vont chercher à récupérer les sommes qui leur sont dues, éventuellement par des moyens judiciaires[1]. Dans certains cas, l'entreprise fait l'objet d'une restructuration et les créanciers acceptent de ne récupérer qu'une partie de ce qu'ils ont prêté. Dans d'autres situations, l'entreprise est liquidée, les actifs sont vendus et les montants retirés de la vente sont utilisés pour rembourser tout ou partie des créanciers. Toutes les créances n'ont pas le même ordre de priorité

1. Aux USA, les détenteurs d'obligations sont en droit de réclamer la valeur faciale de l'obligation plus le coupon couru.

et certaines sont remboursées avant d'autres. Les salariés et le fisc passent avant les obligataires.

Le taux de recouvrement pour une obligation est normalement défini comme la valeur de l'obligation juste après le défaut ; il est exprimé en pourcentage de la valeur faciale. Le tableau 20.2 donne des exemples de ces taux de recouvrement selon l'ordre de priorité de la dette considérée. Par exemple, la dette senior garantie traduit un taux de recouvrement moyen de 51,6 %, alors que la dette junior subordonnée ne donne qu'un taux de 24,5 %.

Tableau 20.2 : Taux de recouvrement des obligations corporate en pourcentage de la valeur faciale, 1982-2003

Classe	Taux de recouvrement moyen (en %)
Senior garantie	51,6
Senior non garantie	36,1
Senior subordonnée	32,5
Subordonnée	31,1
Junior subordonnée	24,5

Sources : Moody's Investors Service

Les taux de recouvrement présentent une corrélation négative significative avec les taux de défaut. L'agence Moody's a analysé les taux de défaut et de recouvrement chaque année depuis 1982. Il apparaît une relation affine entre ces deux variables sous la forme[2] :

$$\text{Taux de recouvrement moyen} = 50{,}3 - 6{,}3 \times \text{Taux moyen de défaut}$$

où les deux taux sont mesurés en pourcentage.

20.4 L'estimation des probabilités de défaut à partir des prix d'obligations

La probabilité de défaut d'une entreprise peut être estimée à partir des obligations qu'elle a émises. L'hypothèse sous-jacente est que la seule raison pour qu'une obligation d'entreprise cote un prix moins élevé qu'une obligation d'État est liée à la

2. Voir D. T. Hamilton, P. Varma, S. Ou et R. Cantor, « Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers », Moody's Investors Service, janvier 2004. Le R^2 de la régression est de 0,6. La corrélation est analysée dans E. I. Altman, B. Brady, A. Resti et A. Siromi, « The Link between Default and Recovery Rates : Implications for Credit Risk Models and Procyclicality », Working Paper, New York University, 2003.

possibilité du défaut[3]. Considérons tout d'abord un raisonnement approximatif. Supposons que le taux actuariel d'une obligation corporate soit supérieur de 200 points de base au taux de l'obligation sans risque (de défaut) correspondante, et que le taux de recouvrement attendu en cas de défaut soit de 40 %. Le détenteur de l'obligation corporate doit s'attendre à perdre 200 bp (ou 2 % par an) du fait des défauts possibles. Cela donne une estimation de la probabilité de défaut une année donnée, conditionnelle à l'absence de défaut préalable, égale à :

$$h = \frac{s}{1 - R} \tag{20.2}$$

où h est l'intensité annuelle de défaut, s est le spread entre l'obligation corporate et l'obligation sans risque correspondante et R est le taux de recouvrement attendu.

Un calcul plus précis

Supposons maintenant que l'obligation considérée ait une maturité de 5 ans et paie un taux de coupon de 6 % par an, payé semestriellement. Le taux actuariel (continu) de cette obligation est supposé égal à 7 %. Cela donne un taux sans risque (continu) de 5 %. Les prix correspondant à ces données sont respectivement 95,34 pour l'obligation risquée et 104,09 pour l'obligation sans risque. La perte espérée sur les 5 ans du fait d'un défaut éventuel a une valeur actuelle de 104,09 – 95,34 = 8,75 \$. Notons Q la probabilité de défaut annuelle (supposée ici constante pour simplifier). Le tableau 20.3 donne la perte espérée en fonction de Q sous l'hypothèse que les défauts ne peuvent survenir qu'en milieu d'année (immédiatement avant le paiement du coupon), c'est-à-dire aux dates 0,5 ; 1,5 ; 2,5 ; 3,5 et 4,5. Les taux sans risque continus pour toutes les maturités sont supposés égaux à 5 %.

Tableau 20.3 : Calcul de la perte liée au défaut en fonction de la probabilité de défaut annuelle Q. Principal = 100 \$

Date	Prob. de défaut	Recouvr. (en \$)	Valeur sans risque	Perte en cas de défaut (en \$)	Coefficient d'actual.	Valeur actuelle espérée de la perte
0,5	Q	40	106,73	66,73	0,9753	61,89Q
1,5	Q	40	105,97	65,97	0,9277	59,69Q
2,5	Q	40	105,17	65,17	0,8825	57,52Q
3,5	Q	40	104,34	64,34	0,8395	55,38Q
4,5	Q	40	103,46	63,46	0,7985	53,28Q
Total						287,76Q

3. C'est une approximation puisque certains arguments comme les différences de liquidité peuvent aussi être à l'origine d'une différence de prix.

Pour illustrer ces calculs, considérons la ligne associée à la date 3,5 dans le tableau 20.3. La valeur espérée de l'obligation sans risque à cette date s'écrit :

$$3 + 3e^{-0{,}05\times0{,}5} + 3e^{-0{,}05\times1} + 103e^{-0{,}05\times1{,}5} = 104{,}34$$

Compte tenu du taux de recouvrement défini à la section précédente, le montant moyen reçu en cas de défaut est de 40, ce qui correspond à une perte de 104,34 − 40 = 64,34 en cas de défaut. La valeur actuelle de cette somme est 54,01. En conséquence, la perte espérée vaut 54,01Q.

La perte espérée totale est 288,48Q. En égalisant cette expression à 8,75, on trouve la probabilité Q = 3,03 %. Au cours de ces calculs, nous avons supposé que Q est constante et que les défauts éventuels surviennent en milieu d'année. On peut généraliser cette méthode en supposant que les défauts peuvent survenir plus fréquemment. En fait, au lieu de supposer que la probabilité non conditionnelle est fixe, on peut supposer une intensité de défaut fixe ou de toute forme souhaitée si on veut faire dépendre cette fonction du temps. Lorsque plusieurs obligations d'échéances différentes sont disponibles, on peut construire une structure par termes des probabilités de défaut. Supposons par exemple qu'on dispose d'obligations de maturités 3, 5, 7 et 10 ans. On peut utiliser la première pour estimer la probabilité de défaut annuelle sur les trois premières années, la deuxième pour estimer les probabilités pour les années 4 et 5, la troisième pour les années 6 et 7 et la dernière pour les années 8, 9 et 10 (voir exercices 20.14 et 20.26). La technique utilisée ici est analogue à la méthode de bootstrap employée à la section 4.5 pour construire la courbe des taux zéro-coupon.

Le taux sans risque

Quand on s'appuie sur des prix d'obligations pour déterminer les probabilités de défaut, un des points essentiels est le concept de « taux sans risque » ou celui d'obligation sans risque ». Dans l'équation (20.2), le spread s est l'écart de taux actuariel entre l'obligation corporate et l'obligation sans risque. Dans le tableau 20.3, la valeur de l'obligation sans risque doit être calculée en utilisant le taux sans risque. En pratique, ce sont les obligations d'État qui servent de référence pour déterminer les taux sans risque pertinents dans le problème traité ici (par exemple, la cotation d'une obligation corporate peut être faite directement en spread par rapport à l'obligation d'État de référence).

Comme nous l'avons évoqué à la section 4.1, les traders utilisent habituellement les taux LIBOR/swap comme proxy des taux sans risque. Ils les utilisent aussi pour calculer les probabilités de défaut. Par exemple, dans l'équation (20.2), le spread s est l'écart entre le taux de l'obligation et le taux de swap correspondant. En fait, c'est ainsi que les facteurs d'actualisation du tableau 20.3 ont été calculés. Les CDS ou *credit default swaps* qui seront analysés au chapitre suivant peuvent aussi être utilisés pour inférer le taux sans risque utilisé par les traders. En général, on constate que

ce taux est de l'ordre de LIBOR – 10 bp[4]. Cette estimation est plausible ; en effet, comme nous l'avons vu à la section 7.5, le risque de crédit contenu dans un taux de swap correspond au risque de crédit associé à des prêts de 6 mois à une contrepartie notée AA, et 10 points de base constituent une prime de risque raisonnable dans cette configuration.

Les swaps d'actifs (asset swaps)

En pratique, les cotations des swaps d'actifs sont souvent utilisées par les traders pour extraire des prix d'obligations les probabilités de défaut, sous l'hypothèse que la courbe ZC LIBOR est la courbe sans risque.

Pour montrer comment fonctionnent ces swaps, considérons le cas d'un asset swap qui affiche un spread de 150 bp. Trois situations sont envisageables :

1. L'obligation cote sa valeur faciale, disons 100. Le swap met en jeu une entreprise, notée A, qui paie le coupon, et une autre, notée B, qui paie LIBOR + 150 bp[5].
2. L'obligation cote moins que sa valeur faciale, disons 95. Le swap est alors construit de sorte que, en plus des coupons, l'entreprise A paye 5 $ par tranche de 100 $ de nominal.
3. L'obligation cote plus que sa valeur faciale, disons 108. L'entreprise B devrait alors payer 8 $ de principal par tranche de 100 $ de nominal.

Le résultat de tout ceci est que la valeur actuelle liée au spread du swap d'actifs correspond à la différence de prix entre une obligation sans risque et l'obligation risquée de mêmes caractéristiques. Ici, le taux sans risque est supposé égal au taux LIBOR/swap (voir exercice 20.23).

Considérons à nouveau l'exemple du tableau 20.3 avec une courbe de taux sans risque plate à 5 %. Supposons qu'au lieu de connaître le prix de l'obligation nous sachions seulement que le spread est de 150 bp. Dans ce cas, la différence de prix entre obligation risquée et obligation non risquée est la valeur actuelle de ces 150 points de base sur 5 ans. En considérant des paiements semestriels, cela fait 6,55 $ pour 100 $ de nominal.

La perte totale du tableau 20.3 serait donc égale à 6,55 $ dans ce cas, ce qui serait équivalent à une probabilité de défaut égale à 6,55 / 288,48 = 2,27 %.

---

4. Voir J. Hull, M. Predescu et A. White, « The Relationship between Credit Default Swap Spreads, Bond Yields and Credit Rating Announcements », *Journal of Banking and Finance*, 28 (novembre 2004), 2789-2811.

5. Notez que ce sont les coupons attendus qui sont échangés. Les échanges ont lieu indépendamment de la survenance d'un défaut.

20.5 La comparaison des estimations de probabilités de défaut

Les probabilités de défaut estimées à partir d'historiques de données sont plus faibles que celles déduites des prix d'obligations. Le tableau 20.4 illustre ce phénomène[6]. Il montre, pour les entreprises débutant avec un rating donné, l'intensité moyenne du défaut sur une période de 7 ans calculée à partir de (a) les données historiques et (b) les prix d'obligations.

Le calcul des intensités de défaut sur données historiques est fondé sur l'équation (20.1) et sur le tableau 20.1. De l'équation (20.1) on déduit :

$$\bar{\lambda}(7) = -\frac{1}{7}\ln\left[1 - Q(7)\right]$$

où $\bar{\lambda}(7)$ désigne l'intensité moyenne du défaut à la date t et $Q(t)$ est la probabilité cumulée de défaut jusqu'à la date t. Les valeurs de $Q(7)$ sont obtenues directement dans le tableau 20.1. Par exemple, pour une entreprise notée A, on a $Q(7) = 0{,}0091$. L'intensité moyenne du défaut est alors :

$$\bar{\lambda}(7) = -\frac{1}{7}\ln\left(0{,}9909\right) = 0{,}0013$$

Les calculs fondés sur les prix d'obligations sont déduits de l'équation (20.2) et des taux actuariels fournis par Merrill Lynch. Les résultats indiqués ici sont des moyennes sur la période allant de décembre 1996 à juillet 2004. Le taux de recouvrement est supposé égal à 40 % et, pour les raisons évoquées dans la section précédente, le taux sans risque considéré est le taux de swap à 7 ans moins 10 bp. Par exemple, pour les obligations notées A, le taux donné par Merrill Lynch est de 6,274 %. Le taux de swap moyen est de 5,605 %, si bien que le taux sans risque retenu est de 5,505 %. Cela conduit à une intensité moyenne du défaut égale à :

$$\frac{0{,}06274 - 0{,}05505}{1 - 0{,}4} = 0{,}0128$$

Le tableau 20.4 montre que le ratio des probabilités calculées selon les deux méthodes tend à décroître quand le rating des entreprises devient moins bon mais que ce ratio est très élevé pour les entreprises les mieux notées. En revanche, la différence des probabilités est une fonction décroissante du rating.

6. Les tableaux 20.4 et 20.5 sont tirés de J. Hull, M. Predescu et A. White, « Bond Prices, Default Probabilities and Risk Premiums », *Journal of Credit Risk*, Vol. 1, n° 2, 2005, 53-60.

Tableau 20.4 : Intensité moyenne de défaut (en % par an) pour des obligations à 7 ans

Rating	Intensité de défaut (données historiques)	Intensité de défaut (prix d'obligations)	Ratio	Différence
Aaa	0,04	0,67	16,8	0,63
Aa	0,06	0,78	13,0	0,72
A	0,13	1,28	9,8	1,15
Baa	0,47	2,38	5,1	1,91
Ba	2,47	5,07	2,1	2,67
B	7,69	9,02	1,2	1,53
Caa	16,90	21,30	1,3	4,40

Le tableau 20.5 propose une autre approche pour interpréter ces résultats. Il donne les excès de rentabilité (par rapport au taux sans risque défini précédemment) exigés sur les différentes catégories d'obligations. Si on examine à nouveau les obligations notées A, on observe un spread de 120 bp. Ces 120 bp se décomposent en 43 bp constituant la différence entre les obligations d'État et le taux sans risque (taux LIBOR/swap moins 10 bp), 8 bp couvrant les défauts attendus (ils viennent de la probabilité de défaut calculée à partir des données historiques) et 69 bp représentant l'excès de rentabilité exigé compte tenu du risque. Les tableaux 20.4 et 20.5 montrent que des écarts importants entre les probabilités de défaut conduisent en définitive à des écarts assez faibles en termes d'excès de rentabilité lié au risque de défaut perçu. Cet excès de rentabilité tend toutefois à augmenter quand la qualité du crédit diminue[7].

Tableau 20.5 : Rentabilités en excès du taux sans risque (en bp)

Rating	Spread sur obligations du Trésor	Spread obligations du Trésor et taux sans risque	Spread sur données historiques	Excès de rentabilité
Aaa	83	43	2	38
Aa	90	43	4	43
A	120	43	8	69
Baa	186	43	28	115
Ba	347	43	144	160
B	585	43	449	93
Caa	1321	43	1014	264

7. Le résultat des sociétés notées B va cependant à l'encontre de la tendance générale.

Univers risque-neutre versus univers réel

Les probabilités de défaut déduites des prix d'obligations sont des probabilités risque-neutre. Pour en expliquer la raison, considérons les calculs réalisés pour construire le tableau 20.3. Ils supposent que les pertes liées au défaut peuvent être actualisées au taux sans risque. Les principes d'évaluation indiquent que cette démarche est valide si l'espérance des pertes a été évaluée dans l'univers risque-neutre, c'est-à-dire si la probabilité Q du tableau 20.3 est une probabilité risque-neutre.

En revanche, les probabilités de défaut déduites des historiques de données sont des probabilités réelles (parfois qualifiées de « physiques » ou « historiques »). L'excès de rentabilité calculé dans la dernière colonne du tableau 20.5 provient ainsi directement de la différence entre univers risque-neutre et univers réel.

Pourquoi observe-t-on de telles différences entre les probabilités de défaut dans les deux univers ? C'est un peu comme si on se demandait pourquoi les obligations corporate ont un taux actuariel plus élevé que les obligations d'État. On peut évoquer plusieurs arguments :

1. Les obligations corporate sont moins liquides que les obligations d'État. C'est donc un facteur de risque supplémentaire.
2. Les probabilités de défaut subjectives estimées par les opérateurs de marché peuvent être plus élevées que celles fournies par le tableau 20.1. Celles-ci peuvent en effet intégrer des scénarios extrêmes qui n'apparaissent pas dans les données de la période 1970-2003[8].
3. Les défauts ne sont pas indépendants d'une entreprise à l'autre (effet sectoriel, par exemple). C'est la raison essentielle justifiant les résultats des tableaux 20.4 et 20.5. Il existe des périodes où les taux de défaut dans leur ensemble sont importants et d'autres où ils sont faibles[9]. Ces corrélations impliquent l'existence d'un risque systématique (c'est-à-dire qui ne peut être diversifié), et celui-ci doit être rémunéré. La variation des taux de défaut dans le temps est aussi due à l'évolution des conditions économiques générales, et des phénomènes de contagion sont susceptibles d'apparaître, le défaut d'une entreprise pouvant entraîner le défaut d'autres entreprises en relation avec elle.
4. La distribution de probabilités des rentabilités obligataires est très asymétrique, avec une borne supérieure relativement bien identifiée (à cause du paiement des coupons). Il est ainsi plus difficile de diversifier les risques d'un portefeuille obli-

8. En plus du tableau 20.1 qui s'appuie sur les données de la période 1970-2003, Moody's calcule un tableau du même type pour la période 1920-2003. Quand on utilise ces données, les valeurs calculées dans le tableau 20.4 augmentent quelque peu. L'intensité de défaut des obligations Aaa passe de 4 bp à 6 bp. Pour les obligations notées Aa, elle passe de 6 bp à 22 bp, pour les A de 13 bp à 29 bp, et pour les Baa de 47 bp à 73 bp.

9. Pour s'en convaincre il suffit de consulter les données sur plusieurs années. Les statistiques de Moody's montrent qu'entre 1970 et 2003 le taux de défaut a varié de 0,09 % en 1979 à 3,81 % en 1981.

gataire que ceux d'un portefeuille actions[10]. Cela nécessite la détention d'un très grand nombre d'obligations ; en pratique, les portefeuilles détenus sont très imparfaitement diversifiés. Cela peut conduire les intervenants à exiger une rentabilité supplémentaire pour détenir ces titres.

À ce stade de la réflexion, il est naturel de se demander s'il vaut mieux utiliser les probabilités estimées sur données historiques ou les probabilités risque-neutre. La réponse est : cela dépend ! Selon l'objectif de l'analyse, le choix peut être différent. Les probabilités risque-neutre seront utilisées pour l'évaluation des dérivés de crédit et pour étudier l'impact du risque de crédit sur le prix de ces instruments financiers. Quand on cherchera à évaluer les pertes potentielles dans divers scénarios, on utilisera plutôt les probabilités historiques.

20.6 L'utilisation du prix des actions pour estimer les probabilités de défaut

Les approches précédentes sont essentiellement fondées sur le rating des entreprises. Certains analystes ont cependant fait remarquer que les prix des actions pouvaient fournir des informations pertinentes sur les probabilités de défaut. En 1974, Merton a proposé un modèle dans lequel les actions sont en fait vues comme des options sur les actifs de la société[11]. Pour simplifier, on considère dans ce modèle que la dette de l'entreprise est composée d'une seule obligation zéro-coupon de maturité T. Notons :

V_0 : valeur des actifs de l'entreprise aujourd'hui

V_T : valeur des actifs à la date T

E_0 : valeur des actions aujourd'hui

E_T : valeur des actions en T

D : montant de dette (intérêt et principal) à rembourser en date T

σ_V : volatilité des actifs

σ_E : volatilité des actions

Si $V_T < D$, il est rationnel pour l'entreprise (du moins en théorie) de faire défaut sur la dette à la date T ; la valeur des actions est nulle dans ce cas. Si, par contre, $V_T > D$, l'entreprise rembourse sa dette en T ; la valeur des actions s'écrit donc :

$$E_T = \max(V_T - D\,;\ 0)$$

Les actions sont donc un call sur la valeur des actifs avec un prix d'exercice égal à la valeur de la dette à la date T. La formule de Black et Scholes donne alors la valeur des actions en date 0.

$$E_0 = V_0 N(d_1) - De^{-rT} N(d_2) \tag{20.3}$$

10. Voir J. D. Amato et E. M. Remolona, « The Credit Spread Puzzle », *BIS Quaterly Review*, 5, décembre 2003, 51-63.

11. Voir R. Merton, « On the Pricing of Corporate Debt : The Risk Structure of Interest Rates », *Journal of Finance*, 29 (1974), 449-70.

avec :

$$d_1 = \frac{\ln (V_0/D) + \left(r + \sigma_V^2/2\right) T}{\sigma_V \sqrt{T}}$$

et :

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T}$$

$N(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite calculée en x.

La valeur de la dette est aujourd'hui égale à $V_0 - E_0$.

Dans ces conditions, la probabilité que l'entreprise fasse défaut est égale à $N(-d_2)$; en effet :

$$P(V_T < D) = 1 - N(d_2) = N(-d_2)$$

Le calcul de cette probabilité nécessite V_0 et σ_V, qui ne sont pas directement observables. Par contre, si la société est cotée, E_0 est connue et σ_E peut être estimé. De plus, le lemme d'Itô implique :

$$\sigma_E E_0 = \frac{\partial E}{\partial V} \sigma_V V_0$$

Comme $\frac{\partial E}{\partial V} = N(d_1)$, on a :

$$\sigma_E E_0 = N(d_1) \sigma_V V_0 \tag{20.4}$$

Les équations (20.3) et (20.4) permettent alors d'estimer simultanément[12] V_0 et σ_V.

■ **Exemple 20.1**

Les actions d'une entreprise valent 3 millions d'euros et la volatilité de ces actions est 80 %. La dette de 10 millions d'euros sera remboursée dans un an. Le taux sans risque est 5 %. On a donc $E_0 = 3$, $\sigma_E = 0{,}8$, $r = 0{,}05$ et $D = 10$. La résolution des équations (20.3) et (20.4) donne $V_0 = 12{,}4$ et $\sigma_V = 0{,}2123$. Le paramètre d_2 est alors égal à 1,1408 et la probabilité de défaut est ainsi de 12,7 %. On obtient une valeur de la dette $V_0 - E_0 = 9{,}40$, alors qu'une dette sans risque équivalente vaudrait $10 \times e^{-0{,}05 \times 1} = 9{,}51$. L'espérance de perte sur cette dette est donc $\frac{9{,}51 - 9{,}40}{9{,}51} = 1{,}2\%$ de la valeur de la dette sans risque. Le taux de recouvrement espéré R en cas de défaut (voir équation (20.1)) est solution de :

$$0{,}127 = \frac{1 - (9{,}40/9{,}51)}{1 - R}$$

c'est-à-dire $R = 91$ %. Ce taux est aussi égal à (12,7 % – 1,2 %)/12,7 %.

12. Pour résoudre des équations non linéaires de la forme $F(x,y) = 0$ et $G(x,y) = 0$, on peut utiliser le solveur d'Excel en cherchant à minimiser la somme des carrés des deux fonctions.

Jusqu'à présent, nous avons supposé que la dette était remboursable à une date unique. En pratique, les remboursements peuvent être étalés dans le temps. La relation entre V_0 et E_0 est alors plus complexe, mais il reste possible d'utiliser l'approche optionnelle pour établir cette relation. La probabilité que l'entreprise fasse défaut peut être évaluée pour différentes dates futures.

Quelle est la performance du modèle de Merton dans l'estimation des probabilités de défaut par rapport aux proportions observées ? Les différences sont importantes entre les deux, mais cette méthode peut néanmoins être utile pour estimer les véritables probabilités de défaut. L'introduction de transformations monotones des probabilités de défaut obtenues par le modèle de Merton peut donner une bonne estimation des probabilités réelles et des probabilités risque-neutre de défaut[13].

20.7 Le risque de crédit dans les transactions sur actifs dérivés

Nous avons jusqu'à présent focalisé notre attention sur l'estimation de la probabilité qu'une entreprise ne puisse faire face à ses engagements à différentes dates futures. Nous cherchons maintenant à estimer la perte espérée, conditionnellement à la réalisation du défaut. En d'autres termes, si le défaut survient, quelle sera la perte moyenne ? En multipliant cette perte espérée en cas de défaut (PCD dans la suite) par la probabilité de défaut, on obtient une estimation de la perte (non conditionnelle) espérée liée au risque de défaut.

Pour les actifs dérivés, la PCD est difficile à évaluer car l'incertitude est plus grande sur la valeur qui pourrait être due au créancier en cas de défaut. On distingue dans ce domaine trois types d'actifs dérivés :

1. Ceux qui sont toujours un engagement (ou un passif).
2. Ceux qui sont toujours un actif.
3. Ceux qui peuvent être soit un actif, soit un passif.

Les dérivés de la première catégorie ne présentent pas de risque de crédit. Lorsqu'une entreprise, appelée A, a par exemple vendu une option à une entreprise B et que B fait défaut, il n'y a pas de perte pour A puisque la position de A ne devait engendrer que des flux négatifs.

Les actifs de la deuxième catégorie présentent toujours du risque de crédit. Dans l'exemple précédent, B a acheté l'option et si A fait défaut, il y a le risque que A ne puisse payer les flux de l'option à l'échéance. Pour les actifs de la dernière catégorie, la réponse est, comme on l'imagine, moins tranchée. Par exemple, au moment de la

13. Moody's KMV propose une telle transformation pour estimer les probabilités réelles. Elle est connue sous le sigle EDF pour *expected default frequency*. CreditGrades utilise le modèle de Merton pour estimer les spreads de crédit, ce qui revient implicitement à estimer les probabilités risque-neutre de défaut.

signature d'un contrat de swap de taux entre A et B, la valeur du swap est nulle ou très proche de zéro. Après quelques semaines, les taux évoluent et la valeur du swap peut devenir positive ou négative pour A. Si la contrepartie B fait défaut alors que la valeur du swap est positive pour A, il y a risque de perte. Par contre, si la valeur du swap est négative pour A au moment du défaut de B, il n'y a pas de perte possible[14].

L'ajustement des prix des actifs dérivés pour tenir compte du risque de crédit

Comment une institution financière devrait-elle ajuster le prix d'un actif dérivé pour tenir compte du risque de crédit de sa contrepartie ? Considérons un actif dérivé dont la valeur aujourd'hui est notée f_0 en supposant l'absence de défauts futurs. Notons t_1, $t_2, \ldots, t_n$ les dates possibles de défaut, f_i les valeurs futures aux dates t_i en l'absence de défauts, q_i la probabilité risque-neutre de défaut en date t_i, et enfin R le taux de recouvrement espéré[15].

L'exposition au risque de l'institution financière à la date t_i est représentée par la perte potentielle qu'elle est susceptible de subir. Elle s'écrit $\max(f_i\ ;\ 0)$. Supposons que le montant de recouvrement en cas de défaut soit égal à R fois le montant de l'exposition au risque et que, par ailleurs, le taux de recouvrement et la probabilité de défaut soient indépendants de la valeur de l'actif dérivé (en l'absence de défaut). La perte espérée sous la probabilité risque-neutre s'écrit alors :

$$q_i(1 - R)\hat{E}\left[\max(f_i; 0)\right]$$

où $\hat{E}$ désigne l'espérance dans l'univers risque-neutre. En actualisant, on obtient un coût potentiel des défauts égal à :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \tag{20.5}$$

où $u_i = q_i(1 - R)$ et v_i est la valeur actuelle d'un actif financier qui paie le montant de l'exposition au risque de défaut sur l'actif dérivé à la date t_i.

Considérons à nouveau les trois catégories d'actifs dérivés évoquées précédemment. La première est facile à analyser. La valeur de f_i est toujours négative et la perte espérée en cas de défaut, donnée par l'équation (20.5), est nulle. En ce qui concerne la deuxième catégorie, f_i est toujours positive et l'expression $\max(f_i\,;0)$ est toujours égale à f_i. Par conséquent, sa valeur actuelle est toujours f_0[16]. La perte espérée est alors le produit de f_0, de $(1 - R)$ et de la probabilité cumulée de défaut pendant la durée de vie de l'actif dérivé.

---

14. Remarquons qu'une entreprise fait défaut à cause d'un problème global concernant la valeur de ses actifs par rapport à celle de ses engagements, et non du fait de la valeur d'une transaction particulière.

15. La probabilité de défaut pourrait être évaluée à partir de prix d'obligations comme nous l'avons montré à la section 20.4.

16. On suppose qu'il n'y a pas de paiements intermédiaires sur l'actif dérivé avant t_i.

■ **Exemple 20.2**

Considérons une option à deux ans négociée sur le marché OTC dont la valeur (en l'absence de défaut) serait de 3 €. Supposons que la firme qui vend l'option a une probabilité risque-neutre de défaut, pendant la période de deux ans, égale à 4 % et que le taux de recouvrement soit de 25 %. Le coût espéré du défaut est alors égal à $3 \times 0{,}04 \times (1 - 0{,}25) = 0{,}09$ €. L'acheteur de l'option ne devrait payer dans ce cas que 2,91 €.

Pour la troisième catégorie, le signe de f_i est incertain. La variable v_i est une option d'achat sur f_i avec un prix d'exercice nul. Une façon de calculer la valeur de ce call est de simuler les variables de marché sous-jacentes pendant la durée de vie de l'option. Parfois, des solutions quasi analytiques peuvent être obtenues (voir exercices 20.16 et 20.17).

Les analyses présentées ici supposent que la probabilité de défaut est indépendante de la valeur de l'actif dérivé (en l'absence de défaut). C'est une approximation raisonnable quand l'actif dérivé représente une faible part du portefeuille de la contrepartie ou quand la contrepartie utilise ces actifs dérivés à des fins de couverture. Quand la contrepartie souhaite conclure un grand nombre de contrats pour spéculer, il convient d'être méfiant si la transaction a une valeur largement négative pour la contrepartie, car la probabilité de défaut peut s'élever rapidement.

20.8 La réduction du risque de crédit

L'analyse présentée dans les sections précédentes conduit souvent à surévaluer le risque de crédit lié à une transaction sur des actifs dérivés. Cela est simplement lié au fait que de nombreuses clauses de ces contrats ont pour objet de réduire ce type de risque.

La compensation (netting)

Les clauses de compensation (netting) des contrats établis par les institutions financières peuvent compliquer l'estimation des pertes. Ces clauses stipulent en général que si B fait défaut sur un contrat signé avec A, alors B fait défaut sur tous les contrats en cours avec A. Cette clause peut substantiellement réduire le risque de crédit. En effet, supposons que A ait trois contrats en cours avec B. Les valeurs des trois contrats pour A sont respectivement +10, +30 et –25 millions d'euros. Les valeurs des contrats sont alors pour B –10, –30 et +25 millions. En l'absence de netting, B ferait défaut sur les deux premiers contrats et conserverait le troisième. La perte pour A serait alors de 40 millions. Le netting permet de réduire cette perte à 10 + 30 – 25 = 15 millions[17].

17. Notez que, si le troisième contrat valait –45 millions au lieu de –25 millions, la contrepartie choisirait de ne pas faire défaut et il n'y aurait pas de perte pour l'institution financière.

Supposons que A ait un portefeuille de N contrats d'actifs dérivés avec B et notons V_i la valeur du i-ième contrat pour A, avec un taux de recouvrement égal à R en cas de défaut. Classiquement, les actifs dérivés ne sont pas garantis en cas de défaut et le montant exigible par le créancier est la valeur de l'actif en l'absence de risque de défaut. En l'absence de netting, la perte de l'institution s'écrit :

$$(1-R)\sum_{i=1}^{N}\max(V_i;0)$$

La clause de netting ramène la perte à :

$$(1-R)\max\left(\sum_{i=1}^{N}V_i;0\right)$$

Sans netting, la perte est le payoff engendré par un portefeuille de calls sur la valeur de chaque contrat, chaque option ayant un prix d'exercice nul. Avec le netting, la perte est le payoff d'un seul call, de prix d'exercice nul, sur le portefeuille de contrats. Or la valeur d'un call sur un portefeuille est toujours inférieure ou égale à la valeur d'un portefeuille de calls sur les actifs individuels qui composent le portefeuille.

Le nantissement

Une autre possibilité de réduction du risque de crédit est envisageable : le « nantissement » (*collateralization*). Dans ce cas, la partie B peut être obligée de garantir sa dette par des actifs ou par un tiers ; si la garantie est supérieure à la valeur absolue de la somme des contrats pour B, le risque de défaut est couvert. Dans l'exemple précédent, avec trois contrats de valeur –10, –30 et +25 millions pour B, si B dépose des garanties pour un montant supérieur à 15 millions, le risque de crédit est couvert. Cette technique suppose un modèle commun d'évaluation des contrats pour les deux parties et un accord sur le taux de rémunération des actifs déposés en garantie. De plus, les garanties déposées doivent être ajustées en permanence, avec la possibilité de dénouer le contrat si une des parties ne peut ajuster le niveau des garanties. En fait, ce système fonctionne sur le même principe que le système d'appels de marge des marchés de contrats futures ou d'options.

Clause en cas de dégradation

On peut aussi atténuer le risque de crédit en spécifiant une clause impliquant la fin du contrat dans le cas d'une dégradation de la note d'une des deux parties (*downgrade triggers*). Le remboursement effectué par le débiteur est alors inscrit au contrat, ou du moins, la formule de calcul de ce montant est prédéfinie. Le risque de crédit n'est pourtant pas éliminé par cette clause. Il peut en effet arriver que le défaut survienne très rapidement, même pour une entreprise préalablement bien notée. Il n'est alors pas certain que l'entreprise qui fait défaut soit capable de payer le montant prévu au contrat.

La méthode la plus simple et la plus générale de réduction du risque de crédit reste la diversification. La plupart des grandes institutions financières établissent des règles internes définissant les limites d'exposition au risque avec telle ou telle entreprise, tel ou tel secteur d'activité, tel ou tel pays. Les traders ne sont pas autorisés à prendre des positions qui conduiraient au dépassement de ces limites.

Les *downgrade triggers* fournissent une bonne protection à condition qu'on les utilise avec parcimonie. En effet, lorsqu'une entreprise conclut en grand nombre ce type de contrats avec ses contreparties, il n'est pas certain que ceux-ci soient toujours efficaces, comme le montre l'encadré 20.1.

Encadré 20.1 Les downgrade triggers et la faillite d'Enron

En décembre 2001, Enron, une des firmes américaines les plus importantes à l'époque, fit faillite. Encore peu de temps avant cette date, elle était notée dans la catégorie « investissement ». Juste avant la faillite, sa note était Baa3 chez Moody's et BBB– chez S&P. Le défaut était cependant, dans une certaine mesure, anticipé par le marché puisque le cours avait lourdement chuté dans la période précédant l'annonce de la banqueroute. La probabilité de défaut, estimée à partir des modèles de la section 20.6, s'était fortement accrue.

Enron avait conclu un grand nombre de contrats d'actifs dérivés avec des clauses de type downgrade triggers. Elles spécifiaient qu'en cas de dégradation dans la catégorie spéculative les contreparties avaient l'option de clore les positions. Supposons qu'Enron ait été dégradé dans cette catégorie en octobre 2001. Les contrats que les contreparties auraient choisi de clore auraient été ceux qui avaient une valeur négative pour Enron (et donc une valeur positive pour ces contreparties). Dans ce cas, Enron aurait dû verser des montants énormes et aurait été incapable de les assumer, ce qui aurait aussi conduit à sa faillite.

Cet exemple montre que les clauses liées à la dégradation ne sont efficaces que si elles sont utilisées avec parcimonie. Quand des montants très importants de contrats font l'objet de telles clauses, elles peuvent au contraire accélérer la faillite. On pourrait arguer du fait qu'Enron aurait de toute façon fait faillite et que deux mois ne font pas une grande différence. En fait, en octobre 2001, Enron avait encore une chance de survivre. Des tentatives avaient été menées pour intéresser d'autres compagnies du secteur de l'énergie, notamment Dynergy, au sauvetage d'Enron. Par conséquent, une faillite en octobre 2001 n'était dans l'intérêt ni des créanciers ni des actionnaires d'Enron.

Les agences de notation se trouvèrent aussi dans une position difficile ; dégrader Enron équivalait à un arrêt de mort, s'abstenir laissait une petite chance de survie à l'entreprise.

20.9 La corrélation des défauts

L'expression *corrélation des défauts* est utilisée pour traduire la tendance pour deux entreprises distinctes à faire toutes deux défaut dans un intervalle de temps réduit. Les raisons de ce phénomène sont multiples. Deux entreprises du même secteur industriel ou de même localisation géographique sont affectées par des événements semblables et peuvent rencontrer des difficultés financières simultanément du fait de l'occurrence de ces événements. Les conditions économiques générales sont aussi un facteur qui peut introduire une corrélation positive dans les défauts d'un ensemble d'entreprises. En conséquence, la corrélation des défauts signifie que le risque de crédit ne peut être complètement diversifié et que des phénomènes de contagion peuvent survenir. C'est la raison pour laquelle les probabilités risque-neutre de défaut sont plus élevées que les probabilités réelles (voir section 20.5).

On distingue deux types de modèles de corrélation des défauts : les modèles de forme réduite et les modèles structurels. Dans la première catégorie, les taux d'intensité de défaut sont censés suivre des processus stochastiques corrélés à l'évolution de variables macroéconomiques. Quand l'intensité du défaut pour la société A est élevée, celle de l'entreprise B aura aussi tendance à être élevée ; cette relation induit une corrélation positive des défauts des deux entreprises.

Ces modèles présentent l'avantage de lier les corrélations des défauts aux cycles économiques. Ils peuvent être paramétrés de façon à assurer la cohérence avec les données historiques ou les probabilités risque-neutre de défaut estimées à partir de prix d'obligations. À l'inverse, leur inconvénient majeur est de ne pouvoir reproduire qu'une gamme très limitée de structures de corrélations de défauts. Même si la corrélation est parfaite entre les taux d'intensité des défauts, la corrélation correspondante entre les défauts dans n'importe quelle période de temps reste très faible. Cela peut engendrer des problèmes dans certaines situations. Par exemple, quand deux entreprises opèrent dans le même secteur industriel et dans le même pays, la santé financière de l'une est en général étroitement liée à celle de l'autre. Le problème inhérent à cette modélisation peut cependant être résolu en autorisant des discontinuités (sauts) dans les taux d'intensité de défaut.

Les modèles structurels s'appuient sur une idée analogue à celle qui est développée à la section 20.6 ; une entreprise fait défaut si sa valeur passe en deçà d'un certain seuil. La corrélation des défauts peut être introduite par la spécification des processus stochastiques qui régissent l'évolution de la valeur des actifs des deux entreprises. L'avantage par rapport aux modèles de forme réduite est que des niveaux élevés de corrélation peuvent être atteints par le paramétrage des processus. La contrepartie de cette souplesse est qu'il n'est en général pas possible de restituer les probabilités de défaut historiques et/ou celles déduites des prix d'obligations.

La copula gaussienne pour modéliser la date de défaut

Une mesure de corrélation des défauts régulièrement utilisée est déduite de la distribution de probabilité de la date de défaut. Notons t_A et t_B les dates aléatoires

de défaut de A et B ; ces variables ne sont pas gaussiennes, cependant, si l'on peut trouver des fonctions u_A et u_B vérifiant :

$$u_A(t_A) = N^{-1}(Q_A(t_A))$$

et :

$$u_B(t_B) = N^{-1}(Q_B(t_B))$$

u_A et u_B sont alors des fonctions de t_A et t_B normalement distribuées. On définit alors la corrélation des défauts par :

$$\rho_{AB} = \text{corr}[u_A(t_A),\ u_B(t_B)]$$

Supposons que la loi jointe de $(u_A(t_A),\ u_B(t_B))$ soit gaussienne ; cela signifie que la distribution jointe des dates de défaut peut être décrite par les distributions $Q_A(t_A)$, $Q_B(t_B)$ et par ρ_{AB}. On parle alors de *copula gaussienne* pour définir ce type de structure de corrélations.

L'intérêt de cette approche est de pouvoir être appliquée à de nombreuses sociétés et d'autoriser la définition de corrélations entre des variables non gaussiennes, en supposant que des transformées simples de ces variables peuvent être considérées comme gaussiennes[18].

■ **Exemple 20.3**

Supposons que nous souhaitions simuler les défauts de 10 entreprises dans les 5 années à venir. Les corrélations définies à partir des copulas sont toutes égales à 0,2. Les probabilités cumulées de défaut pour chaque entreprise et pour les années 1 à 5 sont respectivement 1 %, 3 %, 6 %, 10 % et 15 %. Quand on utilise une copula gaussienne, on tire un échantillon d'une loi jointe gaussienne pour obtenir les $u_i(t_i)$, $i = 1, \ldots, 10$ en tenant compte des corrélations. On convertit ensuite ces valeurs en dates de défaut. Quand la valeur tirée est inférieure à –2,33 (correspondant à une probabilité inférieure à 1 %), le défaut survient dans la première année. Quand cette valeur est comprise entre –2,33 et –1,88 (correspondant à une probabilité de 3 %), le défaut survient la deuxième année, et ainsi de suite. Si la valeur tirée est supérieure à –1,04, liée à une probabilité de 15 %, on suppose qu'il n'y a pas défaut pendant les cinq années.

Facteurs communs dans la définition des structures de corrélation

Pour éviter de définir de manière individuelle les corrélations entre les $u_i(t_i)$, on utilise souvent un modèle à un facteur de la forme :

$$u_i(t_i) = a_i M + \sqrt{1 - a_i^2} Z_i \tag{20.6}$$

18. En première approximation, la copula gaussienne entre t_i et t_j est souvent supposée égale à la corrélation entre les rentabilités des actions des deux sociétés i et j.

M est un facteur commun qui affecte la probabilité de défaut de toutes les entreprises, alors que les Z_i sont des facteurs spécifiques aux différentes entreprises considérées. Ces variables sont supposées indépendantes et normalement distribuées. Les coefficients a_i sont des nombres compris entre –1 et +1 et la corrélation entre $u_i(t_i)$ et $u_j(t_j)$ est égale à $a_i a_j$[19].

Supposons que la probabilité qu'une firme i fasse défaut à la date T soit égale à $Q_i(T)$. En utilisant le modèle de copula gaussienne, le défaut survient si $N(u_i(t_i)) < Q_i(T)$ ou $u_i(t_i) < N^{-1}(Q_i(T))$. L'équation (20.6) implique alors :

$$a_i M + \sqrt{1-a_i^2} Z_i < N^{-1}(Q_i(T))$$

ou encore :

$$Z_i < \frac{N^{-1}(Q_i(T)) - a_i M}{\sqrt{1-a_i^2}}$$

Conditionnellement à une valeur M du facteur commun, la probabilité de défaut est donnée par :

$$Q_i(T\,|M) = N\left[\frac{N^{-1}(Q_i(T)) - a_i M}{\sqrt{1-a_i^2}}\right] \tag{20.7}$$

Un cas particulier du modèle gaussien à un facteur est celui où les distributions de probabilité du défaut sont identiques pour tout i et où les corrélations entre $u_i(t_i)$ et $u_j(t_j)$ sont les mêmes pour tous les couples (i,j). Supposons $Q_i(T) = Q(T)$ pour tout i et notons ρ la corrélation commune de sorte que $a_i = \sqrt{\rho}$ pour tout i. L'équation (20.7) devient :

$$Q(T\,|M) = N\left[\frac{N^{-1}(Q(T)) - \sqrt{\rho}M}{\sqrt{1-\rho}}\right] \tag{20.8}$$

La mesure de corrélation binomiale

Une mesure alternative de la corrélation des défauts utilisée par les agences de notation est la *mesure de corrélation binomiale*. Appelons A et B deux entreprises ; la corrélation binomiale des défauts est mesurée par le coefficient de corrélation entre :

1. Une variable égale à 1 si A fait défaut entre 0 et T, et égale à 0 sinon.
2. Une variable égale à 1 si B fait défaut entre 0 et T, et égale à 0 sinon.

La corrélation binomiale des défauts est alors définie par :

$$\beta_{AB}(T) = \frac{P_{AB}(T) - Q_A(T)\,Q_B(T)}{\sqrt{[Q_A(T) - Q_A^2(T)]\,[Q_B(T) - Q_B^2(T)]}} \tag{20.9}$$

19. Le paramètre a_i est parfois considéré comme un proxy de la corrélation entre la rentabilité de l'action de la société i et la rentabilité d'un indice de marché représentant un portefeuille bien diversifié.

où $P_{AB}(T)$ est la probabilité que A et B fassent toutes deux défaut entre 0 et T ; $Q_A(T)$ et $Q_B(T)$ sont les probabilités cumulées de défaut de A et B à l'horizon T. De manière générale, $\beta_{AB}(T)$ est une fonction croissante de T.

On peut alors écrire[20] :

$$P_{AB}(T) = M(u_A(T); u_B(T); \rho_{AB})$$

où $u_A(T) = N^{-1}(Q_A(T))$ et $u_B(T) = N^{-1}(Q_B(T))$. $M(a; b; \rho)$ est la probabilité que, dans un vecteur gaussien à deux composantes de corrélation ρ, la première soit inférieure ou égale à a et la seconde à b.

On en déduit :

$$\beta_{AB}(T) = \frac{M(u_A(T); u_B(T); \rho_{AB}) - Q_A(T)\,Q_B(T)}{\sqrt{[Q_A(T) - Q_A^2(T)]\,[Q_B(T) - Q_B^2(T)]}} \quad (20.10)$$

Cette relation montre que si $Q_A(T)$ et $Q_B(T)$ sont connus, $\beta_{AB}(T)$ peut être calculé à partir de ρ_{AB} et *vice versa*. En général, ρ_{AB} est significativement plus grand que $\beta_{AB}(T)$. Cela illustre le fait que l'ordre de grandeur d'une mesure de corrélation dépend de la façon dont cette mesure est définie.

■ **Exemple 20.4**

Supposons que les probabilités de défaut de deux entreprises soient de 1 % dans l'année à venir. On a alors $u_A(1) = -2{,}326 = u_B(1)$. Si la corrélation ρ_{AB} est égale à 0,20, on a $M(u_A(1)\,; u_B(1)\,; 0{,}2) = 0{,}000337$, et l'équation (20.10) montre que $\beta_{AB}(T) = 0{,}024$ quand $T = 1$.

20.10 La VaR (Value at Risk) de crédit

La VaR de crédit est définie comme la VaR de marché du chapitre 18. Le concept de VaR de crédit répond à la question suivante : quel niveau de perte a une probabilité supérieure à X de ne pas être dépassé dans une période de durée T ? L'horizon T est en général plus long pour la VaR de crédit que pour la VaR de marché. Classiquement, la première a un horizon de plusieurs mois, voire d'un an, alors que la seconde a un horizon habituel de 10 jours.

Considérons une banque possédant un large portefeuille de prêts. Supposons en première approximation que les probabilités de défaut soient identiques pour ces prêts et que les corrélations des différents couples soient égales. Quand on utilise le modèle de copula gaussienne, le membre de droite de l'équation (20.8) est approximativement égal au pourcentage de défauts avant la date T, exprimé en fonction de M. Le facteur M suit une loi normale centrée-réduite. Nous savons alors au niveau de confiance X % que sa

20. Voir la note technique n° 5 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr) pour le calcul de $M(a\,;\,b\,;\,\rho)$.

valeur sera supérieure à $N^{-1}(1-X) = -N^{-1}(X)$. Au niveau de confiance de X %, le pourcentage de pertes sur T années sur le portefeuille sera inférieur à $V(X,T)$, où :

$$V(X,T) = N\left[\frac{N^{-1}(Q(T)) + \sqrt{\rho}N^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}}\right] \quad (20.11)$$

Ce résultat est dû à Vasicek[21]. Comme dans l'équation (20.8), $Q(T)$ est la probabilité de défaut jusqu'à la date T et ρ est la corrélation commune des défauts des différents prêts.

Une estimation grossière de la VaR de crédit au niveau X % et à l'horizon T est donnée par $L(1-R)V(X,T)$ où L est la valeur du portefeuille de prêts et R le taux de recouvrement. La contribution d'un prêt particulier de montant L_i à la VaR de crédit est alors $L_i(1-R)V(X,T)$. Ce modèle est l'approche qui sous-tend les formules établies par les organismes de régulation pour définir les montants de capitaux couvrant les risques de crédit (voir encadré 20.2).

Encadré 20.2 Bâle II

Le Comité de Bâle rénove ses procédures pour calculer les capitaux propres requis de la part des banques pour couvrir les risques qu'elles supportent. Cette réforme est appelée Bâle II. Il n'y a pas de changement prévu pour la prise en compte des risques de marché (voir encadré 18.1) ; en revanche, un supplément de capital est prévu pour couvrir le risque opérationnel et des changements significatifs ont été introduits pour ce qui concerne le risque de crédit.

Pour les banques autorisées à utiliser l'approche fondée sur le rating interne (IRB, *Internal Ratings Based*), le capital requis pour une transaction sujette au risque de crédit se calcule comme suit :

$$UDR \times LGD \times EAD \times MatAd$$

UDR : taux de défaut non anticipé. Il est calculé en utilisant l'équation (20.11) comme $V(X,T) - Q(T)$ avec $X = 99{,}9$ % et $T = 1$

LGD : pourcentage de perte étant donné le défaut (cette variable est semblable à $1 - R$)

EAD : exposition au risque

$MatAd$: terme d'ajustement pour la maturité

21. Voir O. Vasicek, « Probability of Loss on a Loan Portfolio », Working Paper, KMV, 1987.

Les règles permettant de déterminer ces nombres sont complexes. Pour UDR, il faut disposer de $Q(1)$ et d'un paramètre de corrélation ρ. Ces deux paramètres sont estimés par les banques et dépendent du type de risque supporté (clients individuels, entreprises, dette souveraine, etc.). Pour les risques liés aux clients individuels, les variables LGD et EAD sont déterminées en interne. Pour les risques liés aux entreprises, les banques pouvant utiliser l'IRB « avancé » peuvent aussi déterminer ces variables en interne. Pour les autres, des règles sont définies par le régulateur. $MatAd$ est une fonction croissante de la maturité et vaut 1 quand la maturité est d'un an.

CreditMetrics

J. P. Morgan a développé une méthode d'évaluation de la VaR de crédit, appelée *CreditMetrics*. Cette technique est fondée sur la simulation des changements de rating des différentes contreparties. Supposons que nous souhaitions estimer la distribution des pertes à l'horizon d'un an ; dans chaque simulation, on tire un échantillon de changements de rating de l'ensemble des contreparties, ainsi qu'un échantillon des variations des variables de marché pertinentes pour l'analyse. L'ensemble des contrats est réévalué afin de déterminer les pertes liées à ces changements.

L'avantage de cette démarche est que toutes les spécificités des contrats en cours peuvent, en théorie, être intégrées dans l'analyse. Considérons par exemple un contrat avec une contrepartie dont le rating passe subitement de A à BBB, ou plus bas encore. La simulation peut tenir compte de cette évolution sur une base mensuelle. Une condition, indiquant qu'une perte est réalisée si, par exemple, le rating passe de A à une situation de défaut, peut être incluse dans le modèle.

Le tableau 20.6 montre un exemple de données historiques pour les probabilités de changement de rating à un an. Ces données peuvent être utilisées pour la simulation de Monte Carlo. Par exemple, la probabilité qu'une obligation notée A reste dans cette catégorie après un an est égale à 91,84 %. Elle a une probabilité de faire défaut de 0,02 % pendant cette même période[22].

Dans le tirage des échantillons, les variations de rating ne peuvent être supposées indépendantes. CreditMetrics propose d'utiliser une copula gaussienne pour modéliser la dépendance entre un grand nombre de contreparties. Ce modèle suggère aussi que la corrélation entre les variables transformées gaussiennes de deux contreparties soit supposée égale à la corrélation entre les rentabilités des actions de ces contreparties.

22. La note technique n° 11 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr) explique comment un tableau du type du tableau 20.6 peut être utilisé pour calculer des probabilités de transition avec un horizon de plusieurs années.

Tableau 20.6 : Matrice des probabilités de transition à un an des ratings (en %)

Rating initial	Rating dans un an Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Défaut
Aaa	92,18	7,06	0,73	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00
Aa	1,17	90,85	7,63	0,26	0,07	0,01	0,00	0,02
A	0,05	2,39	91,84	5,07	0,50	0,13	0,01	0,02
Baa	0,05	0,24	5,20	88,48	4,88	0,80	0,16	0,18
Ba	0,01	0,05	0,50	5,45	85,13	7,05	0,55	1,27
B	0,01	0,03	0,13	0,43	6,52	83,21	3,04	6,64
Caa	0,00	0,00	0,00	0,58	1,74	4,18	67,99	25,50
Défaut	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	100,00

Sources : Moody's Investors Service (2004)

Pour illustrer cette méthode, considérons la simulation des changements de rating de deux sociétés, notées au départ Aaa et Baa, en utilisant la matrice de transition du tableau 20.6. La corrélation des rentabilités des actions est égale à 0,2. On note x et y les variables qui déterminent les nouveaux ratings des deux sociétés. De façon analogue, comme :

$$N^{-1}(0{,}9218) = 1{,}4173$$

$$N^{-1}(0{,}9218 + 0{,}0706) = 2{,}4276$$

$$N^{-1}(0{,}9218 + 0{,}0706 + 0{,}0073) = 3{,}4319$$

l'entreprise Aaa reste à ce niveau de rating si $x < 1{,}4173$. Elle devient Aa si $1{,}4173 < x < 2{,}4276$, et devient A si $2{,}4276 < x < 3{,}4319$, etc. Les mêmes calculs pour la seconde entreprise montrent que celle-ci devient Aaa si $y < -3{,}2905$, Aa si $-3{,}2905 < y < -2{,}7589$, et ainsi de suite. Les copulas gaussiennes sont intéressantes dans la mesure où elles autorisent l'utilisation des propriétés des lois gaussiennes multivariées pour construire des échantillons de changements de rating de nombreuses entreprises.

Résumé

Il existe des approches variées pour déterminer la probabilité de défaut d'une entreprise pendant une période future donnée. L'une s'appuie sur les prix d'obligations, une autre sur les proportions de défaut observées sur données historiques, une troisième sur les prix des actions. Les probabilités de défaut tirées des prix des obligations sont des probabilités risque-neutre, alors que celles qui sont déduites des données historiques sont des probabilités dans l'univers réel. Ces dernières devraient être utilisées pour les analyses de scénarios et le calcul de la VaR de crédit. Les probabilités risque-neutre devraient être réservées à l'évaluation des actifs dérivés de crédit. En général, ces probabilités risque-neutre sont bien plus élevées que les probabilités réelles.

La perte espérée pour une institution financière, associée au risque de défaut d'une contrepartie, peut être réduite en utilisant le netting, c'est-à-dire une clause spécifiant

que si une contrepartie fait défaut sur un contrat avec l'institution considérée, alors il y a défaut sur l'ensemble des contrats. L'apport de garanties, sous forme de nantissement ou d'arrêt conditionnel en cas de dégradation de la notation d'une contrepartie, est aussi de nature à réduire le risque de crédit.

La VaR de crédit est définie comme la perte qui ne sera pas, avec un niveau de probabilité donné et pendant une période déterminée, dépassée. Cette quantité peut être définie en tenant compte uniquement des pertes liées aux défauts ou en intégrant simultanément les défauts et les changements de rating.

Références complémentaires

ALTMAN E. I., « Measuring Corporate Bond Mortality and Performance », *Journal of Finance*, 44 (1989), 902-22.

DUFFIE D. et K. SINGLETON, « Modeling Term Structures of Defaultable Bonds », *Review of Financial Studies*, 12 (1999), 687-720.

FINGER C. C., « A Comparison of Stochastic Default Rate Models », *Risk Metrics Journal*, 1, (novembre 2000), 49-73.

HULL J., M. PREDESCU et A. WHITE, « Relationship between Credit Default Swap Spreads, Bond Yields, and Credit Rating Announcements », *Journal of Banking and Finance*, 28 (novembre 2004), 2789-2811.

KEALHOFER S., « Quantifying Default Risk I : Default Prediction », *Financial Analyst Journal*, 59, 1 (2003a), 30-44.

KEALHOFER S., « Quantifying Default Risk II : Debt Valuation », *Financial Analyst Journal*, 59, 3 (2003b), 78-92.

LI D. X., « On Default Correlation : A Copula Approach », *Journal of Fixed Income* (mars 2000), 43-54.

LITTERMAN R. et T. IBEN, « Corporate Bond Valuation and the Term Structure of Credit Spreads », *Journal of Portfolio Management* (printemps 1991), 52-64.

MERTON R. C., « On the Pricing of Corporate Debt : The Risk Structure of Interest Rates », *Journal of Finance*, 2 (1974), 449-70.

RODRIGUEZ R. J., « Default Risk, Yield Spreads, and Time to Maturity », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23 (1988), 111-17.

Problèmes et exercices

20.1 Le spread entre une obligation corporate zéro-coupon à 3 ans et son équivalent sans risque de défaut est de 50 points de base. Le taux de recouvrement est de 30 %. Estimez l'intensité moyenne de défaut annuelle sur la période de 3 ans.

20.2 Supposez que, dans le problème 20.1, le spread entre le taux à 5 ans sur une obligation émise par la même société et le taux sans risque correspondant soit de 60 points de base, et que le taux de recouvrement soit toujours

de 30 %. Estimez l'intensité moyenne de défaut annuelle sur la période de 5 ans. Qu'implique votre résultat sur l'intensité moyenne de défaut dans les années 4 et 5 ?

20.3 Quelle est la différence entre les probabilités de défaut dans l'univers risque-neutre et dans l'univers réel ? Laquelle devrait-on utiliser pour (a) l'évaluation et (b) l'analyse de scénarios ?

20.4 Comment définit-on habituellement les taux de recouvrement ?

20.5 Expliquez la différence entre le taux d'intensité du défaut et la densité de probabilité de défaut (non conditionnelle).

20.6 Vérifiez que (a) les nombres figurant dans la deuxième colonne du tableau 20.4 sont cohérents avec ceux du tableau 20.1 et (b) les nombres de la quatrième colonne du tableau 20.5 sont cohérents avec ceux du tableau 20.4 si le taux de recouvrement est de 40 %.

20.7 Décrivez le fonctionnement du netting. Une banque a déjà un contrat en cours avec un client. Expliquez pourquoi la signature d'un second contrat peut augmenter ou diminuer le risque de crédit par rapport à cette contrepartie.

20.8 Si la mesure de corrélation des défauts $\beta_{AB}(T)$ de l'équation 20.9 est la même dans les univers réel et risque-neutre, en est-il de même pour la mesure ρ_{AB} associée à la copula gaussienne ?

20.9 Expliquez les différences entre le modèle de copula gaussienne pour la date de défaut et CreditMetrics à propos de (a) la définition d'une perte liée au risque de crédit, et (b) la modélisation des corrélations de défauts.

20.10 Supposez que la probabilité de défaut d'une société A (B) pour une période de deux ans soit de 0,2 (0,15). Si la corrélation associée à la copula gaussienne est de 0,3, quelle est la mesure de corrélation binomiale ?

20.11 Supposez que la courbe LIBOR/swap est plate à 6 % en composition continue et qu'une obligation à 5 ans payant 5 % de taux de coupon annuel (avec des paiements semestriels) cote 90,00. Comment peut-on construire un swap d'actifs sur cette obligation ? Quel spread sur ce swap serait calculé dans ce cas ?

20.12 Montrez que la valeur d'une obligation corporate à coupons est la somme des valeurs des zéro-coupons qui la composent quand le montant exigible par les créanciers en cas de défaut est la valeur de l'obligation sans risque équivalente. Montrez aussi que ce n'est pas le cas quand le montant exigible est la valeur nominale augmentée du coupon couru.

20.13 Supposez que la courbe LIBOR/swap est plate à 3 % en composition continue et qu'une obligation à 4 ans payant 4 % de taux de coupon annuel (avec des paiements semestriels) a un taux actuariel de 5 %. Supposez encore que les défauts ne peuvent survenir qu'à la fin de chaque année, immédiatement avant le paiement de coupon, et que le taux de recouvrement est de 30 %. Estimez la probabilité risque-neutre de défaut sous l'hypothèse qu'elle est identique chaque année.

20.14 Une société a émis des obligations à 3 et 5 ans avec un taux de coupon de 4 % payable annuellement. Les taux actuariels continus de ces obligations

sont respectivement de 4,5 % et 4,75 %. Le taux sans risque est de 3,5 % en composition continue quelle que soit la maturité. Le taux de recouvrement est de 40 %. Les défauts peuvent survenir au milieu de chaque année. Déterminez Q_1 et Q_2 où Q_1 désigne la probabilité de défaut chacune des années 1 à 3 et Q_2 est la probabilité de défaut pour chacune des années 4 et 5.

20.15 Supposez qu'une institution financière ait conclu un swap dépendant du taux de change USD/GBP avec une contrepartie X et un swap opposé avec une contrepartie Y. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. La valeur actuelle totale des coûts de défaut est la somme des valeurs actuelles des coûts de défaut des deux swaps.

b. L'exposition au risque dans un an sur les deux contrats est la somme des expositions au risque sur chacun des deux contrats.

c. La borne supérieure de l'intervalle de confiance à 95 % de l'exposition au risque à un an totale est la somme des bornes supérieures des intervalles de confiance à 95 % des expositions au risque de chacun des deux contrats.

20.16 Une société conclut un contrat forward à un an pour vendre 100 USD contre 150 CHF. Le contrat est initialement à la monnaie (le taux de change est donc de 1,5 CHF pour 1 USD). Le taux sans risque US à un an est de 5 % et la contrepartie peut emprunter à 6 % en dollars. La volatilité du taux de change est de 12 % par an. Estimez la valeur actuelle des coûts de défaut sur ce contrat en supposant que la seule date de défaut possible est la date d'échéance du contrat.

20.17 Supposez que, dans le problème 20.16, le taux de change forward à 6 mois soit aussi de 1,5 CHF pour 1 USD et que la contrepartie puisse emprunter à 6 mois à 5,5 %. Estimez la valeur actuelle des coûts de défaut en supposant que le défaut peut survenir au bout de 6 mois et à l'échéance du contrat. Si le défaut survient au bout de 6 mois, la perte potentielle est la valeur de marché du contrat.

20.18 « Une position longue sur un contrat forward sujet au risque de crédit est la combinaison d'une position courte sur un put sans risque de crédit et d'une position longue sur un call sujet au risque de crédit. » Expliquez cette affirmation.

20.19 Expliquez pourquoi l'exposition au risque de crédit sur un couple de contrats forward opposés ressemble à un straddle.

20.20 Expliquez pourquoi l'impact du risque de crédit sur un couple de swaps de taux opposés est en général moins important que celui d'un couple de swaps de devises opposés.

20.21 « Quand une banque négocie un swap de devises, elle devrait s'arranger pour recevoir la devise à taux d'intérêt faible d'une société ayant un risque de crédit faible. » Expliquez cette affirmation.

20.22 La relation de parité call-put est-elle valide en présence de risque de défaut ? Justifiez votre réponse.

20.23 Supposez que, dans un swap d'actifs, B désigne le prix de marché d'une obligation (en pourcentage du nominal). B^* est la valeur correspondante en l'absence de risque de défaut et V est la valeur actuelle du spread du swap d'actifs (en pourcentage du nominal). Montrez que $V = B^* - B$.

20.24 Montrez que dans le modèle de Merton de la section 20.6 le spread de crédit sur un zéro-coupon d'échéance T est donné par $-ln[N(d_2) + N(-d_1)/L]$ avec $L = De^{-rT}/V_0$.

Questions complémentaires

20.25 Une obligation corporate à 3 ans paie un taux de coupon de 7 % (coupon payé semestriellement) et a un taux actuariel de 5 % en composition semestrielle. Les taux sans risque pour toutes les maturités sont de 4 % (aussi en composition semestrielle). Les défauts peuvent survenir tous les six mois, juste avant le paiement des coupons, et le taux de recouvrement est de 45 %. Estimez les probabilités de défaut en supposant que (a) les probabilités non conditionnelles sont identiques à chaque date possible de défaut et (b) les probabilités conditionnelles à l'absence de défaut au préalable sont identiques à chaque date possible de défaut.

20.26 Une société a émis des obligations dont les maturités sont de 1 an et 2 ans, chacune payant un coupon de 8 % (payé annuellement). Les taux actuariels continus de ces obligations sont de 6 % et 6,6 %. Les taux sans risque continus sont égaux à 4,5 % pour toutes les maturités et le taux de recouvrement est de 35 %. Les défauts peuvent survenir au milieu de chaque année. Estimez les probabilités risque-neutre de défaut pour chacune des deux années.

20.27 Expliquez en détail la distinction entre les probabilités de défaut dans les univers réel et risque-neutre. Laquelle est la plus élevée ? Une banque conclut un contrat par lequel elle s'engage à payer 100 € à la fin de l'année 1 si le rating d'une société donnée passe de A à Baa ou moins. Le taux sans risque à un an est de 5 %. En utilisant le tableau 20.6, estimez la valeur du contrat. Quelles hypothèses faites-vous pour cette évaluation ? Celles-ci tendent-elles à sous-évaluer ou surévaluer le contrat ?

20.28 Les actions d'une entreprise valent 4 millions d'euros et la rentabilité de ces titres a une volatilité de 60 %. La dette de 15 millions sera remboursée dans deux ans. Le taux sans risque est de 6 % par an. Utilisez le modèle de Merton pour estimer l'espérance de perte due au défaut éventuel, la probabilité de défaut et le taux de recouvrement dans l'hypothèse d'un défaut. Expliquez pourquoi le modèle de Merton produit un taux de recouvrement élevé. (Indication : utilisez le solveur d'Excel pour cette question.)

20.29 Supposez qu'une banque ait une exposition au risque, pour un certain type de risque, d'un montant de 10 millions d'euros. La probabilité de défaut moyenne à un an est de 1 % et le taux de recouvrement moyen est de 40 %. La corrélation déduite de la copula gaussienne est de 0,2. Estimez la VaR de crédit à un an au seuil de 99,5 %.

Chapitre 21

Les dérivés de crédit

Les innovations les plus intéressantes sur les marchés d'actifs dérivés à la fin des années 1990 ont été les dérivés de crédit. En 2000, ces produits correspondaient déjà à plus de 800 milliards de dollars de sous-jacent et, en 2003, ce montant atteignait 3 000 milliards. Les dérivés de crédit sont des actifs dérivés dont les payoffs dépendent du risque de crédit d'une ou plusieurs entreprises, ou d'un ou plusieurs états. Dans ce chapitre, nous décrivons les produits financiers de ce type les plus populaires et nous présentons les méthodes d'évaluation associées.

Nous débutons par une analyse détaillée des swaps de défaut, qui sont les dérivés de crédit les plus prisés. Ce sont en quelque sorte des contrats d'assurance pour couvrir le risque de défaut des contreparties. Ils sont largement utilisés aujourd'hui par les banques. Comme le montre l'encadré 21.1, si les banques sont les plus gros acheteurs de ces contrats, les compagnies d'assurances sont les plus gros vendeurs.

21.1 Les swaps de défaut

Le dérivé de crédit le plus populaire est le swap de défaut, connu sous le sigle CDS (*Credit Default Swap*). C'est un contrat qui procure une assurance contre le défaut éventuel d'une entreprise donnée. L'entreprise en question est appelée *entité de référence* et la survenance d'un défaut, *aléa de crédit.* L'acheteur de l'assurance acquiert le droit de vendre une obligation particulière (appelée *obligation de référence*), émise par l'entité de référence, à sa valeur nominale[1] (qualifiée de *principal*) en cas d'occurrence d'un aléa de crédit.

L'acheteur du CDS paie au vendeur des montants convenus, à intervalles réguliers, jusqu'à l'échéance du CDS, ou bien à la survenance d'un aléa de crédit. Dans ce

1. La valeur nominale (ou valeur faciale) est le montant que l'émetteur rembourse au souscripteur à l'échéance quand il n'y a pas de défaut.

dernier cas, un ultime paiement est effectué par l'acheteur. Le swap est alors dénoué, soit par livraison du sous-jacent, soit en cash. Si les termes du contrat prévoient la livraison du sous-jacent, l'acheteur du swap livre les obligations au vendeur en échange de leur valeur nominale. Quand le swap est dénoué en cash, le montant payé représente $(100 - Z)\,\%$ de la valeur nominale, où Z est le prix (milieu de fourchette) de l'obligation de référence coté à une date convenue, ultérieure à l'aléa de crédit. Un exemple aidera le lecteur à comprendre la structure du produit. Supposons que, le 1er mars 2007, deux entreprises signent un contrat de swap de défaut sur un principal de 100 millions d'euros pour cinq ans. L'acheteur s'engage à payer 90 points de base pour être protégé contre le défaut de l'entité de référence. Si celle-ci ne fait pas défaut, l'acheteur ne reçoit rien mais paye, chaque 1er mars des années 2008 à 2012, 900 000 €. Si un aléa de crédit survient, l'acheteur reçoit un montant substantiel. Supposons que l'acheteur notifie au vendeur un aléa de crédit le 1er septembre 2010 (au milieu de la 4e année). Si le contrat spécifie la livraison du sous-jacent, l'acheteur a le droit de livrer 100 millions de nominal de l'obligation de référence et reçoit en échange 100 millions d'euros en cash. S'il est prévu un dénouement en cash et si le prix milieu de fourchette de l'obligation de référence est 35 € pour 100 € de nominal, le vendeur paiera à l'acheteur 65 millions d'euros.

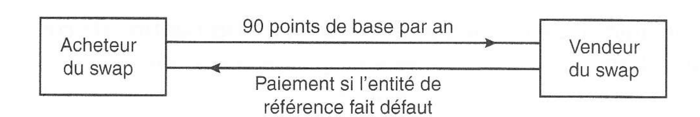
Dans tous les cas, l'acheteur doit payer au vendeur les 90 points de base au prorata de la durée écoulée entre le dernier paiement et la date de l'aléa de crédit. Cet exemple est illustré dans le graphique 21.1.

Encadré 21.1 Qui supporte le risque de crédit ?

Traditionnellement les banques supportaient le risque de crédit des prêts qu'elles accordaient mais cela est en train de changer. Les banques deviennent réticentes à conserver le risque de crédit de leurs clients. Une des raisons est liée à la réglementation prudentielle et aux exigences de capitaux propres formulées par le régulateur. Celles-ci réduisent la marge bénéficiaire des opérations de prêt. Dans les années 1990 s'est développée la titrisation qui permet aux banques de transférer ce risque aux investisseurs (sur le principe des créances hypothécaires, qui seront présentées au chapitre 29). Depuis quelques années, les dérivés de crédit constituent un autre moyen de transfert de ces risques de crédit.

Mais si les banques sont acheteurs nets de protection contre le risque de crédit, qui est vendeur ? Ce sont les compagnies d'assurances, qui ne sont pas soumises au même système de régulation que les banques et qui, dans certains cas, peuvent trouver intéressant de supporter des risques de crédit si ceux-ci sont suffisamment rémunérés.

Le résultat est que l'institution qui porte le risque de crédit associé à un prêt est souvent différente de celle qui a prêté l'argent. La question de savoir si cela n'est pas dangereux pour le système financier dans son ensemble reste ouverte.



Graphique 21.1 : Swap de défaut.

Le montant payé chaque année, en pourcentage du principal, est appelé *spread du CDS*. Plusieurs grandes banques jouent le rôle de market makers sur ce marché. Par exemple, une banque peut proposer une fourchette 250-260 (en points de base) sur le risque de défaut de Ford. Cela signifie qu'elle est prête à acheter une protection contre le risque de défaut en payant 250 bp sur le principal, mais qu'elle exige 260 bp pour fournir cette protection.

CDS et taux actuariels

Un CDS peut être utilisé pour couvrir une position sur une obligation corporate. Supposons qu'un investisseur ait acheté une obligation à 5 ans avec un taux de coupon de 7 % pour sa valeur nominale et qu'il ait conclu en même temps un CDS à 5 ans pour se protéger contre un défaut éventuel de l'émetteur de l'obligation. Le spread du CDS est supposé égal à 2 %. Schématiquement, l'effet de ce CDS est de transformer l'obligation corporate en une obligation sans risque (de défaut). Si l'obligation ne fait pas défaut, l'investisseur aura obtenu une rentabilité de 5 % par an (en net). Si un défaut survient, l'investisseur aura réalisé une rentabilité de 5 % jusqu'à la date de défaut, et, par le CDS, il sera à même d'échanger l'obligation contre sa valeur nominale. Celle-ci pourra ensuite être investie pour le reste des cinq années, par exemple au taux sans risque.

Ce raisonnement montre que le spread d'un CDS à n années sur une obligation du secteur privé doit être approximativement égal à l'écart de taux actuariel entre cette obligation corporate et l'obligation sans risque de caractéristiques équivalentes. En conséquence, les spreads de CDS donnent aussi une indication sur les taux sans risque utilisés par les opérateurs de marché. Par ailleurs, nous avons vu dans la section 20.4 que le taux sans risque moyen est à peu près égal au taux LIBOR/swap moins dix points de base.

L'obligation la moins chère à livrer

Comme nous l'avons montré dans la section 20.3, le taux de recouvrement en cas de défaut est défini comme la valeur de l'obligation immédiatement après l'incident de crédit, en pourcentage de la valeur nominale. Par conséquent, le paiement engendré par le CDS s'écrit $L(1 - R)$ où L est le principal et R le taux de recouvrement.

En général, un CDS spécifie qu'en cas de défaut plusieurs obligations peuvent être livrées. Ces obligations ont la même priorité mais pas nécessairement la même valeur

juste après le défaut[2]. Cela donne au détenteur du CDS l'option de choisir l'obligation la moins chère à livrer.

21.2 Les indices de crédit

Les opérateurs des marchés de dérivés de crédit ont construit des indices permettant de suivre les spreads des CDS. En 2004, les principaux producteurs d'indices ont opéré une certaine harmonisation, ce qui conduit aujourd'hui à l'utilisation des indices suivants :

1. Les indices CDX NA IG à 5 et 10 ans, qui évaluent les spreads de crédit de 125 firmes américaines de la catégorie « investissement ».
2. Les indices iTraxx Europe, qui évaluent les spreads de crédit de 125 firmes européennes de la catégorie « investissement ».

Ces indices fournissent une information sur les risques de crédit et offrent la possibilité aux opérateurs de marché d'acheter ou de vendre des portefeuilles de CDS. Par exemple, une banque d'investissement qui joue le rôle de market maker sur ce marché peut proposer une fourchette 65-66 bp. Un investisseur peut alors acheter pour $800 000 de CDS à 5 ans sur chacune des 125 firmes suivies pour $660 000 par an. Il peut aussi vendre cette protection à 5 ans sur chacune des 125 entreprises pour $650 000. Si une des entreprises fait défaut, le paiement annuel est réduit de $660 000 / 125 = $5 280[3].

21.3 L'évaluation des CDS

Les milieux de fourchette des spreads de CDS sur des entités de référence individuelles (c'est-à-dire la moyenne des spreads bid et ask des CDS cotés par les intermédiaires) peuvent être évalués à partir des estimations des probabilités de défaut. Nous allons illustrer cela par un exemple.

Supposons que la probabilité de défaut à un an d'une entité de référence, conditionnelle à l'absence de défaut préalable, soit de 2 %[4]. Le tableau 21.1 montre les

2. Il y a de nombreuses raisons à cela. L'exigence du souscripteur en cas de défaut correspond à la valeur faciale de l'obligation, à laquelle s'ajoute le coupon couru. Par conséquent, les obligations qui ont un coupon couru élevé tendent à avoir un prix plus élevé immédiatement après le défaut. Il est aussi possible que le marché juge qu'en cas de réorganisation certaines obligations (et donc certains obligataires) seront mieux traitées que d'autres.

3. L'indice est légèrement inférieur à la moyenne des spreads de CDS pour les entreprises du portefeuille. Pour en comprendre la raison, considérons deux entreprises, la première caractérisée par un spread de 1 000 bp et la seconde par un spread de 10 bp. Acquérir une protection contre le risque de crédit de ces deux entreprises coûterait un peu moins de 505 bp. Cela est dû au fait que l'on s'attend à payer moins longtemps les 1 000 bp que les 10 bp, ce qui revient à moins pondérer le spread élevé.

4. Comme nous l'avons mentionné dans la section 20.2, les probabilités de défaut conditionnelles sont appelées intensités de défaut.

probabilités de survie et les probabilités de défaut non conditionnelles (c'est-à-dire vues de la date 0) pour chacune des cinq années. La probabilité de défaut la première année est de 0,02 et, de ce fait, la probabilité de survie est de 0,98. La probabilité qu'un défaut survienne la deuxième année est donc égale au produit de 0,02 par 0,98, c'est-à-dire 0,0196, et la probabilité de survie pendant deux ans est donc le produit de 0,98 par 0,98, soit 0,9604, etc.

Nous allons supposer que les défauts ne peuvent survenir qu'en milieu d'année et que les paiements du CDS sont réalisés une fois par an, en fin d'année. Le taux sans risque (LIBOR) est supposé égal à 5 % en composition continue et le taux de recouvrement est de 40 %. Les trois parties du calcul sont données dans les tableaux 21.2 , 21.3 et 21.4.

Tableau 21.1 : Probabilités de défaut non conditionnelles et probabilités de survie

Maturité	Probabilité de défaut	Probabilité de survie
1	0,0200	0,9800
2	0,0196	0,9604
3	0,0192	0,9412
4	0,0188	0,9224
5	0,0184	0,9039

Le tableau 21.2 illustre le calcul de la valeur actuelle espérée des paiements sur le CDS en supposant que ces paiements représentent un pourcentage égal à s pour une unité de nominal. Il y a donc une probabilité de 0,9412 que le troisième paiement soit réalisé. L'espérance de ce paiement particulier est donc $0{,}9412s$ et sa valeur actuelle est égale à :

$$0{,}9412 \times s \times e^{-0{,}05 \times 3} = 0{,}8101s$$

La valeur actuelle espérée de l'ensemble des paiements est en fait égale à $4{,}0704s$.

Tableau 21.2 : Valeur actuelle espérée des paiements sur le CDS (paiement s par an)

Maturité	Probabilité de survie	Paiement espéré	Actualisation	Valeur actuelle
1	0,9800	$0{,}9800s$	0,9512	$0{,}9322s$
2	0,9604	$0{,}9604s$	0,9048	$0{,}8690s$
3	0,9412	$0{,}9412s$	0,8607	$0{,}8101s$
4	0,9224	$0{,}9224s$	0,8187	$0{,}7552s$
5	0,9039	$0{,}9039s$	0,7788	$0{,}7040s$
Total				$4{,}0704s$

Le tableau 21.3 montre le calcul de la valeur actuelle espérée du payoff reçu en cas de défaut, toujours pour un nominal d'une unité. Comme nous avons supposé que les défauts survenaient en milieu d'année, il y a par exemple une probabilité 0,0192 de recevoir un paiement au milieu de la troisième année. Étant donné que le taux de recouvrement est de 40 %, la valeur actuelle espérée du paiement à recevoir (toujours pour une unité de nominal) à cette date s'écrit :

$$0{,}0192 \times 0{,}6 \times e^{-0{,}05 \times 2{,}5} = 0{,}0102$$

Selon ce mode de calcul, la valeur actuelle espérée du paiement total reçu en cas de défaut est 0,0511.

Tableau 21.3 : Valeur actuelle espérée du paiement en cas de défaut (pour une unité de nominal)

Date	Probabilité de défaut	Taux de recouvrement	Paiment espéré	Actualisation	Valeur actuelle
0,5	0,0200	0,4	0,0120	0,9753	0,0117
1,5	0,0196	0,4	0,0118	0,9277	0,0109
2,5	0,0192	0,4	0,0115	0,8825	0,0102
3,5	0,0188	0,4	0,0113	0,8395	0,0095
4,5	0,0184	0,4	0,0111	0,7985	0,0088
Total					0,0511

Le tableau 21.4 illustre l'étape finale du calcul et donne les montants résiduels à payer sur le CDS en cas de défaut. Par exemple, il y a une probabilité de 0,0192 qu'un paiement soit réalisé au milieu de la troisième année. Il est égal à $0{,}5s$ puisque ce paiement concerne une demi-année. Sa valeur actuelle espérée est donc :

$$0{,}0192 \times 0{,}5 \times s \times e^{-0{,}05 \times 2{,}5} = 0{,}0085s$$

Le cumul de ces montants pour toutes les dates donne $0{,}0426s$.

Tableau 21.4 : Valeur actuelle espérée du paiement résiduel en cas de défaut (pour une demi-année)

Date	Probabilité de défaut	Paiement résiduel espéré	Actualisation	Valeur actuelle
0,5	0,0200	$0{,}0100s$	0,9753	$0{,}0097s$
1,5	0,0196	$0{,}0098s$	0,9277	$0{,}0091s$
2,5	0,0192	$0{,}0096s$	0,8825	$0{,}0085s$
3,5	0,0188	$0{,}0094s$	0,8395	$0{,}0079s$
4,5	0,0184	$0{,}0092s$	0,7985	$0{,}0074s$
Total				$0{,}0426s$

Des tableaux 21.2 et 21.4, on déduit :

$$4{,}0704s + 0{,}0426s = 4{,}1130s$$

Du tableau 21.3, on déduit que la valeur actuelle espérée du paiement du CDS est 0,0511. Le spread s doit donc vérifier :

$$4{,}1130s = 0{,}0511$$

On obtient donc $s = 0{,}0124$, soit 124 bp.

Les calculs réels sont souvent plus complexes que dans cet exemple, car les paiements ont souvent une périodicité inférieure à l'année et le « rythme » des défauts peut être plus important (ici, ils ne peuvent survenir qu'une fois par an).

Le marking-to-market d'un CDS

Au moment de sa négociation, la valeur d'un CDS, comme celle de la plupart des swaps, est proche de 0. Par la suite, elle peut devenir positive ou négative. Supposons par exemple que le CDS traité précédemment ait été initialement négocié pour 150 bp. La valeur actuelle des paiements pour l'acheteur est donc égale à $4{,}1130 \times 0{,}0150 = 0{,}0617$, alors que la valeur espérée du paiement en cas de défaut reste toujours 0,0511. La valeur du swap pour le vendeur serait alors $0{,}0617 - 0{,}0511$, soit 0,0106 fois le montant de principal. De même, la valeur de la protection acquise par l'acheteur du CDS aurait la valeur opposée, c'est-à-dire –0,0106 fois le montant de principal.

L'estimation des probabilités de défaut

Les probabilités de défaut utilisées pour l'évaluation d'un CDS doivent être des probabilités risque-neutre et non des probabilités réelles (voir section 20.5). Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 20, l'estimation de ces probabilités peut se faire à l'aide des prix d'obligations ou des swaps d'actifs. Une alternative consiste à les déduire des cotations de CDS. Cette démarche est similaire à celle qui consiste à calculer les volatilités implicites sur les marchés d'options, à partir des cotations de calls et de puts.

Supposons que nous modifiions l'exemple traité dans les tableaux 21.2 à 21.4 de sorte que nous ne connaissions pas les probabilités de défaut. En revanche, nous disposons de la cotation de milieu de fourchette du spread d'un CDS qui vient d'être émis avec une durée de cinq ans. Supposons que cette cotation soit de 100 bp.

Les calculs précédents peuvent être faits « à l'envers ». Nous obtiendrions alors une probabilité de défaut de 1,61 % par an (conditionnellement à l'absence de défaut préalable)[5].

Le swap de défaut digital

Les swaps digitaux sont structurés comme les CDS à ceci près que le montant payé en cas de défaut est fixé dès le départ. Si, dans les tableaux 21.1 à 21.4, nous avions supposé un paiement de 1 dollar, au lieu de $1 - R$ dollar, avec un spread de s, les tableaux 21.1, 21.2 et 21.4 seraient inchangés, mais le tableau 21.3 serait remplacé par le tableau 21.5.

Tableau 21.5 : Valeur actuelle espérée du paiement en cas de défaut pour un swap digital sur un principal de 1 dollar

Date	Probabilité de défaut	Paiement espéré	Actualisation	Valeur actuelle
0,5	0,0200	0,0200	0,9753	0,0195
1,5	0,0196	0,0196	0,9277	0,0182
2,5	0,0192	0,0192	0,8825	0,0170
3,5	0,0188	0,0188	0,8395	0,0158
4,5	0,0184	0,0184	0,7985	0,0147
Total				0,0852

Le spread de ce CDS digital serait alors solution de :

$$4{,}1130s = 0{,}0852$$

Ce qui donne $s = 0{,}0207$, c'est-à-dire 207 points de base.

L'importance du taux de recouvrement

Que nous utilisions les spreads de CDS ou les prix d'obligations pour estimer les probabilités de défaut, une estimation du taux de recouvrement est nécessaire. Cependant, à condition que nous retenions le même taux de recouvrement pour (a) estimer les probabilités risque-neutre de défaut et (b) évaluer un CDS, la valeur de ce CDS est peu sensible au taux de recouvrement. Cela est dû au fait que les probabilités de

5. Idéalement, il faudrait estimer une probabilité de défaut pour chacune des cinq années plutôt qu'une intensité de défaut unique. Il faudrait pour cela posséder des données sur les spreads de CDS à 1, 2, 3 et 4 ans.

défaut implicites sont proportionnelles à $1 / (1 - R)$ et que les paiements du CDS en cas de défaut sont proportionnels à $1 - R$.

Cet argument ne s'applique plus au CDS digital puisque le paiement en cas de défaut est constant. En conséquence, dès que l'on observe les spreads pour un CDS standard et pour un CDS digital de mêmes caractéristiques, on peut estimer simultanément le taux de recouvrement et les probabilités de défaut (voir exercice 21.24).

L'avenir du marché des CDS

Le marché des CDS a connu une croissance très rapide depuis la fin des années 1990. Les CDS comptent pour environ 70 % du total des dérivés de crédit négociés dans le monde. Ils sont devenus des outils essentiels de la gestion du risque de crédit. Une institution financière peut utiliser ces contrats pour réduire son exposition au risque de crédit mais aussi pour diversifier le risque qu'elle supporte. Si elle considère que son exposition au risque sur un secteur d'activité donné est trop important, elle peut acheter une protection contre une partie de ce risque et vendre la même protection contre le risque de crédit d'un autre secteur d'activité. Certains acteurs du marché pensent que la croissance du marché des CDS va continuer et qu'il deviendra aussi important que le marché des taux d'ici à 2010. Il y a cependant un frein potentiel au développement de ce marché, frein qui n'existe pas pour d'autres contrats d'actifs dérivés (voir encadré 21.2).

Encadré 21.2 Le marché des CDS est-il un jeu équilibré ?

Il existe une différence importante entre les CDS et les autres actifs dérivés étudiés dans ce livre. En effet, les autres contrats dérivés dépendent de taux d'intérêt, de prix d'actions, de taux de change, d'indices boursiers, etc. Il n'y a aucune raison de penser que des opérateurs ont des informations privilégiées sur ces variables. En revanche, les prix des CDS dépendent de la probabilité de défaut d'une société donnée pendant une période future prédéfinie. Il est ici raisonnable de penser que certains acteurs ont une meilleure information que d'autres. Une institution financière qui a pour client une entreprise donnée est susceptible d'avoir une meilleure information sur la solvabilité de cette entreprise qu'un acteur de marché quelconque. Cette situation est qualifiée d'*asymétrie d'information* par les économistes. La question de savoir si ce problème est susceptible de ralentir ou de stopper le développement des marchés de CDS n'est pas tranchée aujourd'hui. Les institutions financières arguent du fait que la décision d'acquérir une protection sous forme de CDS sur une société donnée est prise par un risk-manager et n'est pas, *a priori*, fondée sur la possession d'informations détenues dans d'autres départements de l'institution. Le caractère convaincant de cet argument reste cependant à démontrer !

21.4 Les CDS forward et les options sur CDS

Dès que le marché des CDS s'est développé, il est devenu naturel pour les traders de négocier des contrats forward sur CDS et des options sur ces mêmes contrats[6].

Un CDS forward est un contrat qui engage à acheter ou à vendre un CDS donné à une date future T fixée sur une entité de référence donnée. Si l'entité de référence fait défaut avant la date T, le contrat forward cesse d'exister. Par exemple, une banque peut conclure un contrat l'engageant à vendre une protection contre le risque de défaut de Ford Motor Credit pour 280 points de base, débutant dans un an. Si Ford fait défaut dans l'année qui vient, les obligations de la banque liées au sous-jacent de ce contrat forward sont annulées.

Les options sur CDS sont des options dont le payoff à l'échéance dépend du spread de crédit d'une entité de référence donnée. Par exemple, une banque peut acheter une option lui donnant le droit d'acheter une protection contre le risque de défaut de Ford Motor Credit pour 280 points de base, dans un an. Il s'agit alors d'un call. Si le spread de crédit de Ford dans un an est supérieur à 280 bp, la banque exerce l'option, sinon elle l'abandonne. Le coût de l'option est payé immédiatement. Les principes sont identiques pour les puts sur CDS.

Ces options sont conçues comme les contrats forward ; elles cessent donc d'exister si l'entité de référence fait défaut pendant la durée de vie de l'option.

Un contrat d'option devenu populaire est le call sur panier d'entités de référence. S'il y a m entités dans le panier qui n'ont pas fait défaut à la maturité de l'option, celle-ci donne le droit à son détenteur d'acheter un portefeuille de CDS pour mK bp, où K est le prix d'exercice. De plus, le détenteur du contrat reçoit le paiement habituel d'un CDS sur les entités de référence qui ont fait défaut pendant la durée de vie du contrat.

21.5 Les swaps de rentabilité totale

Un swap de rentabilité totale (*total return swap*) est un contrat d'échange de la rentabilité totale d'une obligation ou d'un autre titre de référence contre le LIBOR plus un spread. La rentabilité totale comprend les coupons et les gains/pertes en capital sur l'actif pendant la durée de vie du swap.

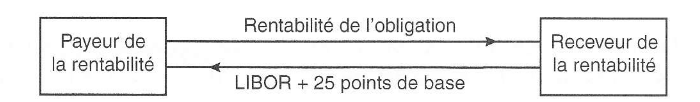
Par exemple, considérons un swap de rentabilité totale durant 5 ans sur 100 millions de principal, conduisant à l'échange de la rentabilité d'une obligation de taux de coupon 5 % contre LIBOR + 25. Ce swap est illustré dans le graphique 21.2. Aux dates de paiement de coupon, le payeur paie le coupon de l'obligation et reçoit LIBOR + 25 (le LIBOR est déterminé à la date de paiement précédente comme pour un swap de taux vanille).

6. L'évaluation de ces contrats est analysée dans J. C. Hull et A. White, « The Valuation of Credit Default Swap Options », *Journal of Derivatives*, 10, 5 (printemps 2003), 40-50.

À la fin de la vie du swap, il y a un paiement qui reflète le changement de valeur de l'obligation. Si la valeur de l'obligation a augmenté de 10 % pendant la durée de vie du swap, le payeur fera un versement de 10 millions. À l'inverse, si la valeur de l'obligation a perdu 15 %, c'est le receveur qui devra payer 15 millions. Si l'émetteur de l'obligation fait défaut, le swap se termine par un paiement du receveur égal à la différence entre le principal et la valeur de marché de l'obligation.

Si l'on ajoute le principal des deux côtés à la fin de la durée de vie du swap, on peut caractériser le swap de rentabilité totale de la façon suivante. Le payeur paie les cash-flows sur un investissement de 100 millions d'euros dans une obligation corporate de taux de coupon 5 %. Le receveur paie les cash-flows sur une obligation à taux variable sur la base de LIBOR + 25. Si le payeur détient l'obligation, le swap de rentabilité totale lui permet de transférer le risque de crédit sur le receveur. S'il ne la possède pas, le swap lui permet de prendre l'équivalent d'une position courte sur l'obligation.

Les swaps de rentabilité totale sont généralement utilisés comme des moyens de financement. Le scénario le plus probable conduisant au swap du graphique 21.2 est le suivant. Le receveur souhaite financer un investissement de 100 millions dans l'obligation de référence. Il contacte le payeur (en principe une institution financière) et les deux parties concluent le swap. Le payeur investit alors 100 millions dans l'obligation. Cette opération laisse le receveur dans la position dans laquelle il se serait trouvé s'il avait emprunté l'argent à LIBOR + 25 pour acheter l'obligation. Le payeur garde la propriété des titres pendant la durée de vie du swap, mais a réduit son exposition au risque vis-à-vis du receveur, par rapport à ce qu'elle aurait été s'il avait directement prêté les 100 millions. Les swaps de rentabilité totale ressemblent donc aux Repo présentés à la section 4.1, dans le sens où ils minimisent le risque de crédit en cas de prêt.



Graphique 21.2 : Swap de rentabilité totale.

Si l'on suppose que le payeur et le receveur sont exempts de risque de crédit, la valeur du swap pour le receveur devrait être la différence des valeurs entre un investissement de 100 millions dans l'obligation de référence et un investissement de 100 millions dans une obligation payant LIBOR + 25. La valeur est bien sûr l'opposé pour le payeur. Comme la valeur de l'investissement dans l'obligation de référence est de 100 millions, de même que la valeur de l'obligation à taux variable (LIBOR), on pourrait s'attendre à ce qu'il n'y ait pas de spread.

En pratique, le payeur exige un spread pour compenser le risque de défaut du receveur. Par conséquent, ce spread dépend du risque de crédit du receveur, de celui de l'émetteur de l'obligation de référence et de la corrélation entre les deux.

D'autres contrats présentent des caractéristiques voisines, mais différentes. Dans certains cas, les variations de valeur de l'obligation de référence peuvent engendrer des

paiements périodiques, ou le dénouement du swap peut se faire par la livraison du sous-jacent.

21.6 Le swap de défaut sur panier d'obligations

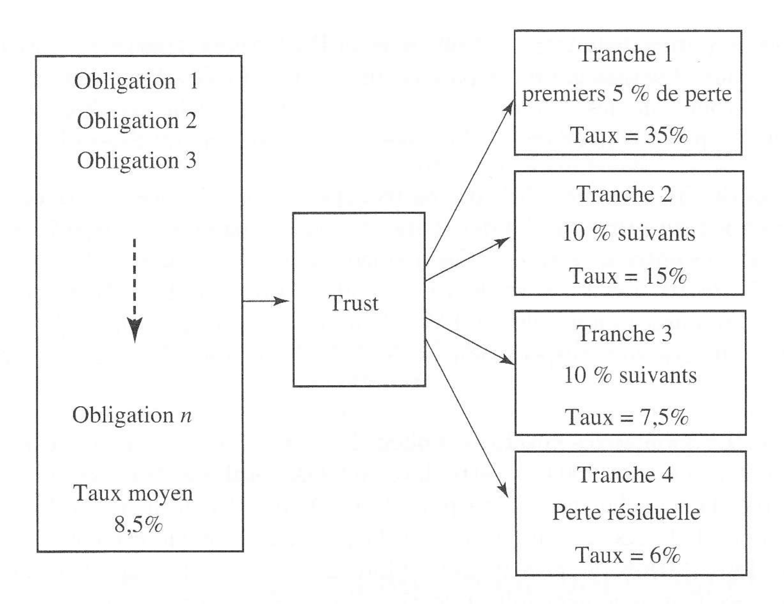
Dans un CDS sur panier d'obligations, il y a plusieurs entités de référence. Un CDS *add-up* engendre un paiement lorsqu'un aléa de crédit affecte n'importe quelle obligation du panier. Ce contrat est donc équivalent à un portefeuille de CDS classique. À l'inverse, un CDS contingent au premier défaut (*first-to-default*) engendre un seul et unique paiement (de la part du vendeur) à la première survenance d'un aléa de crédit d'une des obligations du panier. Le swap cesse d'exister après cet événement.

Ce type de swap peut être évalué à l'aide de simulations de Monte Carlo. À chaque tirage, le comportement de chaque entité de référence est simulé pour déterminer si le défaut a lieu, et quand. On calcule alors (a) la valeur actuelle du payoff, et (b) la valeur actuelle des paiements de l'acheteur entre la date de survenance du défaut et la fin du contrat, au rythme d'une unité monétaire par an. Le spread du CDS est alors le rapport de la valeur moyenne obtenue en (a) sur la valeur moyenne obtenue en (b). Les swaps de premier défaut sont sensibles à la structure des corrélations des défauts entre les différentes entités de référence. Plus cette corrélation est élevée, plus faible est la valeur du CDS. Pour le vendeur, une hypothèse défensive consiste à supposer des corrélations nulles. Cependant, on peut intégrer des corrélations non nulles dans la simulation en ayant recours aux copulas gaussiennes présentées au chapitre 20.

21.7 Les CDO

Les CDO (*Collateralized Debt Obligations*) sont un moyen de créer des actifs financiers à partir d'autres titres de dette, éventuellement très différents. Un exemple est donné dans le graphique 21.3. Quatre types d'actifs sont créés, appelés *tranches*, à partir d'un portefeuille d'obligations. La première tranche regroupe 5 % du nominal total des obligations et supporte toutes les pertes liées aux défauts, à concurrence de 5 % du nominal global. La deuxième tranche inclut 10 % du nominal global et supporte toutes les pertes liées aux défauts, au-delà de 5 % et jusqu'à concurrence de 15 % du nominal global. La tranche suivante inclut les 10 % suivants et la dernière regroupe le reste du portefeuille.

Le graphique 21.3 donne les taux payés aux détenteurs des différentes tranches. Ils sont calculés sur le nominal restant, déduction faite des pertes liées aux défauts éventuels. Considérons la première tranche. Le taux de 35 % est payé sur le montant total investi dans cette tranche. Mais si le taux de défaut sur le portefeuille global correspond à 1 % du nominal, les détenteurs de la tranche 1 ne touchent ce taux que sur 80 % du nominal qu'ils possèdent (1 % du nominal global correspond à 20 % du nominal de la tranche 1). Ils ont donc réalisé une perte en capital de 20 %, compensée par le taux d'intérêt élevé. Si le taux de défaut était de 2,5 %, le taux d'intérêt de 35 % serait insuffisant pour compenser la perte en capital. Il est clair par ailleurs que la dernière



Graphique 21.3 : Exemple de CDO.

tranche est la moins risquée ; elle est souvent notée Aaa. En effet, il faudrait que le taux de défaut sur le portefeuille global soit supérieur à 25 % pour que cette tranche en subisse les conséquences. Souvent, le créateur du CDO garde la tranche risquée et revend le reste. Il s'agit donc d'un moyen de créer de la dette de bonne qualité à partir d'une dette de qualité moyenne (ou faible).

Les CDO synthétiques

Un CDO synthétique consiste à revendre non pas un portefeuille d'obligations mais un portefeuille de CDS à des tiers. Le risque des CDS est ainsi transféré aux acquéreurs des tranches du CDO synthétique. Comme dans le graphique 21.3, la première tranche peut être responsable des paiements à réaliser sur les premiers 5 % des CDS, etc. Les revenus du portefeuille de CDS sont attribués aux tranches selon le risque que chacune d'elles supporte. Par exemple, la première tranche peut se voir attribuer 3 000 bp, la deuxième 1 000, et ainsi de suite. Comme pour le CDO sur obligations, ces paiements sont calculés sur le principal restant après prise en compte des défauts.

Le trading de tranches isolées

À la section 21.2, nous avons discuté des portefeuilles de 125 entreprises qui sont utilisés pour calculer les indices CDX et iTraxx. Le marché utilise ces portefeuilles pour définir des tranches standardisées de CDO. L'échange de ces tranches standardisées s'appelle aussi trading de tranches isolées ou *single tranche trading*. Un échange sur tranche isolée est un accord dans lequel une contrepartie accepte de vendre une protec-

tion contre les pertes de la tranche considérée et l'autre contrepartie accepte d'acheter cette protection. La tranche n'est pas ici une part d'un CDO synthétique, mais les paiements seront calculés comme si c'était le cas. La tranche est dite *non financée* puisqu'elle n'a pas été créée en vendant des CDS ou en achetant des obligations.

Dans le cas de l'indice CDX NA IG, la tranche la plus risquée supporte les pertes entre 0 % et 3 % du principal. La deuxième tranche, aussi appelée *tranche mezzanine*, couvre les pertes entre 3 % et 7 %. Les tranches suivantes couvrent les intervalles de 7 % à 10 %, de 10 % à 15 % et de 15 % à 30 %. Pour l'indice iTraxx, la première tranche couvre aussi l'intervalle de 0 % à 3 %, la tranche mezzanine de 3 % à 6 %. Les autres tranches vont respectivement de 6 % à 9 %, de 9 % à 12 % et de 12 % à 22 %.

Le tableau 21.6 montre les cotations milieu de fourchette pour les tranches CDX et iTraxx à 5 ans, le 4 août 2004. À cette date, le CDX cotait 63,25 bp et l'iTraxx 42 bp. Par exemple, la tranche mezzanine pour le CDX IG NA était à 347 bp par an et à 168 bp pour l'iTraxx. Il faut noter que la première tranche est cotée de manière différente. La cotation de 41,8 % pour l'indice CDX signifie que le vendeur de la protection reçoit un paiement initial de 41,8 % du principal plus un spread de 500 bp par an. La cotation correspondante pour l'iTraxx de 27,6 % signifie que le vendeur reçoit 27,6 % du principal plus un spread de 500 bp.

Tableau 21.6 : Cotations pour les tranches à 5 ans sur le CDX IG NA et sur l'iTraxx Europe le 4 août 2004. Les cotations sont en bp sauf pour la tranche 0-3 %.

CDX IG NA					
Tranche	0-3 %	3-7 %	7-10 %	10-15 %	15-30 %
Cotation	41,8 %	347	135,5	47,5	14,5
iTraxx Europe					
Tranche	0-3 %	3-6 %	6-9 %	9-12 %	12-22 %
Cotation	27,6 %	168	70	43	20

Sources : GFI

21.8 L'évaluation des CDS sur panier d'obligations et des CDO

Le spread de crédit d'un CDS sur panier d'obligations correspondant au n-ième défaut ou le taux de rémunération d'une tranche de CDO dépendent de manière cruciale de la corrélation des défauts. Supposons qu'un portefeuille de 100 entités de référence soit utilisé dans un CDS n-ième défaut à 5 ans, et que chaque entité de référence ait une probabilité risque-neutre de défaut de 2 % pendant les 5 ans. Quand la corrélation des défauts est nulle, la loi binomiale indique que la probabilité qu'un ou plusieurs défauts surviennent dans les 5 ans est de 86,74 % et que la probabilité qu'au moins

10 défauts surviennent est de 0,0034 %. Un CDS premier défaut a donc une valeur importante alors qu'un CDS 10-ième défaut ne vaut pratiquement rien.

Quand la corrélation des défauts augmente, la probabilité d'au moins un défaut diminue, alors que la probabilité d'au moins 10 défauts augmente. Si, à la limite, les défauts sont parfaitement corrélés, la probabilité d'au moins un défaut sera égale à la probabilité d'au moins 10 défauts. Dans cette situation extrême, c'est comme si toutes les entités de référence étaient identiques ; soit elles font toutes défaut, soit aucune ne fait défaut.

L'évaluation d'une tranche de CDO dépend de la même façon de la corrélation des défauts. Si la corrélation est faible, la première tranche est très risquée et la dernière est pratiquement sans risque. Quand la corrélation augmente, la première tranche devient moins risquée et les suivantes le deviennent plus. En cas de corrélation parfaite, toutes les tranches présentent le même risque.

L'utilisation d'une copula gaussienne pour modéliser la date de défaut

Le modèle de copula gaussienne à un facteur est devenu standard pour modéliser la date de défaut et pour évaluer les CDS n-ième défaut ou les tranches de CDO.

Considérons un portefeuille de K entités de référence. L'équation (20.7) s'écrivait :

$$Q_i(T\,|M) = N\left[\frac{N^{-1}(Q_i(T)) - a_i M}{\sqrt{1-a_i^2}}\right] \tag{21.1}$$

$Q_i(T\,|M)$ est la probabilité que la i-ième entité fasse défaut avant T conditionnellement à la valeur prise par le facteur M. Notons $P(k,T)$ la probabilité qu'au moins k entités fassent défaut avant T et $P(k,T|M)$ la probabilité correspondante conditionnée par la valeur du facteur commun M. Quand M est fixé, les probabilités de défaut sont indépendantes, ce qui facilite le calcul de $P(k,T|M)$.

Dans la version standard du modèle, la distribution de probabilité de la date de défaut est supposée identique pour les K entités, de même que les corrélations des défauts obtenues à l'aide de la copula gaussienne[7]. On a alors $Q_i(T|M) = Q(T|M)$ et l'équation (20.8) peut être utilisée à la place de l'équation (20.7). Elle s'écrit :

$$Q(T|M) = N\left\{\frac{N^{-1}[Q(T)] - \sqrt{\rho}M}{\sqrt{1-\rho}}\right\}$$

7. Pour une discussion d'un modèle plus général, voir J. C. Hull et A. White, « Valuation of a CDO and nth-to-Default Swap without Monte Carlo Simulation », *Journal of Derivatives*, 12, 2 (hiver 2004), 8-23.

Des propriétés de la loi binomiale on déduit :

$$P(n,T|M) = \sum_{k=n}^{K} \frac{K!}{k!(K-k)!} Q(T|M)^k (1 - Q(T|M))^{K-k}$$

La probabilité que le n-ième défaut survienne entre T_1 et T_2 est alors égale à $P(n,T_2|M) - P(n,T_1|M)$. Cette relation donne la distribution de probabilité du n-ième défaut, conditionnellement à la valeur de M. En intégrant par rapport à la distribution de M, on obtient la distribution non conditionnelle de la date du n-ième défaut[8]. Quand cette distribution est obtenue, on évalue le CDS n-ième défaut comme un CDS classique. Pour évaluer une tranche de CDO, on calcule les flux espérés de chaque tranche, conditionnellement aux valeurs de M, et on intègre de la même façon sur la distribution de M.

Les traders de dérivés de crédit déduisent la corrélation des défauts à partir des spreads cotés sur le marché des CDS n-ième défaut et des CDO et tendent à coter ces corrélations plutôt que les spreads eux-mêmes. C'est une pratique similaire à celle qui consiste à coter des volatilités implicites sur les marchés d'options plutôt que les prix des options. Comme nous l'illustrons dans l'encadré 21.3, il existe un phénomène de smile sur ces corrélations, analogue à celui qui existe sur les volatilités sur les marchés d'options.

Encadré 21.3 Le smile des corrélations

Les traders de dérivés de crédit déduisent des corrélations implicites à partir des spreads sur les différentes tranches. Si la corrélation implicite était la même pour toutes les tranches, on en conclurait que le modèle à un facteur est cohérent avec les prix observés sur le marché. En pratique on trouve que les tranches extrêmes sont caractérisées par des corrélations implicites plus élevées. Par exemple, dans le tableau 21.6, les corrélations implicites (en commençant par la première tranche) pour le CDX IG NA sont de 21 %, 4,2 %, 17,7 %, 19 % et 27,4 %. Pour l'indice iTraxx Europe, elles valent 20,4 %, 5,5 %, 16,1 %, 23,3 % et 31,1 %.

Dans le modèle de Black et Scholes, l'existence d'un smile dans les volatilités implicites indique que le modèle ne reflète pas les croyances des opérateurs de marché (voir chapitre 16). De la même façon, l'existence du smile dans les corrélations montre que le modèle de copula gaussienne à un facteur ne reflète pas les croyances des opérateurs de ce marché.

8. Cette intégration peut être réalisée de manière rapide et efficace par une méthode de quadrature de Gauss.

21.9 Les obligations convertibles

Le détenteur d'une obligation convertible a la possibilité d'échanger son obligation contre des actions, à certaines périodes de la vie de l'obligation. Le ratio de conversion est le nombre d'actions obtenues pour une obligation en cas de conversion. Le plus souvent, l'émetteur dispose d'une option de remboursement anticipé à un prix spécifié. Cependant, en cas d'exercice de cette option, le détenteur a la possibilité d'exercer son droit de conversion d'abord. Le remboursement est en fait, dans certains cas, un moyen de forcer la conversion. Il arrive aussi que l'option de remboursement ne puisse être exercée que si le cours de l'action est au-dessus d'un certain seuil.

Le risque de crédit joue un rôle important dans l'évaluation des obligations convertibles. Si l'on n'en tient pas compte, les coupons et le principal de l'obligation seront surévalués car actualisés au taux sans risque.

Ingersoll a proposé un modèle d'évaluation des obligations convertibles, dans un cadre proche de celui du modèle de Merton (1974) décrit à la section 20.6[9]. Il suppose que la valeur de l'entreprise émettrice suit un mouvement brownien géométrique et modélise les actions, les obligations convertibles et la dette classique comme des actifs contingents à la valeur de l'entreprise. Le risque de crédit est pris en compte en considérant que les créanciers sont complètement remboursés si et seulement si la valeur de la firme est supérieure à la valeur des dettes.

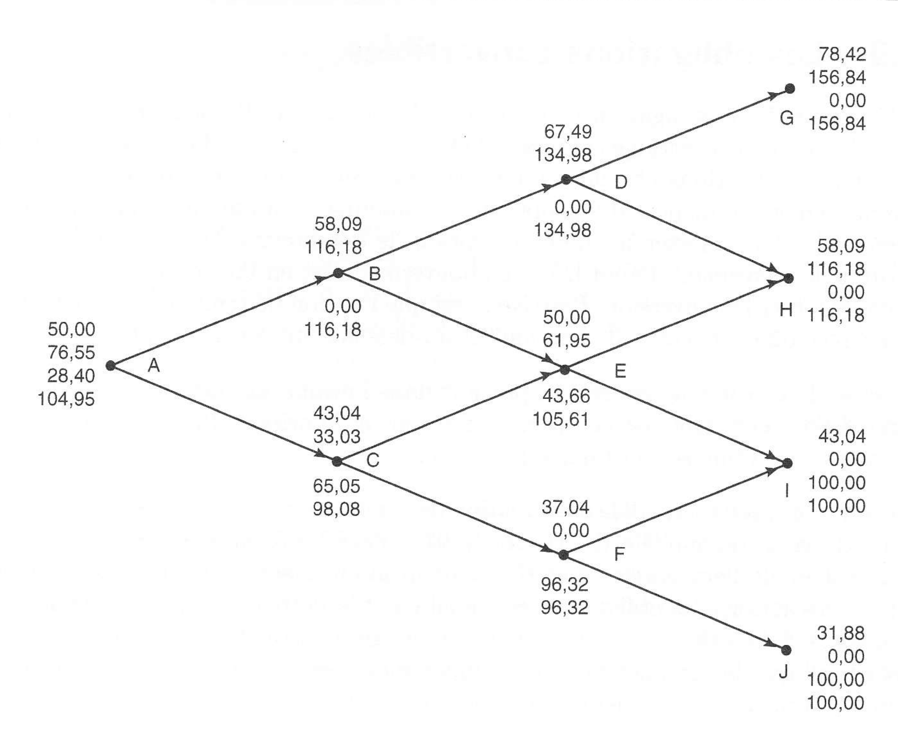
Les praticiens utilisent un modèle plus simple pour décrire l'évolution du prix de l'action à partir d'un arbre binomial classique. L'horizon temporel de l'arbre est la durée de vie de l'obligation convertible. La valeur de l'obligation convertible à l'échéance est calculée en tenant compte de l'option de conversion à cette date. Par induction arrière, on teste l'optimalité d'une conversion sur chacun des nœuds, ainsi que l'optimalité d'un remboursement anticipé. Si tel est le cas, on teste à nouveau l'optimalité de la conversion. En d'autres termes, la valeur à chaque nœud s'écrit :

$$\max[\min(Q_1; Q_2); Q_3]$$

où Q_1 est la valeur en l'absence d'exercice des options détenues par l'émetteur et le souscripteur, Q_2 est la valeur en cas de remboursement anticipé et Q_3 est la valeur en cas de conversion.

Quel taux d'actualisation faut-il retenir sur l'arbre ? Supposons tout d'abord que l'obligation ne puisse être convertie ou remboursée par anticipation. Il est alors approprié de retenir un taux d'actualisation « risqué ». Si, par contre, on est certain de la conversion, il faut utiliser le taux sans risque. En pratique, on ne sait pas si l'obligation sera convertie ou non. On divise alors, à chaque nœud, le prix de la convertible en deux composantes. La première tient compte des cas qui conduisent à la conversion,

9. Voir J. E. Ingersoll, « A Contingent Claims Valuation of Convertible Securities », *Journal of Financial Economics*, 4 (mai 1977), 289-322.



Graphique 21.4 : Arbre d'évaluation d'une obligation convertible.

et la seconde des situations dans lesquelles l'obligation reste une obligation. Chaque composante se voit alors affecter le taux d'actualisation pertinent[10].

■ Exemple 21.1

Considérons, à titre d'exemple simple, un zéro-coupon convertible de maturité 9 mois, de nominal 100 €, émis par une société XYZ. Cette obligation peut être échangée contre deux actions de la société à tout moment. Elle est remboursable par anticipation au prix de 115 €. L'action cote initialement 50 €, ne paie pas de dividendes pendant la durée de vie de la convertible, et sa volatilité est de 30 %. La courbe des taux ZC sans risque est plate à 10 % et celle des taux risqués correspondant à la société XYZ est plate à 15 %. Le graphique 21.4 montre comment l'arbre de l'action peut servir à évaluer la convertible. Le chiffre supérieur est le prix de l'action, le deuxième la valeur de la composante action de la convertible, le troisième la valeur de la composante obligation, et le dernier est la somme des deux précédents, soit la valeur de l'obligation convertible. Les paramètres sont $u = 1{,}1618$, $d = 0{,}8607$, $a = e^{r\delta t} = 1{,}0253$ et $p = 0{,}5467$. Aux nœuds terminaux, la convertible vaut $\max(100; 2S_T)$. Par exemple, au nœud G, l'action vaut 78,42, la convertible 156,84 et cette valeur vient uniquement de

10. Cette démarche est formalisée dans K. Tsiveriotis et C. Fernandes, « Valuing Convertible Bonds with Credit Risk », *Journal of Fixed Income*, (septembre 1998), 95-102.

la conversion ; il n'y a plus de composante obligataire. À l'inverse, au nœud I, l'obligation n'est pas convertie et vaut 100. On procède ensuite à l'induction arrière en testant chaque fois l'optimalité de la conversion ou du remboursement anticipé. Par exemple, au nœud D, on a une composante action qui vaut :

$$(0{,}5467 \times 156{,}84 + 0{,}4533 \times 116{,}18) \times e^{-0{,}1 \times 0{,}25} = 134{,}98$$

La composante obligataire a une valeur nulle.

Au nœud F, on a une composante obligataire qui vaut :

$$100 \times e^{-0{,}15 \times 0{,}25} = 96{,}32$$

et la composante action est nulle.

Le nœud E est plus intéressant car les deux composantes sont positives. La composante action vaut :

$$(0{,}5467 \times 116{,}18 + 0{,}4533 \times 0) \times e^{-0{,}1 \times 0{,}25} = 61{,}95$$

et la composante obligation :

$$(0{,}5467 \times 0 + 0{,}4533 \times 100) \times e^{-0{,}15 \times 0{,}25} = 43{,}66$$

ce qui conduit à une valeur de 61,95 + 43,66 = 105,61 pour l'obligation convertible.

On peut remarquer par ailleurs qu'au nœud B il y aura exercice de l'option de remboursement anticipé et conversion forcée. En effet, par le même type de calcul, on obtient une valeur de l'obligation convertible égale à 118,42. Il est donc optimal pour l'émetteur d'exercer son option à 115. Mais dans ce cas, il est plus judicieux pour le souscripteur de convertir puisque 2 actions valent 116,18. On obtient finalement au nœud A un prix de 104,95 pour la convertible, alors qu'une obligation classique, sans clause optionnelle, émise par cette même société vaudrait 89,36. L'option de conversion vaut donc 104,95 – 89,36 = 15,59.

Quand des dividendes sur l'action ou des coupons sur l'obligation sont payés, il faut en tenir compte. À chaque nœud, on suppose d'abord que la convertible est une obligation et on inclut dans la composante obligataire la valeur actuelle des coupons payables à l'étape suivante. Pour tester si la conversion est optimale, on prend en compte la valeur actuelle des dividendes payables à l'étape suivante. Les calculs peuvent être affinés en autorisant les taux sans risque et « risqués » à dépendre du temps, en s'appuyant sur les taux forward observés en date 0. L'arbre est alors construit selon la méthode décrite à la section 18.4. Les cash-flows survenant entre t et $t+\Delta t$ sont alors actualisés au taux forward pertinent pour cette période.

Résumé

Les dérivés de crédit permettent aux banques et plus généralement aux institutions financières de gérer de manière dynamique le risque de crédit qu'elles supportent. Ils

peuvent être utilisés pour transférer ce type de risque d'une entreprise à une autre, ou pour modifier l'exposition au risque en changeant les risques de crédit de différentes contreparties.

Le dérivé de crédit le plus courant est le swap de défaut. Il s'agit d'un contrat par lequel une société achète une assurance contre le défaut d'une de ses contreparties sur ses obligations. Le payoff de ce swap est en général la différence entre la valeur nominale de l'obligation émise par la contrepartie et sa valeur immédiatement après le défaut. Les CDS peuvent être analysés en calculant la valeur actuelle du coût de l'assurance dans un univers risque-neutre et la valeur actuelle du payoff espéré.

Un swap de rentabilité totale est un actif par lequel la rentabilité d'un portefeuille de titres présentant un risque de crédit est échangée contre le LIBOR plus un spread. Un swap de ce type peut être utilisé pour échanger une obligation corporate contre une obligation à taux variable indexée sur le LIBOR. Le risque de marché et le risque de crédit sont ainsi éliminés. Les swaps de rentabilité totale sont souvent employés comme des moyens de financement. Une entreprise qui souhaite acheter un portefeuille d'obligations peut contacter une institution financière qui va en fait acheter les obligations pour son propre compte. Cette dernière va ensuite conclure un swap avec l'entreprise, dans lequel elle va payer la rentabilité totale du portefeuille obligataire à l'entreprise et recevoir le LIBOR en échange. L'avantage pour l'institution financière réside dans la réduction de son exposition au risque de défaut de l'entreprise.

Un CDS n-ième défaut est un CDS qui engendre un paiement au n-ième défaut dans un portefeuille de titres. Un CDO peut être créé en divisant un portefeuille d'obligations corporate en tranches qui supporteront des risques de crédit différents. Cela permet de construire de nouveaux titres dont certains présentent un risque de crédit très élevé et d'autres un risque de crédit très faible. Un CDO synthétique repose sur le même principe, mais il est créé à partir d'un portefeuille de CDS. Afin d'évaluer ces différents contrats, on passe le plus souvent par un modèle à un facteur à copula gaussienne pour modéliser la date de défaut.

Les obligations convertibles sont des obligations qui peuvent être échangées contre des actions de l'émetteur selon des règles prédéfinies. Le risque de crédit doit aussi être pris en compte dans l'évaluation de ces titres. En effet, si l'obligation n'est pas convertie, elle est sujette au risque de défaut. Une méthode d'évaluation consiste à séparer la composante action de l'obligation de la composante purement obligataire ; en d'autres termes, il faut distinguer les trajectoires de cours de l'action pour lesquelles l'obligation sera convertie de celles pour lesquelles il n'y aura pas de conversion.

Références complémentaires

ANDERSEN L., J. SIDENIUS et S. BASU, « All Your Hedges in One Basket », *RISK*, novembre 2003.

DAS S., *Credit Derivatives : Trading and Management of Credit and Default Risk*, Wiley, Singapore, 1998.

HULL J. C. et A. WHITE, « Valuation of a CDO and nth-to-Default Swap without Monte Carlo Simulation », *Journal of Derivatives*, 12, 2 (hiver 2004), 8-23.

SCHONBUCHER P. J., *Credit Derivatives : Pricing Models*, New York, 2003.

TAVAKOLI J. M., *Credit Derivatives : A Guide to Instruments and Applications*, Wiley, New York, 1998.

Problèmes et exercices

21.1 Un CDS cote 60 points de base de spread payables semestriellement. Le principal est de 300 millions d'euros et le CDS donne lieu à un dénouement en cash. Un défaut survient après 4 ans et 2 mois, et le prix de l'obligation de référence est estimé à 40 % de la valeur nominale juste après le défaut. Donnez l'ensemble des cash-flows et leurs dates de paiement pour ce CDS.

21.2 Expliquez les deux issues possibles pour un CDS.

21.3 Comment sont créés les CDO et les CDO synthétiques ?

21.4 Expliquez ce qu'est un CDS 1er défaut. Comment sa valeur évolue-t-elle en fonction de la corrélation des défauts des entités de référence ? Justifiez votre réponse.

21.5 Expliquez les différences entre probabilités risque-neutre et probabilités réelles.

21.6 Expliquez pourquoi un swap de rentabilité totale peut être un outil de financement intéressant.

21.7 La courbe des taux ZC est plate à 7 % par an en composition continue et le défaut peut survenir au milieu de chaque année d'un CDS qui dure 5 ans. Le taux de recouvrement espéré est de 30 % et les probabilités de défaut sont de 3 % conditionnellement à l'absence de défaut préalable. Quel est le spread du CDS ? Les paiements sont annuels.

21.8 Quelle est la valeur du CDS de l'exercice 21.7 par dollar de principal pour l'acheteur de cette protection si le spread est de 150 bp ?

21.9 Quel serait le spread du CDS de l'exercice 21.7 s'il était digital ?

21.10 Comment fonctionne un CDS n-ième défaut à 5 ans ? Considérez un portefeuille de 100 entités de référence, chacune ayant une probabilité de défaut de 1 %. Que peut-on attendre de la valeur de ce CDS quand la corrélation des défauts augmente lorsque (a) $n = 1$ et (b) $n = 25$? Justifiez votre réponse.

21.11 Comment définit-on habituellement le taux de recouvrement pour une obligation ?

21.12 Montrez que le spread d'un CDS classique devrait être égal à $(1 - R)$ fois le spread d'un CDS digital, où R est le taux de recouvrement.

21.13 Montrez que si le spread du CDS des tableaux 21.1 à 21.4 est de 100 bp, la probabilité de défaut doit être de 1,61 % par an. Comment cette probabilité est-elle modifiée quand le taux de recouvrement est de 20 % au lieu de 40 % ?

Vérifiez que votre réponse est cohérente avec le fait que la probabilité de défaut est approximativement proportionnelle à $1/(1-R)$, où R est le taux de recouvrement.

21.14 Une entreprise conclut un contrat de swap de rentabilité totale par lequel elle reçoit la rentabilité d'une obligation corporate payant un coupon de 5 % et paie le LIBOR. Expliquez la différence entre ce contrat et un swap usuel recevant 5 % et payant le LIBOR.

21.15 Expliquez comment sont construits les CDS forward et les options sur CDS.

21.16 « La position d'un acheteur de CDS est analogue à une position longue sur une obligation sans risque de défaut et une position courte sur une obligation corporate. » Expliquez cette affirmation.

21.17 Pourquoi y a-t-il un problème d'asymétrie d'information dans les CDS ?

21.18 L'évaluation d'un CDS avec des probabilités réelles au lieu de probabilités risque-neutre conduit-elle à une surévaluation ou à une sous-évaluation ? Justifiez votre réponse.

21.19 Expliquez la différence entre un swap de rentabilité totale et un swap d'actifs.

21.20 Considérons un ZC à 18 mois de nominal 100 € qui peut être converti en 5 actions de l'entreprise A, pendant toute sa durée de vie. L'action cote aujourd'hui 20 € et ne paie pas de dividendes. Le taux sans risque est de 6 % par an en composition continue, et la volatilité de l'action est 25 % par an. Le taux actuariel des obligations (classiques) émises par cette société est 10 % pour toutes les maturités. L'obligation est remboursable par anticipation à 110 €. Utilisez un arbre à 3 périodes pour calculer la valeur de l'obligation convertible. Quelle est la valeur de l'option de conversion (nette de l'option de remboursement anticipé) ?

21.21 Supposons que dans un modèle de copula gaussienne à un facteur, la probabilité de défaut des 125 entreprises constituant le portefeuille soit de 3 % et que la corrélation de chaque couple de défauts soit de 0,2. Calculez, pour des valeurs du facteur commun allant de -2 à $+2$ par pas de 1 :

a. La probabilité de défaut conditionnelle à la valeur du facteur commun.

b. La probabilité qu'au moins 10 défauts surviennent, conditionnellement à la valeur du facteur commun.

Questions complémentaires

21.22 La courbe des taux ZC est supposée plate à 6 % par an en composition continue, et dans le cadre d'un CDS à 2 ans, les défauts de l'entité de référence peuvent survenir au milieu de chaque semestre. Les paiements du swap sont semestriels et le taux de recouvrement espéré est 20 %. Les probabilités de défaut sont de 1 % aux deux premières dates et de 1,5 % aux deux dernières dates. Quel est le spread du CDS ? Si ce CDS était digital, quel serait son spread ?

21.23 Notons λ la probabilité de défaut d'une entreprise chaque année, conditionnellement à l'absence de défaut préalable, et notons R le taux de recouvrement. Le taux sans risque est de 5 % et les défauts éventuels peuvent survenir en milieu d'année. Le spread d'un CDS à 5 ans sur cette entreprise avec des paiements annuels est de 120 bp et le spread du CDS digital correspondant est de 160 bp. Estimez R et λ.

21.24 Expliquez à quels changements vous vous attendez sur les taux offerts par les différentes tranches d'un CDO lorsque les corrélations des défauts entre les obligations du portefeuille augmentent.

21.25 Le taux sans risque à 5 ans est de 7 % et le taux actuariel des obligations à 5 ans émises par une entreprise X est de 9,5 %, les deux taux étant composés semestriellement. Le spread du CDS correspondant à 5 ans quand l'entité de référence est l'entreprise X est de 150 bp. Quelle opportunité d'arbitrage existe-t-il dans cette situation ? Même question si le spread est de 300 bp. Expliquez les raisons pour lesquelles les opportunités d'arbitrage que vous avez identifiées sont loin d'être parfaites.

21.26 Une obligation convertible (OC) à 3 ans, de nominal 100 €, a été émise par la société ABC. Le taux de coupon est 5 %, payable en fin de chaque année. Cette OC peut être convertie en titres ABC à la fin des deux premières années, en 3,6 actions en année 1, et 3,5 actions en année 2, juste après le paiement de coupon. L'action cote aujourd'hui 25 €, la volatilité est de 25 %, et elle ne paye pas de dividendes. Le taux sans risque continu est de 5 % et le taux actuariel continu des obligations ABC est 7 %.

a. Utilisez un arbre à 3 périodes pour évaluer l'OC.

b. Combien vaut l'option de conversion ?

c. Si l'émetteur peut rembourser par anticipation à 115 € pendant les deux premières années, quelle influence cela a-t-il sur le prix de l'OC et sur la valeur de l'option de conversion ?

d. Comment votre analyse serait-elle modifiée si l'action paie un dividende de 1 € après 6 mois, 18 mois et 30 mois ? Il n'est pas utile de détailler les calculs.

Chapitre 22

Les options exotiques

Les produits dérivés comme les calls et les puts européens et américains sont si classiques que les professionnels les qualifient de « vanille » (*plain vanilla options*), produit au goût simple et connu de tous. Ils ont des propriétés standardisées, clairement spécifiées, et sont activement échangés. Leurs prix et volatilités implicites sont ainsi diffusés régulièrement sur les marchés financiers ou par les brokers. L'une des facettes les plus passionnantes des marchés dérivés de gré à gré est sans nul doute l'existence d'une foule de produits non standard, dits aussi exotiques, créés par l'ingénierie financière. Ces produits exotiques, qui ne représentent qu'une proportion relativement faible des portefeuilles des banques d'investissement, ont pourtant un intérêt particulier dans le sens où ils sont généralement bien plus profitables que les produits classiques.

Il existe de nombreuses raisons au développement des dérivés exotiques. Dans certains cas, ils répondent à un réel besoin de couverture sur le marché ; dans d'autres cas, ils sont attractifs pour des raisons légales, réglementaires, comptables ou encore fiscales. Certains produits sont destinés à refléter la vision des trésoriers quant aux évolutions possibles de variables de marché spécifiques ; enfin, d'autres produits sont conçus par les banques d'investissement de façon à paraître plus attractifs qu'ils ne le sont réellement, notamment aux yeux des trésoriers d'entreprise les moins avertis.

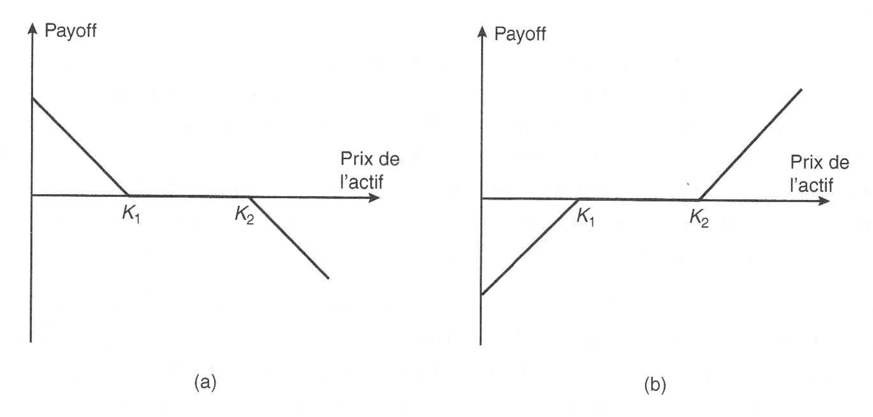
Ce chapitre est consacré à la description et à l'évaluation d'un certain nombre d'options exotiques. La classification des options exotiques retenue ici est semblable à celle proposée par Éric Reiner et Mark Rubinstein dans une excellente série d'articles écrits pour le magazine *RISK* en 1991 et 1992. Nous supposons dans tout ce chapitre que l'actif sous-jacent paie des flux intermédiaires au taux q. Comme nous l'avons vu au chapitre 14, q correspond au rendement en dividende pour les options sur indices boursiers, au taux sans risque étranger pour les options sur devises et au taux sans risque domestique pour les options sur futures. La plupart des options présentées dans ce chapitre peuvent être évaluées avec le logiciel DerivaGem. Ces contrats sont essentiellement négociés de gré à gré, aussi la dénomination des contrats est-elle es-

sentiellement anglo-saxonne. Nous conserverons donc cette terminologie, sauf quand il existe une traduction française couramment utilisée.

22.1 Les packages

Une position liée, ou package, est un portefeuille constitué de calls européens classiques, de puts européens classiques, de contrats forward, de liquidités et d'actif sous-jacent. Nous avons déjà présenté un certain nombre de ces packages au chapitre 10 : bull spreads, bear spreads, calendar spreads, butterfly spreads, straddles, strangles, etc.

Les packages sont souvent construits de sorte que leur coût initial soit nul, comme c'est le cas pour le contrat *range forward*[1]. Les flux terminaux associés aux positions courte et longue d'un tel contrat sont représentés dans le graphique 22.1. Une position courte sur un contrat de ce type est constituée par une position longue sur un put de prix d'exercice faible, K_1, et une position courte sur un call de prix d'exercice plus élevé, K_2. Ce portefeuille garantit, à l'échéance des options, une vente de l'actif sous-jacent à un prix compris entre K_1 et K_2. Une position longue sur un contrat range forward est constituée par le portefeuille opposé, c'est-à-dire une position courte sur le put de prix d'exercice faible, K_1, associée à une position longue sur le call de prix d'exercice élevé, K_2. Ce portefeuille garantit, à l'échéance des options, un achat de l'actif sous-jacent à un prix compris entre K_1 et K_2. À la date de constitution du portefeuille, le prix du call est généralement identique au prix du put, ce qui assure un coût initial nul. Plus les prix d'exercice K_1 et K_2 sont proches l'un de l'autre et plus l'incertitude sur le prix payé ou reçu à l'échéance pour l'actif sous-jacent diminue. À la limite, le contrat range forward devient un contrat forward classique pour $K_1 = K_2$.



Graphique 22.1 : Payoffs (a) d'une position courte et (b) d'une position longue sur un contrat range forward.

1. Il existe quantité d'autres dénominations anglo-saxonnes pour le contrat range forward, comme zero-cost collar, flexible forward, option cylindre, option fence, min-max et forward band.

Il est important de noter que le coût initial peut toujours être différé jusqu'à la date d'échéance, transformant ainsi l'actif dérivé en produit à coût initial nul. Dans le cas d'un call européen par exemple, la prime c peut être différée jusqu'à l'échéance de l'option, T, où l'on devra alors s'acquitter d'un coût $A = ce^{rT}$. Le flux terminal de cette position est alors $\max(S_T - K\,;\,0) - A$, ou encore $\max(S_T - K - A\,;\,-A)$. Dans le cas où le prix d'exercice K est égal au prix forward, cette option à prime différée est souvent appelée break forward, option Boston, forward à sortie optionnelle ou encore forward annulable.

22.2 Les options américaines non standard

L'exercice des options américaines classiques peut avoir lieu à tout instant pendant la durée de vie de l'option, le prix d'exercice restant toujours identique. En pratique, les options américaines échangées sur les marchés de gré à gré ont parfois des caractéristiques spécifiques. Ainsi,

1. L'exercice anticipé peut être limité à certaines dates. On parle alors d'option bermudienne.
2. L'exercice anticipé peut n'être autorisé que pendant une période spécifique de la vie de l'option. Il peut par exemple y avoir une période initiale de blocage pendant laquelle l'exercice prématuré est impossible.
3. Le prix d'exercice peut être variable pendant la durée de vie de l'option.

Les warrants ou les bons de souscription émis par les entreprises sur leurs propres actions possèdent souvent ce type de caractéristiques. À titre d'exemple, on peut imaginer un warrant à 7 ans qui ne pourrait être exercé qu'à des dates spécifiques à partir de la troisième année, le prix d'exercice passant de 30 € pour les troisième et quatrième années à 32 € pour les deux années suivantes, et finalement à 33 € pour la dernière année.

Les options américaines non standard peuvent généralement être évaluées à l'aide d'arbres binomiaux. Il convient alors de prendre en considération les éventuelles spécificités de l'option dans le test d'optimalité de l'exercice anticipé effectué à chaque nœud.

22.3 Les options à déclenchement différé (forward start options)

Les options *forward start* sont des options qui n'entrent en activité qu'à une date ultérieure. Les *stock-options* intégrées dans les plans d'intéressement des employés, présentées dans l'encadré 8.3, sont parfois spécifiées sous cette forme. Les entreprises s'engagent en effet à accorder à leurs employés (implicitement ou explicitement) des options à la monnaie à un terme donné.

Considérons un call forward start européen à la monnaie entrant en vigueur à la date T_1 et arrivant à échéance à la date T_2. Notons S_0 le prix de l'actif sous-jacent à la date initiale et S_1 son prix à la date T_1. Nous avons montré aux chapitres 13 et 14 que la valeur d'un call à la monnaie est proportionnelle au prix de l'actif sous-jacent. À la date T_1, la valeur de l'option forward start est donc égale à cS_1/S_0, où c est la valeur en date zéro d'une option à la monnaie de durée de vie $T_2 - T_1$. D'après l'évaluation risque-neutre, la valeur du contrat forward start à la date initiale est donc

$$e^{-rT_1}\hat{E}\left(c\frac{S_1}{S_0}\right)$$

où $\hat{E}$ est l'opérateur d'espérance dans l'univers risque-neutre. Comme c et S_0 sont connus et $\hat{E}(S_1) = S_0 e^{(r-q)T_1}$, la valeur de l'option forward start est égale à ce^{-qT_1}. Dans le cas d'une action ne versant pas de dividendes, $q = 0$, et la valeur de l'option forward start est identique à celle d'une option à la monnaie classique ayant la même durée de vie que l'option forward start.

22.4 Les options composées (compound options)

Les options composées sont des options sur options. Il existe quatre principaux types d'options composées : les calls sur calls, les puts sur calls, les calls sur puts et les puts sur puts. Les options composées ont deux prix d'exercice et deux dates d'exercice. À titre d'exemple, intéressons-nous au cas d'un call sur call. À la première date d'exercice, T_1, le détenteur de cette option est en droit de payer le prix d'exercice K_1 en échange du call sous-jacent. Ce call donne à son détenteur le droit d'acheter l'actif sous-jacent à ce second contrat d'option au second prix d'exercice K_2, à la seconde date d'exercice T_2. L'option composée ne devra donc être exercée à la première date d'exercice que si la valeur de l'option sous-jacente est, à cette date, supérieure au premier prix d'exercice.

Dans le cas classique où le sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique, les options composées européennes peuvent être évaluées analytiquement[2] sous la forme d'intégrales d'une distribution normale bivariée. En reprenant les notations usuelles, la valeur à la date initiale d'un call sur call de type européen est :

$$S_0 e^{-qT_2} M\left(a_1; b_1; \sqrt{T_1/T_2}\right) - K_2 e^{-rT_2} M\left(a_2; b_2; \sqrt{T_1/T_2}\right) - e^{-rT_1} K_1 N(a_2)$$

avec :

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S^*) + \left(r - q + \sigma^2/2\right) T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1}$$

$$b_1 = \frac{\ln(S_0/K_2) + \left(r - q + \sigma^2/2\right) T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2}$$

2. Voir R. Geske, « The Valuation of Compound Options », *Journal of Financial Economics*, 7 (1979), 63-81, et M. Rubinstein, « Double Trouble », *RISK*, décembre 1991/janvier 1992, 53-56.

La fonction $M(a\,;b\,;\rho)$ est la fonction de répartition d'une loi normale bivariée indiquant la probabilité pour que la première variable soit inférieure ou égale à a et que la seconde soit inférieure à b, lorsque la corrélation entre ces variables est égale à ρ [3]. La variable S^* représente à la date T_1 le prix de l'actif pour lequel le prix de l'option sous-jacente vaut K_1 à cette même date. Si le prix de l'actif sous-jacent à la seconde option est supérieur à S^* à la date T_1, la première option est exercée ; dans le cas contraire, l'option est abandonnée et est donc de valeur nulle à cette date.

En reprenant des notations identiques, la valeur d'un put sur call de type européen est :

$$K_2 e^{-rT_2} M\left(-a_2; b_2; -\sqrt{T_1/T_2}\right) - S_0 e^{-qT_2} M\left(-a_1; b_1; -\sqrt{T_1/T_2}\right) + e^{-rT_1} K_1 N(-a_2)$$

La valeur d'un call sur put de type européen est :

$$K_2 e^{-rT_2} M\left(-a_2; -b_2; \sqrt{T_1/T_2}\right) - S_0 e^{-qT_2} M\left(-a_1; -b_1; \sqrt{T_1/T_2}\right) - e^{-rT_1} K_1 N(-a_2)$$

La valeur d'un put sur put de type européen est :

$$S_0 e^{-qT_2} M\left(a_1; -b_1; -\sqrt{T_1/T_2}\right) - K_2 e^{-rT_2} M\left(a_2; -b_2; -\sqrt{T_1/T_2}\right) + e^{-rT_1} K_1 N(a_2)$$

22.5 Les options au choix (chooser options)

La caractéristique spécifique d'une option au choix (aussi appelée option *as you like it*, « comme vous le souhaitez ») est qu'après un certain délai initialement spécifié, son détenteur peut choisir si son option est un call ou un put. Si ce choix peut être effectué à la date T_1, la valeur de l'option est à cette date

$$\max(c\,; p)$$

avec c la valeur du call sous-jacent et p celle du put sous-jacent.

Si les options sous-jacentes à l'option chooser sont toutes deux européennes et ont le même prix d'exercice, une formule d'évaluation peut être obtenue à partir de la relation de parité Call-Put. Notons S_1 le prix de l'actif sous-jacent à la date T_1, K le prix d'exercice, T_2 la date d'échéance des options et r le taux d'intérêt sans risque. La relation de parité Call-Put implique :

$$\begin{aligned} \max(c\,; p) &= \max\left(c\,; c + Ke^{-r(T_2-T_1)} - S_1 e^{-q(T_2-T_1)}\right) \\ &= c + e^{-q(T_2-T_1)} \max\left(0\,; Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)} - S_1\right) \end{aligned}$$

Il apparaît donc clairement que l'option chooser peut être vue comme un portefeuille constitué par :

1. Un call de prix d'exercice K et d'échéance T_2.

3. La note technique n° 5 accessible sur le site de l'éditeur fournit une procédure numérique d'évaluation de M (www.pearsoneducation.fr).

2. $e^{-q(T_2-T_1)}$ puts de prix d'exercice $Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)}$ et d'échéance T_1.

La valeur de l'option est donc égale à la valeur de ce portefeuille, facile à déterminer.

Il existe des options chooser plus complexes pour lesquelles le call et le put sous-jacents n'ont pas le même prix d'exercice et/ou la même échéance. On ne peut plus les exprimer sous la forme de portefeuilles d'options simples, et leurs caractéristiques relèvent alors plutôt des options composées.

22.6 Les options barrières

Les options barrières sont des options dont le payoff dépend du passage éventuel d'un seuil (déterminé initialement) par le prix de l'actif sous-jacent pendant une certaine période.

Nombre d'options barrières sont régulièrement échangées sur les marchés de gré à gré. Leur succès auprès de certains acteurs de marché tient au fait qu'elles sont moins coûteuses que les options traditionnelles correspondantes. Ces options barrières peuvent être classées dans deux catégories distinctes : les options *knock-out* et les options *knock-in*. Une option *knock-out* cesse d'exister une fois que le prix de l'actif sous-jacent atteint un certain seuil, la barrière, alors qu'une option *knock-in* ne commence à exister qu'une fois la barrière atteinte par le prix de l'actif sous-jacent.

Les équations (14.4) et (14.5) donnant la valeur initiale des calls et puts classiques sont :

$$\begin{aligned} c &= S_0e^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \\ p &= Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0e^{-qT}N(-d_1) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

Le call down-and-out est un type particulier d'option knock-out, constitué par un call classique qui cesse d'exister dès que le prix de l'actif sous-jacent atteint un certain niveau, la barrière, notée H, qui est dans ce cas fixée en dessous du niveau initial de l'actif. L'option knock-in correspondante est bien entendu le call down-and-in qui consiste en un call classique ne commençant son existence qu'une fois la même barrière atteinte par le prix de l'actif sous-jacent.

La valeur initiale du call down-and-in, pour une barrière H inférieure ou égale au prix d'exercice K, est donnée par :

$$c_{di} = S_0e^{-qT}(H/S_0)^{2\lambda}N(y) - Ke^{-rT}(H/S_0)^{2\lambda-2}N(y - \sigma\sqrt{T})$$

avec :

$$\lambda = \frac{r - q + \sigma^2/2}{\sigma^2}$$
$$y = \frac{\ln\left[H^2/(S_0K)\right]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

La valeur d'un call classique est nécessairement égale à la somme des valeurs des calls down-and-in et down-and-out, aussi la valeur de ce dernier s'écrit :

$$c_{do} = c - c_{di}$$

Pour le niveau de barrière $H = K$, nous avons :

$$c_{do} = S_0N(x_1)\,e^{-qT} - Ke^{-rT}N\left(x_1 - \sigma\sqrt{T}\right) - S_0e^{-qT}(H/S_0)^{2\lambda}\,N(y_1)$$
$$+Ke^{-rT}(H/S_0)^{2\lambda-2}\,N\left(y_1 - \sigma\sqrt{T}\right)$$

et :

$$c_{di} = c - c_{do}$$

avec :

$$x_1 = \frac{\ln(S_0/H)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}, \quad y_1 = \frac{\ln(H/S_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

Le call up-and-out est un call classique qui cesse d'exister dès que le prix de l'actif sous-jacent atteint la barrière, H, dans ce cas fixée à un niveau supérieur au prix initial de l'actif. Le call up-and-in consiste par contre en un call classique ne commençant son existence qu'une fois la même barrière atteinte par le prix de l'actif sous-jacent. Si le niveau de la barrière, H, est inférieur ou égal à K, la valeur du call up-and-out, notée c_{uo}, est nulle et le call up-and-in correspondant, dont nous noterons la valeur c_{ui}, vaut c. Pour H supérieur à K, on a :

$$c_{ui} = S_0N(x_1)\,e^{-qT} - Ke^{-rT}N\left(x_1 - \sigma\sqrt{T}\right) - S_0e^{-qT}(H/S_0)^{2\lambda}\left[N(-y) - N(-y_1)\right]$$
$$+Ke^{-rT}(H/S_0)^{2\lambda-2}\left[N\left(-y + \sigma\sqrt{T}\right) - N\left(-y_1 + \sigma\sqrt{T}\right)\right]$$

et :

$$c_{uo} = c - c_{ui}$$

Les options de vente barrières sont définies de la même manière que les options d'achat barrières. Un put up-and-out est un put qui cesse d'exister dès que le prix de l'actif sous-jacent atteint la barrière, H, supérieure au prix initial de l'actif. Un put up-and-in consiste en un put ne commençant son existence qu'une fois la même barrière atteinte. Quand la barrière est fixée à un niveau H supérieur ou égal au prix d'exercice, leurs prix sont :

$$p_{ui} = -S_0e^{-qT}\,(H/S_0)^{2\lambda}\,N(-y) + Ke^{-rT}(H/S_0)^{2\lambda-2}\,N\left(-y + \sigma\sqrt{T}\right)$$

et :

$$p_{uo} = p - p_{ui}$$

Quand le niveau H de la barrière est inférieur ou égal à K, nous avons :

$$p_{uo} = -S_0N(-x_1)\,e^{-qT} + Ke^{-rT}N\left(-x_1 + \sigma\sqrt{T}\right) + S_0e^{-qT}\,(H/S_0)^{2\lambda}\,N(-y_1)$$
$$-Ke^{-rT}(H/S_0)^{2\lambda-2}\,N\left(-y_1 + \sigma\sqrt{T}\right)$$

et :

$$p_{ui} = p - p_{uo}$$

Un put down-and-out est un put qui disparaît dès que la barrière, d'un niveau inférieur au prix de l'actif sous-jacent, est atteinte. Un put down-and-in consiste pour sa part en un put ne commençant son existence qu'une fois la même barrière atteinte. Quand le niveau de la barrière est inférieur au prix d'exercice, les formules d'évaluation sont :

$$p_{di} = -S_0N(-x_1)\,e^{-qT} + Ke^{-rT}N\left(-x_1 + \sigma\sqrt{T}\right) + S_0e^{-qT}\,(H/S_0)^{2\lambda}\,[N(y) - N(y_1)]$$
$$-Ke^{-rT}(H/S_0)^{2\lambda-2}\left[N\left(y - \sigma\sqrt{T}\right) - N\left(y_1 - \sigma\sqrt{T}\right)\right]$$

et :

$$p_{do} = p - p_{di}$$

Toutes ces formules ne sont valables que dans le cas où la distribution de probabilité du prix de l'actif sous-jacent à une date future est supposée log-normale. Une question importante pour les options barrières concerne la détermination de la fréquence d'observation du prix de l'actif sous-jacent, S, dans la mesure où elle conditionne la probabilité d'atteinte de la barrière. Les formules analytiques données dans cette section reposent sur l'hypothèse d'une observation continue de ce prix, ce qui dans certains cas correspond à peu de choses près à la réalité[4]. Souvent, les termes du contrat fixent la périodicité avec laquelle S est observée, par exemple tous les jours à 12 h 00 précises. Broadie, Glasserman et Kou[5] donnent un moyen d'ajuster les formules précédentes pour le cas où le prix de l'actif sous-jacent n'est observé qu'à des dates discrètes. Il suffit pour cela de remplacer le niveau H de la barrière par $He^{0{,}5826\sigma\sqrt{T/m}}$ pour les options up-and-in et up-and-out, et par $He^{-0{,}5826\sigma\sqrt{T/m}}$ pour les options down-and-in et down-and-out, m correspondant au nombre d'observations du prix de l'actif (T/m correspondant alors à l'intervalle de temps entre deux observations).

Les options barrières ont souvent des propriétés les distinguant des options classiques. Ainsi, le vega peut être négatif. Par exemple, c'est le cas d'un call up-and-out dont le prix de l'actif sous-jacent est proche du niveau de la barrière. Une augmentation de la volatilité accroît alors la probabilité d'atteindre cette barrière. Dès lors, le prix de l'option est une fonction décroissante de la volatilité.

4. Une bonne méthode pour déterminer si et quand la barrière est atteinte par en dessous (respectivement par au-dessus) consiste à passer sur le marché du sous-jacent un ordre de vente (resp. d'achat) à prix limité au niveau de la barrière. Le cas échéant, l'ordre est exécuté au moment où la barrière est atteinte.

5. Voir M. Broadie, P. Glasserman et S. G. Kou, « A Continuity Correction for Discrete Barrier Options », *Mathematical Finance*, 7, n° 4 (octobre 1997), 325-349.

22.7 Les options digitales

Les options digitales (encore appelées binaires) ont pour particularité des payoffs discontinus. L'exemple le plus simple d'option binaire est le call *cash-or-nothing*, qui n'engendre aucun payoff quand l'option termine en dehors, mais paie un flux fixé, Q, quand l'option termine en dedans. Dans un univers risque-neutre, nous avons noté $N(d_2)$ la probabilité que le prix de l'actif sous-jacent soit supérieur au prix d'exercice à la date d'échéance, T. La valeur du call cash-or-nothing est donc tout simplement $Qe^{-rT}N(d_2)$. Pareillement, le put cash-or-nothing paie un flux Q si le prix terminal de l'actif sous-jacent est inférieur au prix d'exercice, et ne paie rien sinon ; sa valeur initiale est donc égale à $Qe^{-rT}N(-d_2)$.

Le call asset-or-nothing constitue un autre type d'option digitale. Il ne délivre aucun flux si le prix de l'actif sous-jacent termine sous le prix d'exercice, mais délivre un montant égal au prix de l'actif sous-jacent si celui-ci est supérieur au prix d'exercice à l'échéance. En reprenant les notations habituelles, la valeur d'un call asset-or-nothing est $S_0e^{-qT}N(d_1)$. Un put asset-or-nothing ne délivre aucun flux si le prix de l'actif sous-jacent termine au-dessus du prix d'exercice, mais paie un montant égal au prix terminal de l'actif sous-jacent si celui-ci est inférieur au prix d'exercice à l'échéance. La valeur d'un tel put asset-or-nothing est $S_0e^{-qT}N(-d_1)$.

Un call européen classique est équivalent à une position longue dans un call asset-or-nothing associée à une position courte dans un call cash-or-nothing qui délivrerait un montant égal au prix d'exercice du call classique. De la même manière, un put européen classique est équivalent à une position longue dans un put cash-or-nothing, qui délivrerait un montant égal au prix d'exercice du call classique, associée à une position courte dans un put asset-or-nothing.

22.8 Les options lookback

Les payoffs délivrés par les options lookback dépendent du niveau maximal ou minimal atteint par le prix du sous-jacent pendant la durée de vie de l'option. Le payoff d'un call lookback européen est égal au montant duquel le prix terminal du sous-jacent dépasse le prix minimal atteint par ce même actif pendant la durée de vie de l'option. Le payoff d'un put lookback européen est égal au montant duquel le prix maximal du sous-jacent atteint pendant la durée de vie de l'option dépasse le prix terminal du sous-jacent.

Des formules d'évaluation ont été développées pour les options lookback[6], et dans le cas d'un call lookback européen, la valeur initiale est donnée par :

$$S_0e^{-qT}N(a_1) - S_0e^{-qT}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}N(-a_1) - S_{\min}e^{-rT}\left(N(a_2) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)}e^{Y_1}N(-a_3)\right)$$

6. Voir B. Goldman, H. Sosin et M. A. Gatto, « Path-Dependent Options : Buy at the Low, Sell at the High », *Journal of Finance*, 34 (décembre 1979), 1111-1127, et M. Garman, « Recollection in Tranquility », *RISK*, mars 1989, 16-22.

avec :

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\ln(S_0/S_{\min}) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
a_2 &= a_1 - \sigma\sqrt{T} \\
a_3 &= \frac{\ln(S_0/S_{\min}) + (-r + q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
Y_1 &= -\frac{2(r - q - \sigma^2/2)\ln(S_0/S_{\min})}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

avec $S_{\min}$ le prix minimal atteint jusque-là. (Dans le cas où l'option vient juste d'être émise, $S_{\min} = S_0$.) Le problème 22.23 traite le cas $r = q$.

La valeur initiale d'un put lookback européen est :

$$
S_{\max}e^{-rT}\left(N(b_1) - \frac{\sigma^2}{2\,(r-q)}e^{Y_2}N(-b_3)\right) + S_0e^{-qT}\frac{\sigma^2}{2\,(r-q)}N(-b_2) - S_0e^{-qT}N(b_2)
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\ln(S_{\max}/S_0) + (-r + q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
b_2 &= b_1 - \sigma\sqrt{T} \\
b_3 &= \frac{\ln(S_{\max}/S_0) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
Y_2 &= \frac{2(r - q - \sigma^2/2)\ln(S_{\max}/S_0)}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

avec $S_{\max}$ le prix maximal atteint jusque-là. (Dans le cas où l'option vient juste d'être émise, $S_{\max} = S_0$.)

■ Exemple 22.1

Considérons un put lookback d'échéance 3 mois venant d'être émis, portant sur une action ne versant pas de dividendes et cotant 50 € à ce jour. Le taux sans risque annuel est égal à 10 % et la volatilité de l'action est estimée à 40 %. On a dans ce cas $S_{\max} = S_0 = 50$, $r = 0{,}1$, $q = 0$, $\sigma = 0{,}4$ et $T = 0{,}25$. D'après les formules que nous venons de détailler, $b_1 = -0{,}025$, $b_2 = -0{,}225$, $b_3 = 0{,}025$ et $Y_2 = 0$; la valeur du put lookback est donc 7,79 €. La valeur du call lookback nouvellement émis ayant les mêmes caractéristiques est 8,04 €.

Le call lookback permet en fait à son détenteur d'acheter l'actif sous-jacent au prix minimal atteint pendant la durée de vie de l'option. De même, le put lookback permet à son détenteur de vendre l'actif sous-jacent au prix maximal atteint pendant la durée de vie de l'option. Comme nous l'avons vu pour les options barrières, la valeur des options lookback risque fort d'être sensible à la fréquence d'observation des prix retenue pour la détermination des prix minimaux et maximaux. Les formules analytiques que nous venons de développer reposent sur l'hypothèse d'une observation continue des

prix. Broadie, Glasserman et Kou donnent un moyen d'ajuster ces formules quand le prix de l'actif sous-jacent n'est observé qu'à des dates discrètes[7].

22.9 Les options shout

Les options shout sont des options européennes pour lesquelles le détenteur de l'option peut « appeler » une fois sa contrepartie pendant la durée de vie du contrat. À la date d'échéance, le détenteur reçoit la valeur la plus élevée entre le payoff classique d'une option européenne et la valeur intrinsèque de l'instant de l'appel. Prenons le cas du détenteur d'un tel call de prix d'exercice 50 € qui aurait appelé à un moment où le prix de l'actif sous-jacent valait 60 €. Si la valeur terminale de l'actif sous-jacent est inférieure à 60 €, le détenteur de l'option touche 10 € et si la valeur terminale de l'actif est au contraire supérieure à 60 €, le détenteur de l'option touche la différence entre le prix de l'actif et le prix d'exercice (qui est égal à 50 €).

Les options shout ont certaines des caractéristiques des options lookback mais sont beaucoup moins coûteuses. Pour les évaluer, il faut noter que si l'option est appelée à la date τ et si l'actif sous-jacent vaut S_τ à cette date, le payoff de l'option est

$$\max(0\,;\, S_T - S_\tau) + (S_\tau - K)$$

avec, comme toujours, K le prix d'exercice et S_T la valeur de l'actif sous-jacent à la date T. La valeur de l'option en cas d'appel à la date τ est donc la valeur actualisée de $S_\tau - K$, plus la valeur d'une option européenne de prix d'exercice S_τ, valeur qui peut être obtenue à l'aide des formules de Black-Scholes.

L'évaluation de l'option shout peut être effectuée de la manière habituelle à l'aide d'un arbre binomial ou trinomial d'évolution du prix de l'actif sous-jacent. À mesure que l'on revient de la date terminale vers la date initiale, on calcule, à chaque nœud, la valeur de l'option en cas d'appel, et sa valeur en cas d'attente ; la valeur retenue est bien entendu la plus élevée des deux. La procédure d'évaluation d'une option shout paraît ainsi relativement semblable à celle des options américaines classiques.

22.10 Les options asiatiques

Les options asiatiques sont des options dont le payoff dépend du prix moyen de l'actif sous-jacent, calculé sur au moins une partie de la vie de l'option. Le payoff d'un call sur moyenne de prix s'écrit $\max(0\,;\, S_{\text{moy}} - K)$, et le payoff d'un put sur moyenne de prix s'écrit $\max(0\,;\, K - S_{\text{moy}})$, avec S_{moy} le prix moyen de l'actif sous-jacent calculé sur une période initialement spécifiée. Les options sur moyennes de prix sont non seulement moins coûteuses que les options classiques, mais l'on peut en outre affirmer qu'elles répondent mieux que ces dernières à un certain nombre de besoins

7. Voir M. Broadie, P. Glasserman et S. G. Kou, « Connecting Discrete and Continuous Path-Dependent Options », *Finance and Stochastics*, 2 (1998), 1-28.

des trésoriers d'entreprise. Par exemple, considérons un gestionnaire de trésorerie français en attente de 100 millions de dollars US provenant de la filiale américaine de son entreprise, et qui seront versés tout au long de l'année à venir. Il y a de grandes chances pour que ce gestionnaire soit intéressé par une option lui garantissant un taux de change moyen obtenu sur l'année, supérieur à un certain niveau. Un put sur moyenne de prix peut offrir une telle garantie avec beaucoup plus d'efficacité qu'un put classique.

Les options à prix d'exercice moyen constituent une autre catégorie d'options asiatiques. Un call à prix d'exercice moyen délivre un flux terminal égal à $\max(0\,;\, S_T - S_{\text{moy}}$ et un put à prix d'exercice moyen délivre un flux terminal égal à $\max(0\,;\, S_{\text{moy}} - S_T)$. Les options à prix d'exercice moyen permettent de s'assurer que le prix payé pour un actif échangé régulièrement pendant une certaine période reste inférieur à son prix terminal. Elles permettent également de s'assurer que le prix touché pour un actif échangé régulièrement pendant une certaine période reste supérieur à son prix terminal.

Il existe des formules d'évaluation analytiques des options sur moyenne de prix européennes[8], pour autant que la distribution du prix, S, de l'actif sous-jacent soit supposée log-normale et que S_{moy} soit la moyenne géométrique des S. En effet, la moyenne géométrique d'un ensemble de variables log-normales est aussi log-normale. Considérons une option nouvellement émise qui paie, à la date d'échéance T, un flux dépendant de la moyenne géométrique, calculée entre la date zéro et la date T. Dans un univers risque-neutre, on peut montrer que la distribution de probabilité de la moyenne géométrique du prix d'un actif sur une certaine période est égale à la distribution de probabilité du prix de l'actif à la fin de la période, avec un taux de croissance de l'actif égal à $\frac{1}{2}\left(r - q - \sigma^2/6\right)$ (au lieu de $r - q$) et une volatilité égale à $\sigma/\sqrt{3}$ (au lieu de σ). Les options sur moyenne géométrique de prix peuvent donc être évaluées comme des options classiques sur un sous-jacent de volatilité $\sigma/\sqrt{3}$ et payant des dividendes au taux

$$r - \frac{1}{2}\left(r - q - \frac{\sigma^2}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(r + q + \frac{\sigma^2}{6}\right)$$

Pour les options asiatiques définies sur la base de moyennes arithmétiques, ce qui est pratiquement toujours le cas, il n'existe aucune formule analytique exacte. En effet, la loi de la moyenne arithmétique d'un ensemble de variables log-normales n'a pas de bonnes propriétés analytiques. Cette loi est toutefois proche de la loi log-normale, ce qui conduit à de bonnes approximations analytiques de la valeur des options sur moyennes de prix. Pour cela, il convient de calculer avec exactitude les deux premiers moments de la distribution de probabilité de la moyenne arithmétique dans un univers risque-neutre et de supposer ensuite que cette distribution est log-normale[9].

8. Voir A. Kemna et A. Vorst, « A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values », *Journal of Banking and Finance*, 14 (mars 1990), 113-129.

9. Voir S. M. Turnbull et L. M. Wakeman, « A Quick Algorithm for Pricing European Average Options », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26 (septembre 1991), 377-389.

Considérons une option asiatique nouvellement émise, qui délivre à la date d'échéance T un payoff dépendant de la moyenne arithmétique observée entre la date zéro et la date T. Les deux premiers moments, M_1 et M_2, de la moyenne arithmétique dans un univers risque-neutre sont égaux à :

$$M_1 = \frac{e^{(r-q)T} - 1}{(r-q)\,T} S_0$$

et :

$$M_2 = \frac{2e^{\left[2(r-q)+\sigma^2\right]T} S_0^2}{(r-q+\sigma^2)\,(2r-2q+\sigma^2)\,T^2} + \frac{2S_0^2}{(r-q)\,T^2}\left(\frac{1}{2\,(r-q)+\sigma^2} - \frac{e^{(r-q)T}}{r-q+\sigma^2}\right)$$

quand $q \neq r$ (voir le problème 22.23 pour le cas $q = r$).

Si on suppose que la moyenne du prix de l'actif est log-normale, on peut alors traiter l'option sur moyenne comme une option sur contrat futures et reprendre les équations (14.16) et (14.17) en posant :

$$F_0 = M_1 \tag{22.1}$$

et :

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{M_2}{M_1^2}\right) \tag{22.2}$$

- **Exemple 22.2**

  Considérons un call sur moyenne nouvellement émis, d'échéance 1 an et de prix d'exercice 50 €, portant sur une action ne versant pas de dividendes et cotant 50 € à ce jour. Le taux sans risque annuel est égal à 10 % et la volatilité annuelle de l'action a été estimée à 40 %. On a alors $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0{,}1$, $q = 0$, $\sigma = 0{,}4$ et $T = 1$. S'il s'agit d'une option sur moyenne géométrique, elle peut être évaluée comme une option classique de volatilité $0{,}4/\sqrt{3}$, soit 23,09 %, versant des dividendes au taux $(0{,}1 + 0{,}4^2/6)/2$, soit 6,33 %. La valeur de l'option est alors 5,13 €. S'il s'agit au contraire d'une option sur moyenne arithmétique, nous devons d'abord calculer les deux premiers moments, $M_1 = 52{,}59$ et $M_2 = 2\,922{,}76$. Si l'on suppose que la moyenne arithmétique est log-normale, il est possible d'évaluer l'option comme une option sur contrat futures. Les valeurs des équations (22.1) et (22.2) sont $F_0 = 52{,}59$ et $\sigma = 23{,}54$ %, et DerivaGem donne alors une valeur d'option de 5,62 €.

Les formules que nous venons d'utiliser pour les deux premiers moments, M_1 et M_2, de la moyenne arithmétique supposent une observation continue du prix de l'actif. L'annexe de ce chapitre montre comment obtenir M_1 et M_2 à partir d'observations discrètes du prix de l'actif.

Cette analyse peut être adaptée au cas d'options déjà émises depuis un certain temps, pour lesquelles des prix utilisés pour le calcul de la moyenne ont déjà été observés. La durée de vie de l'option est divisée en deux périodes ; la première, passée, d'une durée t_1, pendant laquelle les prix ont déjà été observés, et la seconde, à venir, d'une

durée t_2, correspondant au temps restant jusqu'à l'échéance de l'option. Soit $\bar{S}$ le prix moyen de l'actif sous-jacent pendant la première période ; le payoff de l'option sur moyenne est alors :

$$\max\left(\frac{\bar{S}t_1 + S_{\text{moy}}t_2}{t_1 + t_2} - K{,}0\right)$$

où S_{moy} est le prix moyen de l'actif sur la période de calcul de la moyenne restant à courir. Cette expression est équivalente à :

$$\frac{t_2}{t_1 + t_2}\max(S_{\text{moy}} - K^*{,}0)$$

avec :

$$K^* = \frac{t_1 + t_2}{t_2}K - \frac{t_1}{t_2}\bar{S}$$

Si K^* est positif, l'option peut être évaluée comme une option asiatique nouvellement émise dont on aurait changé le prix d'exercice K en K^* ; il suffit ensuite de multiplier le résultat obtenu par $t_2/(t_1 + t_2)$. Si K^* est négatif, l'option sera exercée avec certitude et peut donc être évaluée comme un contrat forward. Sa valeur est donc :

$$\frac{t_2}{t_1 + t_2}\left(M_1 e^{-rt_2} - K^* e^{-rt_2}\right)$$

22.11 Les options d'échange d'un actif contre un autre

Les options d'échange d'un actif contre un autre (aussi appelées plus simplement options d'échange) sont très variées. Une option d'achat de dollars US avec des yens est, du point de vue de l'investisseur européen, une option d'échange d'une devise étrangère contre une autre devise étrangère. Une offre publique d'échange est une option d'échange d'actions d'une société contre des actions d'une autre société.

Considérons une option européenne permettant la livraison d'un actif d'une valeur U_T à la date T contre la réception d'un actif d'une valeur V_T. Le flux terminal de cette option est :

$$\max(V_T - U_T\,;\,0)$$

Une formule d'évaluation de cette option a initialement été proposée par Margrabe[10]. Supposons que les prix des actifs U et V suivent tous deux des mouvements browniens géométriques de volatilités respectives σ_U et σ_V, que la corrélation instantanée entre U et V soit ρ, et enfin que les actifs U et V paient des flux aux taux q_U et q_V. La valeur de l'option à la date zéro est dans ce cas égale à :

$$V_0 e^{-q_V T} N(d_1) - U_0 e^{-q_U T} N(d_2) \tag{22.3}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + (q_U - q_V + \hat{\sigma}^2/2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$

10. Voir W. Margrabe, « The Value of an Option to Exchange One Asset for Another », *Journal of Finance*, 33 (mars 1978), 177-186.

$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$
$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_V^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V}$$

et U_0 et V_0 la valeur de U et V à la date initiale.

Ce résultat sera démontré au chapitre 25. Il est intéressant de noter que l'équation (22.3) est indépendante du taux sans risque r. En effet, à mesure que r augmente, le taux de croissance dans l'univers risque-neutre du prix des deux actifs augmente, mais cette augmentation compense en fait exactement l'accroissement du taux d'actualisation. La variable $\hat{\sigma}$ représente la volatilité de V/U. La comparaison avec l'équation (14.4) permet de dire que le prix de cette option correspond au prix de U_0 calls européens classiques portant sur un actif de valeur V/U, de prix d'exercice 1,0, avec un taux d'intérêt sans risque égal à q_U et un taux de dividende de q_V. Mark Rubinstein montre qu'on peut caractériser de la même façon la version américaine de cette option pour l'évaluer[11]. On peut en fait la voir comme U_0 calls américains classiques sur un actif de valeur V/U, avec un prix d'exercice de 1,0, un taux sans risque égal à q_U et un taux de dividende égal à q_V. Cette option peut donc être évaluée à l'aide d'un arbre binomial classique, procédure déjà décrite au chapitre 17.

Une option permettant d'obtenir le meilleur ou le moins bon de deux actifs peut être vue comme une position longue sur l'un des deux actifs, associée à une option d'échange de cet actif contre l'autre. Les flux correspondants sont en effet :

$$\min(U_T;\ V_T) = V_T - \max(V_T - U_T;\ 0)$$
$$\max(U_T;\ V_T) = U_T + \max(V_T - U_T;\ 0)$$

22.12 Les options sur paniers (basket options)

Les options portant sur deux actifs risqués ou plus sont parfois appelées options arc-en-ciel. Les contrats futures sur obligations d'État, décrits au chapitre 5, échangés sur le CBOT ou l'Eurex, sont des contrats contenant des options arc-en-ciel. Le détenteur de la position courte est en effet en droit de choisir dans le gisement l'obligation qu'il va livrer. L'option *LIBOR-contingent FX* est un autre exemple. Il s'agit d'une option sur devise qui ne verse un payoff que si un taux d'intérêt initialement spécifié se trouve, à l'échéance, dans une fourchette déterminée.

Les options arc-en-ciel les plus populaires sont sans aucun doute les options sur paniers. Il s'agit de contrats d'options dont le payoff dépend de la valeur d'un portefeuille (ou panier) d'actifs, généralement des actions individuelles, des indices boursiers ou des devises. Une option européenne sur panier peut être évaluée par une simulation de Monte Carlo, en supposant que les processus suivis par les prix des actifs sont des mouvements browniens géométriques corrélés. Toutefois, il existe une méthode beaucoup plus rapide, consistant à calculer les deux premiers moments de la valeur du panier d'actifs à l'échéance, dans un univers risque-neutre, et à supposer que la loi

11. Voir M. Rubinstein, « One for Another », *RISK*, juillet/août 1991, 30-32.

suivie à cette date par la valeur du panier est log-normale. L'option peut alors être assimilée à une option sur contrat futures avec les paramètres des équations (22.1) et (22.2). L'annexe de ce chapitre montre comment calculer ces deux premiers moments à partir de la volatilité des actifs et des corrélations existant entre eux. Les corrélations sont généralement estimées à partir de données historiques.

Encadré 22.1 La couverture en delta est-elle plus facile ou plus difficile avec des options exotiques ?

Il est possible d'approcher la couverture d'options exotiques en construisant un portefeuille delta-neutre tel que nous l'avons présenté au chapitre 15 et en l'ajustant régulièrement de sorte que son delta reste nul. Certaines options exotiques paraissent plus faciles à couvrir que les options classiques et d'autres au contraire plus difficiles.

Par exemple, il est relativement facile de couvrir une option sur moyenne de prix pour laquelle la moyenne serait calculée sur la totalité de la durée de vie de l'option. À mesure que le temps passe, une plus grande proportion des prix servant à calculer la moyenne terminale est observée. En d'autres termes, l'incertitude quant à la valeur du payoff décroît au fil du temps et l'option devient de plus en plus facile à couvrir. Les derniers jours, le delta de l'option se rapproche dans tous les cas de zéro puisque les mouvements de prix alors observés n'ont que très peu d'impact sur la moyenne et donc sur le payoff de l'option.

Par contre, les options barrières sont relativement difficiles à couvrir. Considérons par exemple le cas d'un call down-and-out sur devises quand le taux de change est supérieur à la barrière de 0,0005. Dans l'éventualité où la barrière est touchée, l'option ne vaut plus rien. Par contre, si la barrière n'est pas touchée, l'option peut se révéler très profitable. Le delta de l'option est donc discontinu au niveau de la barrière, et il est difficile de couvrir ce contrat en s'appuyant sur des techniques conventionnelles.

22.13 La réplication statique d'options

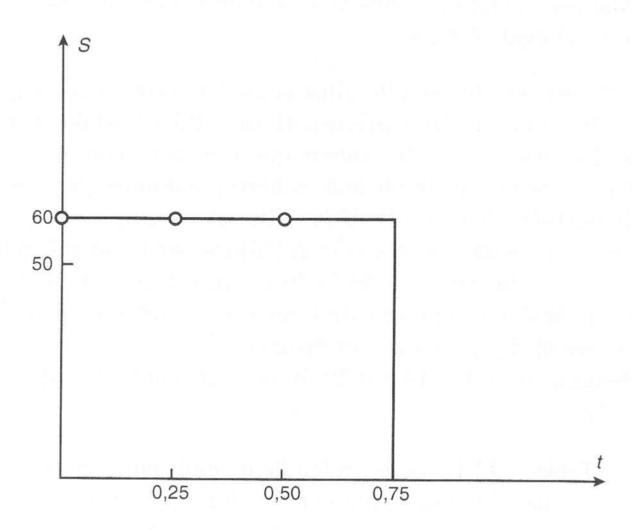
Si l'on applique les techniques de couverture décrites au chapitre 15 aux options exotiques, on s'aperçoit que certains contrats se révèlent faciles à couvrir alors que c'est beaucoup plus difficile pour d'autres, notamment du fait de discontinuités (voir à ce sujet l'encadré 22.1). Quand la couverture classique est difficile, la technique dite de réplication statique d'options[12] peut s'avérer utile. Elle consiste à rechercher un portefeuille d'options liquides qui réplique approximativement l'option exotique. La vente à découvert de ce portefeuille fournit alors la couverture désirée. Le principe

12. Voir E. Derman, D. Ergener et I. Kani, « Static Options Replication », *Journal of Derivatives*, 2, n° 4 (été 1995), 78-95.

fondamental sous-tendant la réplication statique d'options est que deux portefeuilles qui ont la même valeur sur une certaine frontière doivent aussi avoir la même valeur en tout point intérieur à la frontière.

Considérons à titre d'exemple un call up-and-out d'échéance 9 mois, de prix d'exercice 50, avec une barrière de 60, sur une action ne versant pas de dividendes et cotant 50. Le taux sans risque annuel est égal à 10 % et la volatilité annuelle à 30 %. Soit $f(S, t)$ la valeur de l'option à la date t si le sous-jacent vaut S. Toute frontière dans l'espace des (S, t) peut être sélectionnée pour déterminer le portefeuille de réplication. La frontière définie par $S = 60$ et $t = 0{,}75$, représentée dans le graphique 22.2, apparaît toutefois bien adaptée. Les valeurs de l'option up-and-out sur cette frontière sont données par

$$f(S, 0{,}75) = \max(S - 50\,;\, 0) \text{ pour } S < 60$$
$$f(60, t) = 0 \text{ pour } 0 = t = 0{,}75$$



Graphique 22.2 : Description de la frontière pour l'exemple de réplication statique.

Il existe de nombreuses façons de vérifier approximativement ces conditions aux bornes (sur la frontière) avec des options classiques. L'instrument naturel pour vérifier la première condition aux bornes (correspondant à la date d'échéance) est un call européen classique de prix d'exercice 50 et d'échéance 9 mois. Il est donc intéressant d'intégrer une unité de cette option, que nous appellerons option A, dans le portefeuille de réplication. On peut alors procéder en divisant la durée de vie de l'option en intervalles de durées identiques, puis en sélectionnant des options qui satisfont la seconde contrainte au début de chaque nouvelle période.

Prenons par exemple des intervalles d'une durée de trois mois. L'instrument financier à intégrer doit vérifier la condition aux bornes à la date $t = 0{,}5$. En d'autres termes, une fois qu'il est intégré dans le portefeuille de réplication, celui-ci doit avoir une valeur nulle à la date $t = 0{,}5$ pour $S = 60$. En outre, sa valeur doit être nulle pour la condition précédente puisque celle-ci est déjà vérifiée avec le premier contrat. Un call

européen classique d'échéance 9 mois et de prix d'exercice 60 possède ces propriétés, aussi il sera intégré dans le portefeuille et appelé option B. La valeur de ce contrat au bout de six mois pour un prix $S = 60$ est égale à 4,33, d'après la formule de Black-Scholes. À cette date, le prix de Black-Scholes de l'option A est 11,54, aussi la quantité d'options B à intégrer dans le portefeuille est-elle égale à $-11{,}54/4{,}33 = -2{,}66$.

La seconde condition aux bornes à vérifier concerne la date $t = 0{,}25$. L'option à intégrer doit bien entendu avoir une valeur nulle pour toutes les parties de la frontière déjà examinées jusque-là. Un call européen classique d'échéance 6 mois et de prix d'exercice 60 a cette propriété ; on peut donc l'intégrer au portefeuille (option C). Le contrat vaut 4,33 au bout de trois mois pour $S = 60$. Comme la position en options A et B vaut alors –4,21, il faut intégrer une quantité d'options C égale à $4{,}21/4{,}33 = 0{,}97$.

Finalement, il faut vérifier les conditions aux bornes à la date $t = 0$. Pour cela, on intègre une option D, call européen classique d'échéance 3 mois et de prix d'exercice 60. Des calculs semblables à ceux que nous venons d'effectuer conduisent à une quantité nécessaire d'options D égale à 0,28.

Le tableau 22.1 résume le portefeuille ainsi constitué (voir aussi l'application F du développeur d'applications de DerivaGem). Il vaut 0,73 initialement (c'est-à-dire à la date zéro quand l'action vaut 50), valeur que l'on peut comparer au prix du call up-and-out de 0,31, obtenu avec la formule analytique donnée précédemment dans ce chapitre. Ainsi, le portefeuille de réplication n'est pas identique à l'option up-and-out, ce qui était prévisible puisque ses flux sont répliqués par le portefeuille en seulement trois points de la partie horizontale de la frontière du graphique 22.2. Si le même procédé est appliqué mais en imposant dix-huit points sur la seconde frontière (c'est-à-dire en utilisant des options arrivant à échéance toutes les deux semaines), la valeur du portefeuille de réplication tombe à 0,38. Avec cent points, la valeur du portefeuille devient égale à 0,32.

Tableau 22.1 : Le portefeuille de calls européens construit pour répliquer l'option up-and-out

Option	Prix d'exercice	Échéance (années)	Quantité	Valeur initiale
A	50	0,75	1,00	+6,99
B	60	0,75	–2,66	–8,21
C	60	0,50	0,97	+1,78
D	60	0,25	0,28	+0,17

Pour couvrir un actif dérivé, on vend à découvert le portefeuille vérifiant les conditions aux bornes. L'avantage procuré par rapport à une couverture en delta est que cela ne nécessite pas un ajustement fréquent. La méthode de réplication statique est applicable pour une large classe de produits dérivés. L'utilisateur a une grande flexibilité

dans le choix de la frontière et dans celui des options à intégrer dans le portefeuille de réplication. Ce portefeuille doit être liquidé dès que la frontière est touchée.

Résumé

Par rapport aux options classiques, les options exotiques engendrent des payoffs dont la formulation est plus complexe. Nous avons présenté dans ce chapitre douze types d'options exotiques : packages, options américaines non standard, options à départ différé, options composées, options au choix, options barrières, options binaires, options lookback, options shout, options asiatiques, options d'échange d'un actif contre un autre, et options sur paniers. Nous avons montré comment ces options pouvaient être évaluées en nous appuyant sur les mêmes hypothèses que celles ayant permis d'obtenir la formule de Black-Scholes au chapitre 13. Certaines de ces options peuvent être évaluées analytiquement, mais seulement au prix d'une complication accrue des formules; certaines peuvent faire l'objet d'approximations analytiques. On doit avoir recours à des extensions des procédures numériques développées au chapitre 17 pour évaluer les dernières. Nous présentons au chapitre 24 des procédures numériques avancées pour l'évaluation des options exotiques.

Certaines de ces options sont plus faciles à couvrir que les options classiques correspondantes, alors que c'est l'inverse pour d'autres. En général, les options asiatiques sont plus faciles à couvrir car leurs payoffs deviennent moins incertains à mesure que l'échéance approche. Les options barrières sont par contre plus difficiles à couvrir car leur delta est discontinu au niveau de la barrière. L'approche de couverture des options exotiques par la réplication statique consiste à déterminer un portefeuille d'options classiques dont la valeur est identique à celle de l'option exotique sur certaines frontières. L'option exotique est alors couverte par la vente à découvert de ce portefeuille.

Références complémentaires

CLEWLOW L. et C. STRICKLAND, *Exotic Options, The State of the Art*, Thomson Business Press, London, 1997.

DERMAN E., D. ERGENER et I. KANI, « Static Options Replication », *Journal of Derivatives*, 2, n° 4 (été 1995), 78-95.

DERMAN E., I. KANI et N. CHRISS, « Static Options Replication », *Journal of Derivatives*, 1, n° 4 (été 1994), 6-14.

GESKE R., « The Valuation of Compound Options », *Journal of Financial Economics*, 7 (1979), 63-81.

GOLDMAN B., H. SOSIN et M. A. GATTO, « Path Dependent Options : Buy at the Low, Sell at the High », *Journal of Finance*, 34 (décembre 1979), 1111-1127.

MARGRABE W., « The Value of an Option to Exchange One Asset for Another », *Journal of Finance*, 33 (mars 1978), 177-186.

MILEWSKY M. A. et S. E. POSNER, « Asian Options : The Sum of Lognormals and the Reciprocal Gamma Distribution », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, n° 3 (septembre 1998), 409-422.

RITCHKEN P., « On Pricing Barrier Options », *Journal of Derivatives*, 3, n° 2 (hiver 1995), 19-28.

RITCHKEN P., L. SANKARASUBRAMANIAN et A. M. VIJH, « The Valuation of Path Dependent Contracts on the Average », *Management Science*, 39 (1993), 1202-1213.

RUBINSTEIN M. et E. REINER, « Breaking Down the Barriers », *RISK*, septembre 1991, 28-35.

RUBINSTEIN M., « Double Trouble », *RISK*, décembre 1991/janvier 1992, 53-56.

RUBINSTEIN M., « One for Another », *RISK*, juillet/août 1991, 30-32.

RUBINSTEIN M., « Options for the Undecided », *RISK*, avril 1991, 70-73.

RUBINSTEIN M., « Pay Now, Choose Later », *RISK*, février 1991, 44-47.

RUBINSTEIN M., « Somewhere Over the Rainbow », *RISK*, novembre 1991, 63-66.

RUBINSTEIN M., « Two in One », *RISK*, mai 1991, 49.

RUBINSTEIN M. et E. REINER, « Unscrambling the Binary Code », *RISK*, octobre 1991, 75-83.

STULZ R., « Options on the Minimum or Maximum of Two Assets », *Journal of Financial Economics*, 10 (1982), 161-85.

TURNBULL S. M. et L. M. WAKEMAN, « A Quick Algorithm for Pricing European Average Options », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26 (septembre 1991), 377-89.

ZHANG P. G., *Exotic Options : A Guide to Second Generation Options*, 2e éd., *World Scientific*, Singapour, 1998.

Problèmes et exercices

22.1 Expliquez la différence entre une option forward start et une option chooser.

22.2 Quels sont les payoffs d'un portefeuille constitué d'un call lookback et d'un put lookback ayant la même échéance ?

22.3 Considérons une option chooser telle que son détenteur ait le droit de choisir entre un call et un put européens à tout instant pendant une période de deux ans. Les dates de maturité et les prix d'exercice sont identiques pour le call et le put et indépendants de la date à laquelle le choix est effectué. Pensez-vous qu'il puisse être optimal d'effectuer le choix avant la fin de la période de deux ans ? Expliquez votre réponse.

22.4 Notons c_1 et p_1 les prix d'un call européen sur moyenne et d'un put européen sur moyenne, de prix d'exercice K et d'échéance T, c_2 et p_2 les prix d'un call européen à prix d'exercice moyen et d'un put européen à prix d'exercice moyen d'échéance T, et c_3 et p_3 les prix d'un call européen et d'un put européen classiques, de prix d'exercice K et d'échéance T. Montrez que :

$$c_1 + c_2 - c_3 = p_1 + p_2 - p_3$$

22.5 Nous avons proposé dans ce chapitre une décomposition de l'option chooser en un call d'échéance T_2 et un put d'échéance T_1. Donnez une décomposition alternative en un call d'échéance T_1 et un put d'échéance T_2.

22.6 Deux formules d'évaluation du call down-and-out sont données à la section 22.6. La première s'applique à un niveau H de la barrière inférieur ou égal au prix d'exercice K, alors que la seconde s'applique à un niveau H de la barrière supérieur ou égal au prix d'exercice K. Montrez que les deux formules sont équivalentes quand $H = K$.

22.7 Expliquez pourquoi un put down-and-out vaut zéro quand la barrière est supérieure au prix d'exercice.

22.8 Supposez que le prix d'exercice d'un call américain sur une action ne versant pas de dividende augmente au taux g. Montrez que l'exercice anticipé du call n'est jamais optimal si g est inférieur au taux d'intérêt sans risque r.

22.9 Comment peut-on évaluer un put forward start sur une action ne versant pas de dividende s'il est convenu que le prix d'exercice sera de 10 % supérieur au prix de l'action au moment où l'option démarre ?

22.10 Si le prix d'une action suit un mouvement brownien géométrique, quel est le processus suivi par $A(t)$, la moyenne arithmétique du prix de l'action entre la date zéro et la date t ?

22.11 Expliquez pourquoi la couverture delta-neutre est plus facile pour les options asiatiques que pour les options classiques.

22.12 Calculez le prix d'une option européenne d'échéance 1 an donnant le droit de livrer 100 onces d'argent en échange d'une once d'or. Les prix respectifs de l'or et de l'argent sont 380 $ et 4 $ l'once, le taux d'intérêt sans risque annuel est égal à 10 %, la volatilité du prix de chacun de ces métaux précieux est estimée à 20 % et la corrélation entre les deux prix vaut 0,7. Vous ignorerez les coûts de stockage.

22.13 Une option européenne down-and-out sur un actif vaut-elle autant qu'une option européenne down-and-out de caractéristiques identiques sur le prix futures de l'actif, pour un contrat futures ayant la même échéance que l'option ?

22.14 Répondez aux questions suivantes sur les options composées :

a. Quelle est la relation de parité call-put existant entre les prix d'un call sur call européen et d'un put sur call européen ? Montrez que les formules données à la section 22.4 vérifient cette relation.

b. Quelle est la relation de parité call-put existant entre les prix d'un call sur put européen et d'un put sur put européen ? Montrez que les formules données à la section 22.4 vérifient cette relation.

22.15 Un call lookback vaut-il plus ou moins à mesure que l'on augmente la fréquence d'observation du prix de l'actif pour le calcul du minimum ?

22.16 La valeur d'un call down-and-out augmente-t-elle ou diminue-t-elle à mesure que l'on accroît la fréquence d'observation du prix de l'actif pour la détermination de l'instant de franchissement de la barrière ? Répondez à la même question pour un call down-and-in.

22.17 Expliquez pourquoi un call européen classique est équivalent à la somme d'un call européen down-and-out et d'un call européen down-and-in. Est-ce aussi le cas pour les contrats de type américain ?

22.18 Quelle est la valeur d'un actif dérivé délivrant un flux de 150 € dans six mois si l'indice CAC 40 vaut plus de 3500 points et zéro sinon ? Supposez pour les calculs que le niveau actuel de l'indice est de 3400 points, que le taux d'intérêt sans risque annuel est égal à 5 %, que la volatilité annuelle de l'indice est estimée à 20 % et que le rendement en dividende de l'indice est de 3 % par an.

22.19 Considérons un call down-and-out sur des contrats futures sur l'argent d'échéance 3 mois, de prix d'exercice 20 $ par once, dont la barrière est 18 $. Le prix futures est 19 $, le taux d'intérêt sans risque est égal à 5 % et la volatilité des futures sur l'argent est estimée à 40 % par an. Expliquez le fonctionnement de ce contrat d'option et évaluez-le. Quelle est la valeur d'un call classique sur contrat futures sur l'argent ayant les mêmes caractéristiques ? Quelle est la valeur d'un call down-and-in sur le même sous-jacent ayant des caractéristiques identiques ?

22.20 Considérons un call lookback européen sur indice boursier d'échéance 9 mois nouvellement émis. Le niveau actuel de l'indice est de 400 points, le taux d'intérêt sans risque annuel est égal à 6 %, le rendement en dividende de l'indice est de 4 % par an, et la volatilité annuelle de l'indice est estimée à 20 %. Estimez ce contrat à l'aide du logiciel DerivaGem.

22.21 Estimez la valeur d'un call européen sur moyenne de prix, nouvellement émis, portant sur une action ne versant pas de dividendes et cotée 30 € aujourd'hui. Le prix d'exercice est fixé à 30 €, le taux d'intérêt sans risque est égal à 5 % et la volatilité du prix de l'action est estimée à 30 %.

22.22 Évaluez les contrats suivants à l'aide du logiciel DerivaGem :

a. Un call européen classique sur une action ne versant pas de dividendes. Le prix de l'action est 50 €, de même que le prix d'exercice, le taux sans risque annuel est égal à 5 %, la volatilité est estimée à 30 %, et le call arrive à échéance dans un an.

b. Un call down-and-out européen de caractéristiques identiques au contrat (**a**) avec une barrière à 45 €.

c. Un call down-and-in européen de caractéristiques identiques au contrat (**a**) avec une barrière à 45 €.

Montrez que la valeur de l'option (**a**) est égale à la somme des valeurs des options (**b**) et (**c**).

22.23 Expliquez les ajustements à effectuer quand $r = q$ (a) pour les formules d'évaluation des calls lookback de la section 22.8 et (b) pour les formules donnant M_1 et M_2 dans la section 22.10.

Questions complémentaires

22.24 Quelle est la valeur en dollars US d'un produit dérivé qui paye 10 000 £ dans un an si le taux de change USD/GBP est supérieur à 1,5000 à cette

date ? Le taux de change est aujourd'hui 1,4800. Les taux d'intérêt en USD et en GBP sont respectivement égaux à 4 % et 8 %. La volatilité annuelle de ce taux de change est estimée à 12 %.

22.25 Considérons un call barrière up-and-out sur une action ne versant pas de dividendes. Le prix de l'action est 50 €, de même que le prix d'exercice, la volatilité est estimée à 30 %, le taux sans risque est égal à 5 %, l'option arrive à échéance dans un an et la barrière est fixée à 80 €. Utilisez le logiciel DerivaGem pour évaluer cette option et représentez la relation entre (a) le prix de l'option et le prix de l'action, (b) le delta et le prix de l'option, (c) le prix de l'option et la distance à l'échéance, et (d) le prix de l'option et la volatilité. Donnez une explication intuitive des résultats obtenus. Montrez que le delta, le gamma, le thêta et le vega d'un call barrière down-and-out peuvent être soit positifs, soit négatifs.

22.26 L'application F du développeur d'applications DerivaGem reprend l'exemple de réplication statique d'options présenté à la section 22.13. Elle permet la construction d'une couverture en utilisant quatre options (comme à la section 22.13) et de deux couvertures avec seize options.

a. Expliquez la différence entre les deux possibilités de construction de la couverture avec seize options. Expliquez intuitivement pourquoi la seconde possibilité fonctionne mieux.

b. Améliorez la couverture à quatre options en modifiant Tmat pour la troisième et la quatrième option.

c. Vérifiez à quel point les portefeuilles de couverture à seize options approchent le delta, le gamma et le vega de l'option barrière.

22.27 Considérons un call down-and-out d'échéance 2 ans sur une devise étrangère. Le taux de change initial est 0,90, le prix d'exercice est 1,00, la barrière est fixée à 0,80, le taux sans risque domestique est égal à 5 % et le taux étranger est égal à 6 % ; la volatilité est estimée à 25 % par an. Utilisez le logiciel DerivaGem pour construire une stratégie de réplication statique de ce contrat avec cinq options.

22.28 La valeur d'un indice boursier est actuellement de 900 points. Le rendement en dividende est de 2 %, le taux sans risque est égal à 5 %, et la volatilité est estimée à 40 %. Utilisez les résultats de l'annexe de ce chapitre pour calculer la valeur d'un call sur moyenne de prix, d'échéance 1 an et de prix d'exercice 900 si le niveau de l'indice boursier utilisé pour le calcul de la moyenne est observé tous les trimestres. Comparez ce résultat avec celui donné par DerivaGem pour la même option, mais avec une observation continue de la valeur de l'indice. Donnez une explication intuitive de la différence entre les deux prix.

22.29 Utilisez le développeur d'applications de DerivaGem pour comparer la performance des couvertures quotidiennes par le delta (a) des options considérées dans les tableaux 15.2 et 15.3, et (b) d'un call sur moyenne, de caractéristiques identiques. Utilisez pour cela l'application C. Pour l'option sur moyenne de prix, il vous faudra modifier le calcul du prix de l'option dans la cellule C16, les payoffs dans les cellules H15 et H16, ainsi que les

deltas (cellules G46 à G186 et N46 à N186). Effectuez vingt séries de simulation de Monte Carlo pour chaque option en appuyant autant de fois sur la touche F9. Pour chaque série, notez le coût d'émission et de couverture de l'option, les quantités échangées sur l'ensemble des vingt semaines et les quantités échangées entre les semaines 11 à 20. Commentez les résultats obtenus.

22.30 Modifiez l'application D du développeur d'applications de DerivaGem pour tester la performance des couvertures par le delta et le gamma d'une option composée call sur call sur 100 000 unités d'une devise étrangère pour un taux de change égal à 0,67, avec un taux sans risque domestique de 5 %, un taux sans risque étranger de 6 % et une volatilité de 12 %. La première option arrive à échéance dans vingt semaines et son prix d'exercice est fixé à 0,015. La seconde option arrive à échéance dans quarante semaines et son prix d'exercice est fixé à 0,68. Expliquez la façon dont vous modifiez les cellules. Commentez la performance de couverture.

Annexe

Le calcul des deux premiers moments des moyennes arithmétiques et des paniers

Considérons tout d'abord le problème du calcul des deux premiers moments de la valeur d'un panier d'actifs à une date future T dans un univers risque-neutre, le prix de chaque actif du panier étant supposé log-normal. Notons :

n : le nombre d'actifs

S_i : la valeur de l'actif i à la date T

F_i : le prix forward de l'actif i[13] pour un contrat d'échéance T

σ_i : la volatilité de l'actif i entre la date zéro et la date T

ρ_{ij} : la corrélation entre les rentabilités des actifs i et j

P : la valeur du panier à la date T

M_1 : le premier moment de P dans un univers risque-neutre

M_2 : le second moment de P dans un univers risque-neutre

Si l'on note $\hat{E}$ l'opérateur d'espérance dans un univers risque-neutre, on a $P = \sum_{i=1}^{n} S_i$, $\hat{E}(S_i) = F_i$, $M_1 = \hat{E}(P)$, et $M_2 = \hat{E}\left(P^2\right)$, et il s'ensuit :

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

En outre,

$$P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} S_i S_j$$

De par les propriétés des distributions log-normales,

$$\hat{E}(S_i S_j) = F_i F_j e^{\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j T}$$

Dès lors,

$$M_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} F_i F_j e^{\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j T}$$

Options asiatiques

Passons maintenant au problème, lié, du calcul des deux premiers moments de la moyenne arithmétique du prix d'un actif calculée à partir d'observations discrètes dans un univers risque-neutre. Le prix de l'actif est observé aux dates T_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Redéfinissons les variables ainsi :

13. Si l'actif i est un titre donné et que le portefeuille contienne par exemple 200 actions de ce titre, alors, en ce qui concerne la première partie de l'annexe, « l'actif » i correspond à 200 actions de ce titre et S_i est la valeur de ces 200 actions.

S_i : la valeur de l'actif à la date T_i

F_i : le prix forward de l'actif pour un contrat d'échéance T_i

σ_i : la volatilité implicite d'une option sur l'actif d'échéance T_i

ρ_{ij} : la corrélation entre les rentabilités de l'actif respectivement calculées jusqu'aux dates T_i et T_j

P : la valeur de la moyenne arithmétique

M_1 : le premier moment de P dans un univers risque-neutre

M_2 : le second moment de P dans un univers risque-neutre

Dans ce cas,

$$M_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} F_i$$

En outre,

$$P^2 = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} S_i S_j$$

Dans ce cas,

$$\hat{E}\left(S_i S_j\right) = F_i F_j e^{\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j\sqrt{T_i T_j}}$$

On peut montrer, pour $i < j$, que :

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_i\sqrt{T_i}}{\sigma_j\sqrt{T_j}}$$

de sorte que :

$$\hat{E}\left(S_i S_j\right) = F_i F_j e^{\sigma_i^2 T_i}$$

et donc :

$$M_2 = \frac{1}{m^2}\left(\sum_{i=1}^{m} F_i^2 e^{\sigma_i^2 T_i} + 2\sum_{i<j} F_i F_j e^{\sigma_i^2 T_i}\right)$$

Chapitre 23

Les dérivés climatiques, d'énergie et d'assurance

Les sous-jacents les plus courants des actifs dérivés sont les actions, les taux de change, les taux d'intérêt et les matières premières. Les futures, forward, options et autres swaps, qui portent sur ces sous-jacents, ont connu un développement extraordinaire depuis plusieurs décennies. Comme nous l'avons illustré au chapitre 21, les dérivés de crédit sont aussi devenus récemment très populaires. Au chapitre 22, nous avons montré qu'une des voies de développement de tous ces produits a consisté à développer des configurations de paiements « exotiques ». Le présent chapitre montre une autre voie de développement qui consiste à miser sur l'originalité du sous-jacent.

Nous y présentons quelques innovations récentes permettant de gérer le risque climatique, celui lié au prix de l'énergie ou encore le risque assuranciel. Certains des marchés que nous allons évoquer sont encore à un stade précoce de leur développement. Au fur et à mesure qu'ils deviendront matures, nous pourrons voir quels changements significatifs surviennent tant au niveau des produits offerts sur le marché qu'à celui de l'utilisation qui en est faite.

23.1 Les questions relatives à l'évaluation

Aux chapitres 11 et 13, nous avons expliqué la démarche d'évaluation en univers risque-neutre. Elle stipule que si on évalue un actif dérivé en supposant que les agents sont neutres face au risque, alors on aboutit au prix d'équilibre – pas seulement dans l'univers risque-neutre mais dans n'importe quel univers. L'approche idoine pour évaluer un actif dérivé consiste à calculer les paiements espérés engendrés par celui-ci et à les actualiser au taux sans risque.

Une approche alternative, souvent employée dans le monde de l'assurance, est appelée approche actuarielle. Elle consiste à utiliser des données historiques pour évaluer

les paiements terminaux espérés et à actualiser ceux-ci au taux sans risque pour en déduire le prix. Les données historiques fournissent une estimation de ces paiements espérés dans l'univers réel. Par conséquent, l'approche actuarielle n'est justifiée que si les paiements engendrés par l'actif dérivé sont les mêmes dans l'univers réel et dans l'univers risque-neutre.

Nous avons montré à la section 11.7 que si nous passons de l'univers réel à l'univers risque-neutre, les volatilités des variables ne sont pas modifiées, mais les taux de croissance de celles-ci peuvent changer. Par exemple, le taux de croissance espéré d'un indice d'actions diminue de 6 à 5 % dans l'univers risque-neutre. Cependant, les taux de croissance peuvent être supposés identiques dans les deux univers si le risque systématique de la variable considérée est nul, en d'autres termes, si la covariance de cette variable avec la rentabilité du marché est nulle[1].

Nous pouvons en déduire dans ce cas que l'approche actuarielle est justifiée dans l'évaluation des actifs dérivés si le risque systématique du sous-jacent est nul.

La caractéristique commune à tous les actifs dérivés considérés dans ce chapitre est la pertinence de l'approche actuarielle. Le risque systématique des sous-jacents aux contrats analysés peut être considéré comme nul.

23.2 Les dérivés climatiques

De nombreuses entreprises ont des résultats qui peuvent être influencés négativement par les conditions climatiques[2]. Il est donc judicieux pour ces sociétés d'envisager de couvrir leur risque climatique de la même manière qu'elles couvrent le risque de change ou de taux d'intérêt. Le thème du changement climatique, évoqué de plus en plus souvent par les médias, ou la canicule de l'été 2003 en Europe, renforcent encore cet argument.

Les premiers dérivés climatiques ont été négociés de gré à gré à partir de 1997. Pour comprendre comment ils fonctionnent, deux variables doivent être définies :

HDD : degrés-jour de chauffage (heating degree days)

CDD : degrés-jour de climatisation (cooling degree days)

Le HDD d'un jour donné est défini par :

$$HDD = \max(0; 65 - A)$$

et le CDD correspondant s'écrit :

$$CDD = \max(A - 65; 0)$$

1. Ce point sera discuté plus en détail au chapitre 31.

2. Le Département de l'énergie US a estimé qu'environ un septième de l'économie américaine était exposé au risque climatique.

où A est la moyenne des températures minimale et maximale du jour considéré, mesurées dans une station météo, en degrés Fahrenheit. Par exemple, si la température maximale du jour (de minuit à minuit) est 68° et la température minimale 44° Fahrenheit, on a $A = 56$. Le HDD du jour est alors égal à 9 et le CDD est nul.

Un dérivé climatique classique est un contrat forward ou une option dont les paiements dépendent des HDD ou CDD cumulés sur une période donnée. Par exemple, un courtier pouvait vendre, en janvier 2006, une option d'achat sur le HDD cumulé de février 2007 à la station météo de l'aéroport de Chicago-Ohare. Le prix d'exercice est par exemple de 700 et le paiement est de 10 000 $ par degré-jour. Si la valeur cumulée réelle est de 820, le paiement est de 1,2 million. Souvent les contrats contiennent une clause de paiement maximal. Si, dans notre exemple, ce paiement est de 1,5 million, le contrat est équivalent à un écart vertical haussier (bull spread). Le client détient un portefeuille constitué d'un achat de call sur HDD cumulés avec un prix d'exercice de 700 et un call vendu avec un prix d'exercice de 850.

Le HDD journalier est une mesure du volume journalier nécessaire pour le chauffage. Au moment où nous écrivons ces lignes, la plupart des dérivés climatiques sont utilisés par les producteurs d'énergie et les consommateurs industriels. Mais la grande distribution, l'industrie agroalimentaire, les agriculteurs et les firmes de l'industrie des loisirs sont aussi des utilisateurs potentiels de dérivés climatiques. La Weather Risk Management Association (www.wrma.org) a été créée pour servir les intérêts de l'industrie de la gestion des risques climatiques.

En septembre 1999, le Chicago Mercantile Exchange a commencé à proposer des futures et des options européennes sur contrats futures climatiques. Les contrats portent sur des HDD et CDD cumulés sur un mois donné et mesurés dans une station météo spécifiée[3]. Le dénouement des contrats s'effectue en cash juste après la fin du mois, dès que les HDD et CDD sont connus. Un contrat futures porte sur 100 USD fois le HDD ou CDD cumulé. Ces derniers sont calculés par la Earth Satellite Corporation, dont l'équipement spécialisé permet une collecte automatique des données.

Le risque systématique de la température mesurée à un endroit donné peut raisonnablement être supposé nul. Il s'ensuit, par l'argument de la section 23.1, que les dérivés climatiques peuvent être évalués par l'approche actuarielle. Considérons par exemple une option d'achat sur le HDD cumulé de février 2008 à l'aéroport de Strasbourg-Entzheim. Nous pouvons collecter environ cinquante années de données auprès de Météo France et estimer la distribution de probabilité des températures, ce qui permet d'en déduire celle du paiement terminal d'un contrat d'option. Notre estimation de la valeur de l'option serait alors la moyenne de cette distribution du paiement, actualisée au taux sans risque. Il est possible d'intégrer une tendance dans l'évolution des températures. Une régression linéaire sur données historiques peut par exemple montrer l'évolution du HDD cumulé de février. Les résultats de cette régression peuvent ensuite être utilisés dans l'estimation de la distribution des températures pour février 2008, incluant ainsi le terme de tendance.

3. Le CME a introduit des contrats pour 10 stations météo différentes (Atlanta, Chicago, Cincinnati, Dallas, Des Moines, Las Vegas, New York, Philadelphie, Portland et Tucson).

23.3 Les dérivés d'énergie

Les entreprises du secteur de l'énergie font partie des utilisateurs de contrats dérivés les plus actifs et les plus sophistiqués. De nombreux produits d'énergie sont échangés à la fois sur les marchés de gré à gré et sur les marchés organisés. Dans cette section, nous présentons les marchés du pétrole, du gaz naturel, ainsi que les dérivés portant sur le prix de l'électricité.

Le pétrole

Le pétrole est une des matières premières les plus importantes, avec une demande mondiale journalière de l'ordre de 80 millions de barils (11 millions de tonnes environ). Des contrats d'approvisionnement de long terme (10 ans), à prix fixes, sont conclus depuis de nombreuses années sur les marchés de gré à gré. Il existe aussi des swaps permettant d'échanger du pétrole à prix fixe contre du pétrole à prix variable.

Dans les années 1970, le prix du pétrole est devenu très volatil. En 1973, la guerre au Moyen-Orient a multiplié le prix par trois. La chute du shah d'Iran en 1979 a provoqué une nouvelle hausse des prix. Ces événements ont fait prendre conscience aux pays producteurs et aux pays consommateurs de la nécessité de disposer d'outils sophistiqués de gestion du risque de prix. Dans les années 1980 se sont donc développés des produits financiers pour répondre à ces besoins, à la fois sur les marchés organisés et sur les marchés de gré à gré.

Pratiquement tous les actifs dérivés, dont les sous-jacents sont les actions ou les indices, possèdent leur pendant sur le marché de gré à gré avec le pétrole comme sous-jacent. Les swaps, les contrats forward et les futures sont très courants. Certains contrats sont sujets à un dénouement en cash, alors que d'autres imposent la livraison du sous-jacent (c'est-à-dire le pétrole).

Les marchés organisés rencontrent aussi un grand succès. Le New York Mercantile Exchange (NYMEX) et l'International Petroleum Exchange (IPE) proposent une grande diversité de contrats futures et d'options sur ces contrats. Ici encore, certains contrats donnent lieu à un règlement en cash et d'autres à la livraison du sous-jacent. Par exemple, le contrat futures sur le Brent, coté sur l'IPE, est débouclé en cash, sur la base du prix du Brent ; le contrat futures coté sur le NYMEX requiert la livraison du pétrole correspondant. Dans les deux cas, la quantité de sous-jacent par contrat est de 1 000 barils. Sur le NYMEX sont aussi traités des contrats sur deux produits raffinés, le fuel domestique et l'essence. Pour ces contrats, la quantité à livrer est de 42 000 gallons.

Le gaz naturel

L'industrie du gaz naturel a connu et connaît encore une période de dérégulation et d'élimination des monopoles d'État. Le fournisseur de gaz naturel n'est plus forcément

le producteur de ce gaz. Les fournisseurs sont donc confrontés au problème de satisfaction de la demande journalière. Un contrat type sur le marché de gré à gré consiste en la fourniture d'une quantité donnée de gaz naturel à un prix stable pendant une période d'un mois. Les contrats forward, les options ou encore les swaps sont aussi traités. Le vendeur du gaz est en général responsable de l'acheminement par pipeline jusqu'au lieu de livraison. Le NYMEX propose un contrat pour la livraison de 10 000 millions de BTU (*British Thermal Units*) de gaz naturel. Ce contrat, s'il n'est pas dénoué avant l'échéance, impose de livrer à un prix uniforme pendant le mois prévu pour la livraison à un terminal gazier en Louisiane. L'IPE propose un contrat analogue à Londres.

L'électricité

L'électricité n'est pas un produit commun du fait des difficultés de stockage[4]. L'offre maximale d'électricité dans une région donnée à un moment précis est déterminée par la capacité maximale de production de l'ensemble des centrales de la région considérée. Aux États-Unis, il y a par exemple 140 régions appelées *zones de contrôle*. L'offre et la demande sont, dans un premier temps, appariées dans chacune des zones et les excès d'offre sont ensuite vendus aux zones déficitaires. Ce sont ces excédents qui constituent le marché de l'électricité. La capacité d'une zone de contrôle à vendre du courant à une autre zone dépend de la capacité de transfert par les lignes électriques d'une zone à l'autre. Ce transfert induit un coût, facturé par le propriétaire de la ligne, et il y a généralement une déperdition d'énergie lors du transfert.

Aux États-Unis, une des utilisations essentielles de l'électricité concerne la production d'air conditionné. De ce fait, la demande d'électricité, et donc le prix de cette ressource, est plus forte pendant les mois d'été que pendant les mois d'hiver. L'impossibilité de stocker l'électricité provoque occasionnellement de très brutales variations de prix. Lors de certaines vagues de fortes chaleurs, des augmentations de 1000 % ont pu être observées pendant de courtes périodes.

Comme celle du gaz naturel, l'industrie de l'électricité a connu et connaît encore une période de dérégulation et de suppression des monopoles d'État. Ce mouvement s'accompagne du développement de marchés d'actifs dérivés. Le NYMEX propose maintenant un contrat futures sur le prix de l'électricité, et un marché de gré à gré actif propose aussi des contrats forward, des swaps et des options. Le contrat type (négocié de gré à gré) autorise l'une des parties à recevoir un nombre spécifié de mégawatts-heure pour un prix fixé à un endroit donné pendant un mois. Dans un contrat 5×8, l'électricité est reçue cinq jours par semaine (du lundi au vendredi) pendant les heures creuses (de 23 heures à 7 heures) d'un mois spécifié. Pour un contrat 5×16, l'électricité est reçue pendant les heures à forte demande (de 7 heures

4. Les producteurs d'électricité disposant d'excédents les utilisent régulièrement pour remonter l'eau dans les centrales hydroélectriques, de façon à produire de l'électricité un peu plus tard. C'est le moyen le plus « direct » de stockage de l'électricité.

à 23 heures). Enfin, pour le 7 × 24, le courant est fourni en continu pendant le mois identifié au contrat.

Les contrats d'option peuvent prévoir soit un exercice quotidien, soit un exercice mensuel. Si l'exercice est quotidien, l'acheteur du contrat peut choisir, chaque jour du mois (en informant un jour à l'avance), de recevoir la quantité prévue au contrat en payant le prix d'exercice. Quand l'exercice est mensuel, une seule décision est prise en début de mois, décision qui détermine la livraison ou non de l'électricité pour le mois entier au prix d'exercice fixé contractuellement.

Sur le marché du gaz naturel ou de l'électricité, il existe des contrats intéressants, appelés « take or pay » ou encore « swing option ». Dans ces contrats, des quantités minimale et maximale d'électricité ou de gaz qui doivent être achetées chaque jour, à un prix donné, par le détenteur du contrat sont spécifiées. Un maximum et un minimum sont aussi définis pour la période mensuelle dans son ensemble. La spécificité de ces contrats réside dans la possibilité donnée au détenteur, pendant le mois, de changer le rythme d'approvisionnement, dans les limites fixées. En général, il existe un nombre maximal de changements de régime autorisés pendant la période de livraison.

Modélisation des prix de l'énergie

Un modèle réaliste d'évolution du prix de l'énergie, mais aussi d'autres matières premières, doit intégrer à la fois la volatilité des prix et le phénomène de retour à la moyenne de ceux-ci. Le modèle ci-après semble acceptable :

$$d\ln(S) = [\theta(t) - a\ln(S)]\,dt + \sigma dZ \tag{23.1}$$

où S est le prix de l'énergie et a et σ sont des constantes. Le terme $\theta(t)$ est destiné à prendre en compte la tendance et la saisonnalité. Au chapitre 31, nous montrons comment construire un modèle trinomial d'évolution à partir des prix futures.

La corrélation entre les variations du prix de l'énergie et la rentabilité du marché est faible. Il est alors sans doute justifié de supposer que les prix se comportent de la même façon dans les univers réel et risque-neutre. Les paramètres de l'équation (31.1) peuvent alors être estimés à partir de données historiques.

Les paramètres sont différents selon les sources d'énergie considérées. Pour le pétrole, le paramètre de retour à la moyenne, a dans l'équation (31.1), est de l'ordre de 0,5, alors que la volatilité σ est d'environ 20 % ; pour le gaz naturel, a est proche de 1 alors que σ avoisine 40 %. En ce qui concerne l'électricité, le coefficient de retour à la moyenne se situe entre 10 et 20 pour une volatilité de 100 à 200 %. La saisonnalité des prix est aussi plus importante sur ce marché de l'électricité[5].

5. Pour une discussion plus détaillée sur le comportement des prix spot des produits d'énergie, voir D. Pilipovic, *Energy Risk*, McGraw-Hill, New York, 1997.

Comment un producteur d'énergie couvre-t-il son risque ?

Un producteur d'énergie est confronté à deux types de risque : le premier est le risque de prix, le second est le risque de volume. Quoique les prix s'ajustent aux volumes produits, la relation entre les deux variables n'est pas parfaite ; par conséquent, les producteurs d'énergie doivent tenir compte de ces deux composantes lorsqu'ils élaborent une stratégie de couverture. Le risque de prix peut être couvert grâce aux actifs dérivés décrits dans cette section. Le risque de volume peut être couvert en utilisant les dérivés climatiques présentés dans la section précédente.

Adoptons les notations suivantes :

Y : profit mensuel

P : prix moyen mensuel de l'énergie

T : température mensuelle pertinente (HDD ou CDD)

Un producteur d'énergie peut utiliser des données historiques pour obtenir l'ajustement optimal par les moindres carrés, sous la forme :

$$Y = a + bP + cT + \epsilon$$

où ϵ est le terme d'erreur. Le producteur peut alors couvrir ses risques pour le mois courant en prenant une position $-b$ sur des contrats forward ou futures d'énergie, et une position $-c$ sur des forward ou futures climatiques. Cette relation peut aussi être utilisée pour analyser l'efficacité de stratégies optionnelles alternatives.

23.4 Les dérivés assuranciels

Quand les actifs dérivés sont utilisés dans un but de couverture, ils présentent de nombreux points communs avec des contrats d'assurance. Les deux types de couvertures sont destinés à fournir une protection contre des événements défavorables. Il n'est donc pas surprenant de constater que des filiales de compagnies d'assurances opèrent sur des marchés d'actifs dérivés et que de nombreuses activités de ces compagnies d'assurances se rapprochent de celles des banques d'investissement.

Traditionnellement, les compagnies d'assurances couvrent leurs risques catastrophiques (CAT), tels que ceux qui sont liés aux tornades, ouragans ou tremblements de terre, par l'intermédiaire de contrats de réassurance. Ces contrats peuvent prendre des formes diverses. Supposons par exemple qu'une compagnie ait une exposition aux tremblements de terre en Californie se montant à 100 millions et qu'elle souhaite réduire cette exposition à 30 millions. Une première solution consiste à contracter avec un réassureur sur une base proportionnelle correspondant à 70 % de l'exposition globale. Si, durant une année donnée, la sinistralité d'origine sismique s'élève à 50 millions, la compagnie supporte seulement 15 millions, soit 30 % du total. Une autre possibilité de couverture moins onéreuse, en ce qui concerne les primes payées, consiste à acheter une série de contrats de réassurance en couches superposées. Le premier fournit une indemnisation pour les sinistres entre 30 et 40 millions, le suivant

couvre les sinistres entre 40 et 50 millions, et ainsi de suite. Chaque contrat est appelé contrat en excédent de sinistre. Le réassureur a en fait vendu un écart vertical haussier (bull spread) sur les pertes totales. Il a acheté un call avec un prix d'exercice qui est la borne inférieure de la couche considérée, et vendu un call dont le prix d'exercice est la borne supérieure de cette couche[6].

Les fournisseurs principaux de réassurance de type CAT ont traditionnellement été les compagnies de réassurance et les groupements Lloyds (qui sont en fait des groupements d'individus fortunés aux responsabilités non limitées). Dans les années qui viennent de s'écouler, les compagnies d'assurances ont constaté que les besoins de réassurance dépassaient ce qui pouvait être proposé par les moyens classiques. De nouvelles possibilités ont donc été envisagées, en particulier par le biais des marchés financiers. Une des causes de cette remise en question fut l'ouragan Andrew qui, en 1992, causa 15 milliards de dollars de dégâts (assurés) en Floride. Le coût de cette catastrophe excédait le montant cumulé des primes encaissées dans cette région pendant les sept années précédentes. On estime que si la ville de Miami avait été touchée, les dégâts assurés auraient dépassé les 40 milliards de dollars.

Cette catastrophe, ainsi que d'autres, a entraîné une hausse des primes d'assurance et de réassurance. Sur les marchés organisés, des contrats futures ont été développés par le CBOT mais n'ont pas connu un grand succès. Les marchés de gré à gré ont aussi proposé de nombreux produits qui sont autant d'alternatives à la réassurance classique. Le plus courant d'entre eux est l'obligation « catastrophique » (CAT bond). Il s'agit d'une obligation, émise par la filiale d'une compagnie d'assurances, payant un taux d'intérêt supérieur au taux usuel du marché. En contrepartie de cette rémunération complémentaire, le détenteur de l'obligation s'engage à fournir de la réassurance en excédent de sinistre. Selon les clauses de l'obligation CAT, les intérêts et/ou le principal peuvent servir à indemniser les sinistres. Dans l'exemple considéré précédemment, dans lequel une compagnie souhaitait couvrir les pertes consécutives à un séisme en Californie (considérons ici la tranche 30 à 40 millions), la compagnie émet 10 millions d'obligations CAT. Dans le cas où les pertes liées aux sinistres dépassent 30 millions, les obligataires perdent tout ou partie du principal. Une autre solution consisterait, pour la compagnie, à émettre un montant beaucoup plus élevé d'obligations en faisant porter la clause « CAT » sur les seuls intérêts.

Les obligations CAT engendrent une rentabilité un peu plus élevée que la normale avec une forte probabilité et une perte conséquente avec une probabilité faible. En quoi un tel actif peut-il être attractif pour les investisseurs ? La réponse est liée à l'absence de corrélation significative entre ces titres et la rentabilité du marché[7]. Il peut donc être judicieux d'ajouter des obligations de ce type à un portefeuille. Ces actifs ont un risque systématique nul et, de ce fait, leur risque total peut être diversifié dans le cadre d'un portefeuille important. Si le rendement espéré d'une obligation CAT est plus élevé que le taux sans risque (et c'est effectivement le cas), ce titre offre

6. La réassurance peut aussi prendre la forme d'une somme fixe versée si le sinistre dépasse un seuil fixé. Le réassureur est alors vendeur d'une option d'achat digitale sur les pertes totales.

7. Voir R. H. Litzenberger, D. R. Beaglehole et E .C. Reynolds, « Assessing Catastrophe Reinsurance-Linked Securities as a New Asset Class », *Journal of Portfolio Management*, hiver 1996, 76-86.

l'opportunité d'améliorer les performances de portefeuille dans l'espace rendement-risque.

Résumé

Ce chapitre a montré que, dans le domaine de la gestion des risques, les marchés d'actifs dérivés ont été très innovants pour répondre aux besoins des différents intervenants.

Le marché des dérivés climatiques est relativement récent, mais il attire déjà considérablement l'attention. Les deux mesures, HDD et CDD, ont été élaborées pour décrire l'évolution des températures pendant un mois donné. Elles sont utilisées pour définir les paiements terminaux d'actifs dérivés, aussi bien sur les marchés organisés que sur les marchés de gré à gré. Il ne fait aucun doute que le développement des marchés de dérivés climatiques sera accompagné de la création de nouveaux produits, sur les précipitations, les chutes de neige, ainsi que sur d'autres variables climatiques.

Sur les marchés de l'énergie, les actifs dérivés sur le pétrole sont déjà couramment négociés depuis un certain temps et jouent un rôle essentiel dans la gestion du risque des producteurs et des consommateurs industriels de pétrole. Les dérivés sur le gaz naturel et l'électricité sont, quant à eux, relativement récents. Ils acquièrent aussi de l'importance pour la gestion du risque dans un contexte de dérégulation et de disparition des monopoles d'État.

Quant aux dérivés assuranciels, ils émergent comme une alternative aux produits classiques d'assurance et de réassurance pour gérer les risques de catastrophe naturelle comme les cyclones ou les tremblements de terre. Nous verrons certainement émerger d'autres types d'assurance (assurance-vie ou automobile) titrisés de la même façon, à mesure que le marché se développera.

Les actifs dérivés assuranciels, climatiques ou d'énergie ont pour caractéristique de présenter une corrélation négligeable avec la rentabilité du marché. On peut donc utiliser l'approche actuarielle pour les évaluer. Cette démarche suppose l'emploi de données historiques pour calculer les paiements espérés et une actualisation de ceux-ci au taux sans risque.

Références complémentaires

Sur les dérivés climatiques

ARDITTI F., L. CAI et M. CAO, « Whether to Hedge », *RISK, Supplement on Weather Risk*, 1999, 9-12.

CAO M. et J. WEI, « Weather Derivatives Valuation and the Market Price of Weather Derivatives », *Journal of Futures Markets*, 24, 11 (novembre 2004), 1065-1089.

HUNTER R., « Managing Mother Nature », *Derivatives Strategy*, février 1999.

Sur les dérivés d'énergie

CLEWLOW L. et C. STRICKLAND, *Energy Derivatives : Pricing and Risk Management*, Lacima Group, 2000.

EYDELAND A. et H. GEMAN, « Pricing Power Derivatives », *RISK*, octobre 1998, 71-73.

JOSKOW P., « Electricity Sectors in Transition », *The Energy Journal*, 19 (1998), 25-52.

KENDALL R., « Crude Oil : Price Schocking », *RISK, Supplement on Commodity Risk*, mai 1999, p. 6.

Sur les dérivés d'assurance

CANTER M. S., J. B. COLE et R. L. SANDOR, « Insurance Derivatives : A New Asset Class for the Capital Markets and a New Hedging Tool for the Insurance Industry », *Journal of Applied Corporate Finance*, automne 1997, 69-83.

FROOT K. A., « The Market for Catastrophe Risk : A Clinical Examination », *Journal of Financial Economics*, 60 (2001), 529-71.

FROOT K. A., *The Financing of Catastrophe Risk*, University of Chicago Press, 1999.

GEMAN H., « CAT Call », *RISK*, septembre 1994, 86-89.

HANLEY M., « A Catastrophe Too Far », *RISK, Supplement on Insurance*, juillet 1998.

LITZENBERGER, R. H., D. R. BEAGLEHOLE et E. C. REYNOLDS, « Assessing Catastrophe Reinsurance-Linked Securities as a New Asset Class », *Journal of Portfolio Management*, hiver 1996, 76-86.

Problèmes et exercices

23.1 Qu'entend-on par HDD et CDD ?

23.2 Donnez un exemple type de contrat à terme sur le gaz naturel.

23.3 Quelles sont les différences entre approche actuarielle et évaluation risque-neutre ? Dans quels cas les deux démarches donnent-elles les mêmes résultats ?

23.4 Supposez que, pour chaque jour du mois de juillet, la température minimale soit de 68 ° Fahrenheit et que le maximum soit de 82 ° Fahrenheit. Quel est le paiement terminal d'une option d'achat sur CDD cumulés avec un prix d'exercice de 250 et un paiement de 5 000 USD par degré-jour ?

23.5 Pourquoi le prix de l'électricité est-il plus volatil que celui des autres sources d'énergie ?

23.6 Pourquoi l'approche fondée sur les données historiques est-elle valide pour évaluer un dérivé climatique ou une obligation CAT ?

23.7 Expliquez la phrase suivante : « Le CDD pour un jour donné est égal au paiement d'une option d'achat sur la température moyenne de ce jour. »

23.8 Supposez que vous disposiez de 50 années de relevés de température. Expliquez avec précision les analyses que vous mettriez en œuvre pour évaluer un contrat forward sur CDD cumulés pour un mois donné.

23.9 Pensez-vous que la volatilité du prix forward d'un contrat à 1 an sur le pétrole est plus élevée ou plus faible que la volatilité du prix spot ? Justifiez votre réponse.

23.10 Quelles sont les caractéristiques d'une source d'énergie dont le prix a une volatilité et un coefficient de retour à la moyenne élevés ? Donnez un exemple d'une telle source d'énergie.

23.11 Comment un producteur de gaz peut-il utiliser les marchés d'actifs dérivés pour couvrir ses risques ?

23.12 Expliquez comment fonctionne une option 5×8 pour mai 2007 sur l'électricité avec un exercice journalier. Et lorsque l'exercice est mensuel ? Lequel de ces deux contrats a la plus grande valeur ?

23.13 Expliquez comment fonctionne une obligation CAT.

23.14 Soit deux obligations ayant le même coupon, la même durée de vie et le même prix ; la première est une obligation de rating B, émise par une entreprise, alors que la seconde est une obligation CAT. Une analyse des données historiques montre que les pertes annuelles espérées sur les deux obligations sont identiques tout au long de leur durée de vie. Laquelle des deux conseilleriez-vous à un gérant de fonds ?

Questions complémentaires

23.15 Les sinistres indemnisés par une compagnie d'assurances pour une police donnée sont approximativement distribués selon une loi gaussienne d'espérance 150 millions et d'écart-type 50 millions (on suppose que ces données sont identiques dans les univers réel et risque-neutre). Le taux sans risque annuel est de 5 %. Quel est le coût des contrats suivants ?

a. Un contrat qui paie 60 % des pertes annuelles sur une base proportionnelle.

b. Un contrat qui paie 100 millions sur l'année si les pertes dépassent 200 millions.

Chapitre 24

Modèles et méthodes numériques avancés

Aux chapitres précédents, les modèles présentés s'appuyaient sur les hypothèses du modèle de Black et Scholes, et les procédures numériques employées étaient relativement simples. Nous présentons maintenant quelques modèles plus récents ainsi que les méthodes numériques associées.

Au chapitre 16, nous avons expliqué comment les traders pouvaient gérer les faiblesses du modèle fondé sur le mouvement brownien géométrique en ayant recours aux surfaces de volatilité. En revanche, dans les modèles d'évaluation d'options exotiques du chapitre 22, il n'existe pas de moyen simple pour calculer la volatilité qui devrait être utilisée pour tenir compte de la courbe de volatilité qui s'ajuste aux options vanille. Par conséquent, il est difficile pour les traders de « choisir » la courbe de volatilité à introduire dans ces modèles. Par exemple, si la surface de volatilité donne une volatilité de 27 % pour évaluer une option vanille à un an de prix d'exercice 40 €, cette valeur peut être tout à fait inappropriée lorsqu'il s'agit d'évaluer une option barrière de même échéance et de même prix d'exercice.

La première partie de ce chapitre présente quelques alternatives à l'hypothèse de mouvement brownien géométrique pour le prix du sous-jacent. Les paramètres de ces modèles peuvent être choisis de façon à ajuster la courbe de volatilité observée sur le marché.

Dans la seconde partie sont analysées les extensions des méthodes numériques des chapitres précédents. Nous montrons comment utiliser des méthodes d'arborescence pour évaluer des options dont les payoffs dépendent de la trajectoire suivie par le sous-jacent (*path-dependent*). Nous développons quelques cas particuliers d'adaptation des méthodes numériques aux options barrières, ainsi que les techniques permettant d'évaluer des options sur sous-jacents multiples et corrélés. Enfin, nous expliquons

comment la simulation de Monte Carlo peut aider à la prise en compte des possibilités d'exercice prématuré.

Comme aux chapitres précédents, les résultats sont présentés pour des actifs dont le sous-jacent paie des flux intermédiaires au taux q. Pour une option sur action, q est le taux de dividende ; s'il s'agit d'une option sur devise, q est le taux sans risque étranger, et si le sous-jacent est un contrat futures, q est le taux sans risque domestique.

24.1 Les alternatives au modèle de Black et Scholes

Le modèle de Black et Scholes suppose que le prix du sous-jacent à n'importe quelle date future suit une loi log-normale. Il existe cependant de nombreuses alternatives à cette hypothèse. On peut supposer que, même si les prix changent en temps continu avec des trajectoires continues, la loi suivie par ce prix à un instant donné est autre que la loi log-normale. Une deuxième possibilité consiste à autoriser des sauts dans le processus de prix. Enfin, une troisième voie consiste à supposer que l'évolution des prix se fait uniquement par sauts.

Au cours de cette section, nous allons considérer des exemples de chacune de ces possibilités. On appelle modèle de diffusion un modèle dans lequel les changements de prix présentent des trajectoires continues. Quand des sauts sont possibles, on parle de modèle (mixte) de diffusion à sauts. Enfin, on appelle modèle à sauts pur un modèle dans lequel tous les changements de prix surviennent à l'occasion de sauts dans la trajectoire de prix. On appelle alors processus de Levy[1] le processus stochastique de prix.

Le modèle à élasticité constante de la variance

Le modèle à élasticité constante de la variance, ou modèle CEV (*Constant Elasticity of Variance*), suppose que le prix du sous-jacent dans l'univers risque-neutre est de la forme :

$$dS = (r - q)S\,dt + \sigma S^{\alpha} dz$$

où r est le taux sans risque, q est le taux de dividende, z est un mouvement brownien, σ est la volatilité, et α est une constante positive[2]. La rentabilité de l'action a donc une volatilité $\sigma S^{\alpha-1}$.

Quand $\alpha = 1$, le modèle CEV s'identifie au mouvement brownien géométrique utilisé jusqu'ici. Quand $\alpha < 1$, la volatilité s'accroît quand le prix diminue. Cela induit une distribution de probabilité compatible avec les observations sur les marchés d'actions,

1. De manière schématique, un processus de Lévy est un processus en temps continu dont les accroissements sont indépendants mais dont les trajectoires n'ont pas de raison d'être continues.

2. Voir J. C. Cox et S. M. Ross, « The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes », *Journal of Financial Economics*, 3 (mars 1976), 145-66.

c'est-à-dire avec une queue de distribution plus épaisse à gauche qu'à droite[3] (voir graphique 16.4). Quand $\alpha > 1$, la volatilité augmente avec le prix de l'actif, induisant une distribution de probabilité avec une queue plus épaisse à droite. Cela correspond à une courbe de volatilité implicite croissante avec le prix d'exercice. Elle est parfois observée sur les options sur futures (voir problème 14.46).

Les formules d'évaluation de calls et puts européens dans ce modèle CEV sont les suivantes :

$$c = S_0 e^{-qT}\left[1 - \chi^2(a, b+2, w)\right] - Ke^{-rT}\chi^2(w, b, a)$$

$$p = Ke^{-rT}\left[1 - \chi^2(w, b, a)\right] - S_0 e^{-qT}\chi^2(a, b+2, w)$$

quand $0 < \alpha < 1$, et :

$$c = S_0 e^{-qT}\left[1 - \chi^2(w, -b, a)\right] - Ke^{-rT}\chi^2(a, 2-b, w)$$

$$p = Ke^{-rT}\left[1 - \chi^2(a, 2-b, w)\right] - S_0 e^{-qT}\chi^2(w, -b, a)$$

quand $\alpha > 1$, avec :

$$a = \frac{\left[Ke^{-(r-q)T}\right]^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 v} \qquad b = \frac{1}{(1-\alpha)} \qquad w = \frac{S^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 v}$$

et :

$$v = \frac{\sigma^2}{2(r-q)(\alpha-1)}\left[e^{2(r-q)(\alpha-1)T} - 1\right]$$

Dans ces expressions, $\chi^2(u, k, h)$est la probabilité pour qu'une variable suivant une loi de χ^2 décentrée à k degrés de liberté, de paramètre de décentrage h, soit inférieure à u. Une procédure de calcul de $\chi^2(u, k, h)$ est donnée dans la note technique n° 12 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr).

Le modèle CEV est très utile pour évaluer les options exotiques sur actions. Les paramètres sont choisis de façon à retrouver les prix des options vanille, dans la mesure du possible, en minimisant la somme des carrés des écarts entre les prix de marché et les prix évalués par le modèle.

Le modèle de diffusion à sauts de Merton

Merton a proposé un modèle dans lequel le prix de l'action suit un mouvement brownien géométrique auquel se superpose un processus à sauts[4].

3. Quand le prix de l'action baisse, cela rend encore plus probables d'autres baisses importantes, alors que si le prix monte, la volatilité diminue, rendant moins probables d'autres hausses importantes.

4. Voir R. C. Merton, « Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous », *Journal of Financial Economics*, 3 (mars 1976), 125-44

Notons :

λ : nombre moyen de sauts par année

k : amplitude moyenne d'un saut, mesurée en pourcentage du prix de l'actif

L'amplitude du saut est supposée tirée d'une loi de probabilité définie dans le modèle. La probabilité d'un saut pendant un intervalle de longueur Δt est égale à $\lambda \Delta t$. Le taux de croissance espéré du prix de l'actif, dû à la composante discontinue (les sauts), est égal à λk. Le processus de prix est alors :

$$\frac{dS}{S} = (r - q - \lambda k)dt + \sigma dz + dp$$

où z est un mouvement brownien et p le processus qui engendre les sauts, appelé processus de Poisson. σ est la volatilité provenant du mouvement brownien géométrique. Les processus z et p sont supposés indépendants. L'hypothèse essentielle faite par Merton est que la composante discontinue de la rentabilité n'engendre que du risque spécifique (non systématique) et n'est donc pas rémunérée par le marché. Cela implique qu'un portefeuille construit comme dans le modèle de Black et Scholes, neutralisant le risque venant de z, sera rémunéré au taux sans risque.

Un cas particulier important du modèle de Merton est celui dans lequel le logarithme de l'amplitude des sauts suit une loi normale. Si on note s l'écart-type de cette loi, Merton montre que le prix d'un call européen s'écrit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} f_n$$

où $\lambda' = \lambda(1 + k)$. La variable f_n est le prix donné par le modèle de Black et Scholes quand le taux de dividende est q, la variance est :

$$\sigma^2 + \frac{ns^2}{T}$$

et le taux sans risque :

$$r - \lambda k + \frac{n\gamma}{T}$$

avec $\gamma = \ln(1 + k)$.

Le modèle engendre des queues de distribution épaisses à droite et à gauche ; il est notamment compatible avec les observations faites sur le marché des changes. Comme pour le modèle CEV, les paramètres sont choisis de façon à minimiser la somme des carrés des écarts entre prix de marché et prix théoriques.

Un autre cas particulier du modèle de Merton est le modèle utilisé dans la section 21.9 pour évaluer les obligations convertibles. Dans ce cas, le saut est toujours à la baisse et égal au prix courant de l'action (voir exercice 24.5).

Le modèle variance-gamma

Le modèle variance-gamma est un bon exemple de modèle à sauts pur[5]. On y définit tout d'abord une variable g comme la variation jusqu'en T d'un processus gamma de taux moyen égal à 1 et de taux de variance v. Un processus gamma est un processus à sauts dans lequel des sauts de faible amplitude surviennent très souvent et des sauts de grande amplitude beaucoup plus rarement. La densité de g s'écrit :

$$\phi(g) = \frac{g^{T/(v-1)}e^{-g/v}}{v^{T/v}\Gamma(T/v)}$$

où $\Gamma(.)$ est la densité de la loi gamma. Elle peut être calculée dans Excel à l'aide de la fonction =LOI.GAMMA(.). À l'intérieur de la parenthèse, on a quatre arguments séparés par un point-virgule. Le premier est g, le deuxième T/v, le troisième v et le dernier est FAUX si on souhaite obtenir la valeur de la densité et VRAI si on veut obtenir la valeur de la fonction de répartition. Notons S_T le prix de l'actif à la date T, S_0 le prix aujourd'hui, r le taux d'intérêt sans risque et q le taux de dividende. Dans l'univers risque-neutre et sous les hypothèses du modèle variance-gamma, $\ln(S_T)$ suit une loi normale, conditionnellement à g. L'espérance conditionnelle s'écrit :

$$\ln(S_0) + (r-q)T + \omega + \theta g$$

et l'écart-type conditionnel est donné par :

$$\sigma\sqrt{g}$$

avec :

$$\omega = \frac{T}{v}\ln\left(1 - \theta v - \sigma^2 v/2\right)$$

Ce modèle variance-gamma est donc caractérisé par trois paramètres : v, σ, θ [6]. Le paramètre v est le taux de variance du processus gamma, σest la volatilité et θ est le paramètre définissant l'asymétrie (*skewness*). Quand il est nul, $\ln(S_T)$ suit une loi symétrique. Quand il est négatif, la distribution montre une asymétrie négative (c'est le cas pour les actions). Enfin, lorsqu'il est positif, la distribution est caractérisée par une asymétrie positive.

Supposons maintenant que nous souhaitions utiliser Excel pour engendrer 10 000 tirages des variations de prix entre 0 et T en utilisant le modèle variance-gamma. Fixons les cellules E1 à E7 respectivement égales à T, v, θ, σ, r, q et S_0. En E8 on définit ω par la formule :

=\$E\$1*LN(1–\$E\$3*\$E\$2–\$E\$4*\$E\$4*\$E\$2/2)/\$E\$2

5. Voir D. B. Madan, P. P. Carr et E. C. Chang, « The Variance- Gamma Process and Option Pricing », *European Finance Review*, 2 (1998), 7-105.

6. Il est bon de noter que ces paramètres sont susceptibles de modifications quand on passe de l'univers réel à l'univers risque-neutre. En revanche, pour les modèles de diffusion, la volatilité est la même dans les deux univers.

On procède alors de la façon suivante :

1. On tire un échantillon de taille 10 000 de g à l'aide de la fonction LOI.GAMMA.INVERSE(). On stocke ces données dans la zone $A1$: $A10000$. Le tirage peut se faire à l'aide de la formule :
   =LOI.GAMMA.INVERSE(ALEA(),$E$1/$E$2,$E$2)
2. Pour chaque valeur de g, on tire au hasard une valeur z selon une loi normale de moyenne θg et d'écart-type $\sigma\sqrt{g}$. On peut pour cela écrire en B1 :

=A1*$E$3+RACINE(A1)*$E$4*LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())

   Il suffit ensuite de recopier cette formule vers le bas jusqu'en B10000.
3. Le prix simulé S_T est donné par :

$$S_T = S_0 \exp\left((r-q)T + \omega + z\right)$$

4. Si on entre dans la cellule C1 la formule :
   = $E$7*EXP(($E$5-$E$6)*$E$1+B1+$E$8)
   et qu'on recopie celle-ci vers le bas jusqu'en C10000, on aura créé un échantillon de la loi de S_T.

Le graphique 24.1 montre la distribution obtenue dans le modèle variance-gamma pour le prix final quand le prix initial est 100, $T = 0{,}5$, $v = 0{,}5$, $\theta = 0{,}1$, $\sigma = 0{,}2$ et $r = q = 0$. À des fins de comparaison, nous avons aussi fait figurer dans ce graphique la loi log-normale correspondant à une volatilité identique de 20 %. Même si cela ne saute pas aux yeux dans ce graphique, la loi variance-gamma a des queues de distribution plus épaisses que la loi log-normale.

Des formules quasi analytiques d'évaluation d'options ont été proposées par Madan *et al.* (1998). Le modèle variance-gamma tend à produire une courbe de volatilité en U, mais pas forcément symétrique. Cette forme est très prononcée pour les maturités courtes et s'atténue pour les maturités plus longues. Ce modèle peut être ajusté pour les options vanille sur actions ou sur devises.

24.2 Les modèles à volatilité stochastique

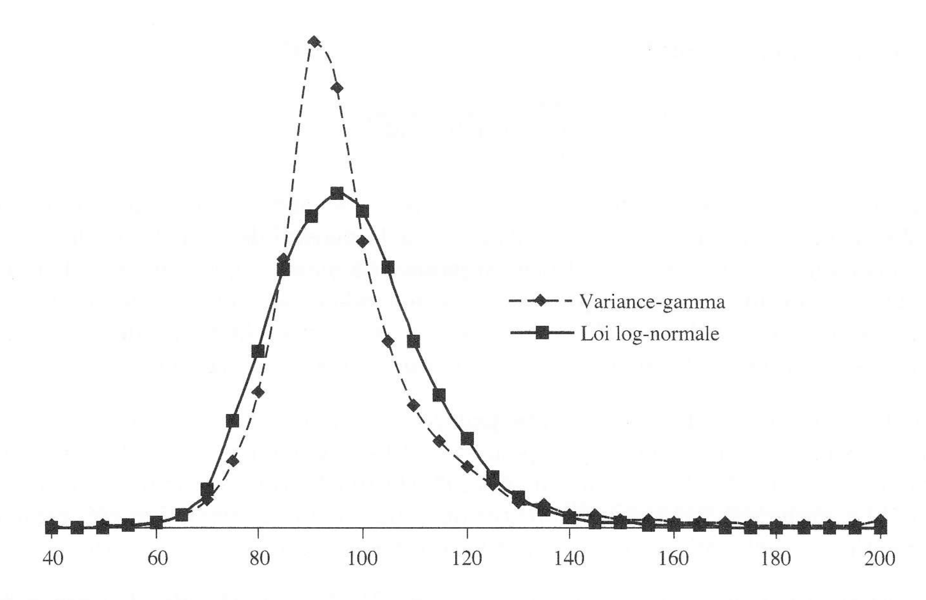
Quand la volatilité est une fonction du temps, comme nous l'avons vu au chapitre 19, le processus risque-neutre du sous-jacent peut s'écrire :

$$dS = (r-q)Sdt + \sigma(t)Sdz \tag{24.1}$$

Les formules de Black et Scholes restent valides à condition de retenir comme volatilité la moyenne des volatilités sur la durée de vie de l'option (voir problème 24.6). Si, par exemple, sur une période d'un an, la volatilité est de 20 % pendant le premier semestre et de 30 % pendant le deuxième, le taux de variance moyen est égal à :

$$0{,}5 \times (0{,}2)^2 + 0{,}5 \times (0{,}3)^2 = 0{,}065$$

Ceci correspond à une volatilité de $\sqrt{0{,}065} = 25{,}5\%$.



Graphique 24.1 : Densités obtenues pour les processus variance-gamma et brownien géométrique.

L'équation (24.1) suppose que la volatilité instantanée de l'actif est parfaitement prévisible puisque σ est une fonction de t seulement. En pratique, la volatilité évolue aléatoirement. Cela a conduit les chercheurs à développer des modèles plus sophistiqués dans lesquels deux processus stochastiques sont à l'œuvre : le prix de l'actif et sa volatilité. Hull et White envisagent les processus suivants :

$$\frac{dS}{S} = (r - q)dt + \sqrt{V}dz_S \tag{24.2}$$

$$dV = a(V_L - V)dt + \xi V^{\alpha}\, dz_V \tag{24.3}$$

où a, α, V_L et ξ sont des constantes, z_V et z_S sont des processus de Wiener. La variable V est donc le taux de variance de l'actif. Le drift de V est conçu de façon à ramener V vers sa moyenne de long terme, V_L, à un rythme a. Hull et White comparent le prix obtenu dans ce modèle avec celui qui est donné par le modèle de Black et Scholes quand le taux de variance est égal au taux de variance moyen durant la vie de l'option.

Hull et White démontrent aussi que, quand la volatilité stochastique n'est pas corrélée au prix de l'actif, le prix d'une option européenne est le prix de Black-Scholes moyen lorsque la moyenne est calculée selon la distribution de probabilité de la variance moyenne durant la durée de vie de l'option[7].

7. Voir J. C. Hull et A. White, « The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities », *Journal of Finance*, 42 (juin 1987), 281-300. Ce résultat est indépendant du processus suivi par le taux de variance.

Le prix de l'option s'écrit donc :

$$\int_0^{+\infty} c(\overline{V})g(\overline{V})d\overline{V}$$

où $\overline{V}$ est la valeur moyenne du taux de variance, c est le prix du modèle de Black-Scholes, exprimé comme fonction de $\overline{V}$, et g est la densité de probabilité de $\overline{V}$ dans l'univers risque-neutre. Ce résultat peut aussi servir à montrer que le modèle de Black et Scholes surévalue les options proches de la monnaie et sous-évalue les options très en dehors ou très en dedans. Ce modèle est cohérent avec la forme des volatilités implicites observée sur les marchés d'options sur devises (voir section 16.2).

Quand le prix de l'actif et la volatilité sont corrélés, le problème est plus complexe, mais une simulation de Monte Carlo peut être utilisée. Quand $\alpha = 0{,}5$, Hull et White s'appuient sur un développement en série, et Heston fournit une expression analytique[8]. La forme des volatilités implicites obtenue quand la corrélation est négative est identique à celle qui est observée sur les options sur actions[9] (voir section 16.3).

Au chapitre 19, nous avons présenté les modèles EWMA et GARCH(1,1) comme des alternatives cohérentes de modélisation de la volatilité[10] (voir problème 19.14 pour l'équivalence entre le modèle GARCH(1.1) et le modèle à volatilité stochastique).

Les modèles à volatilité stochastique peuvent être calibrés à l'aide des prix d'options vanille puis utilisés pour évaluer des options exotiques[11]. Pour les options dont la maturité est inférieure à un an, l'introduction d'une volatilité stochastique n'a qu'un faible impact sur les prix dans l'absolu (cet impact peut toutefois être important en pourcentage pour les options très en dehors). Quand la maturité des options augmente, l'influence du caractère stochastique de la volatilité devient significative.

Par contre, la volatilité stochastique a un effet important sur la performance des couvertures en delta. On peut s'en rendre compte en simulant ce type de stratégies, comme à la section 15.4. La couverture en delta donne de moins bons résultats lorsque la volatilité est stochastique. Cette constatation renforce la remarque faite au chapitre 15 sur la nécessité de contrôler aussi les paramètres vega et gamma.

8. Voir J. C. Hull et A. White, « An Analysis of the Bias in Option Pricing caused by a Stochastic Volatility », *Advances in Futures and Options Research*, 3 (1988), 27-61 ; S. L. Heston, « A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options », *Review of Financial Studies*, 6, n° 2 (1993), 327-41.

9. Ce point est expliqué dans la note de bas de page n° 3.

10. Voir J. C. Duan, « The GARCH Option Pricing Model », *Mathematical Finance*, 5 (1995), 13-32, et J. C. Duan « Cracking the Smile », *RISK*, décembre 1996, 55-9.

11. Pour un exemple de cette utilisation, voir J. C. Hull et W. Suo, « A Methodology for the Assessment of Model Risk and Its Application to the Implied Volatility Function Model », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 2 (juin 2002), 297-318.

24.3 La fonction de volatilité implicite

Pour évaluer des options exotiques, les institutions financières préfèrent utiliser des modèles qui sont déjà capables d'évaluer correctement les options classiques (vanille)[12]. Les modèles présentés jusqu'ici peuvent être calibrés chaque jour de façon à évaluer correctement les options vanille cotées sur le marché, mais l'ajustement n'est jamais parfait. En 1994, Derman et Kani, Dupire ainsi que Rubinstein ont développé un outil appelé « fonction de volatilité implicite » ou « arbre implicite » (modèle IVF, *Implied Volatility Function*)[13]. Ce modèle est conçu pour ajuster parfaitement les prix d'options européennes observés aujourd'hui, indépendamment de l'allure des surfaces de volatilité. Le processus risque-neutre de prix de l'actif dans ce modèle est donné par :

$$dS = [r(t) - q(t)]Sdt + \sigma(S,t)Sdz$$

où $r(t)$ est le taux forward instantané pour un contrat d'échéance t et $q(t)$ est le taux de dividende comme fonction du temps. La volatilité $\sigma(S,t)$ dépend à la fois de S et de t ; elle est choisie de façon à évaluer correctement les options cotées aujourd'hui. Dupire, Andersen ainsi que Brotherton-Ratcliffe obtiennent une expression analytique pour $\sigma(S,t)$, $t)$ sous la forme[14] :

$$[\sigma(K,t)]^2 = 2\frac{\partial c_{mkt}/\partial T + q(T)c_{mkt} + K\,[r(T) - q(T)]\,\partial c_{mkt}/\partial K}{K^2\,(\partial^2 c_{mkt}/\partial K^2)} \tag{24.4}$$

où c_{mkt} $(K,\ T)$ est le prix d'un call européen de prix d'exercice K et de maturité T. Si un nombre suffisant de calls européens sont cotés sur le marché, cette équation peut être utilisée pour estimer $\sigma(S,\ t)$[15].

Andersen et Brotherton-Ratcliffe mettent ce modèle en œuvre en utilisant l'équation (24.4) conjointement avec un schéma implicite aux différences finies. Une approche alternative, appelée méthode de l'arbre implicite, est suggérée par Derman et Kani ainsi que par Rubinstein. Elle consiste à construire un arbre de prix de l'actif cohérent avec les prix des options cotées sur le marché.

Quand le modèle IVF est utilisé par les professionnels, il est recalibré quotidiennement ; c'est donc un outil utile pour évaluer des options exotiques en cohérence avec les prix observés pour les options vanille. Comme nous l'avons montré au chapitre 16, les prix des options vanille permettent la détermination de la loi de probabilité du prix du sous-jacent à une date future quelconque. Il s'ensuit qu'avec le modèle IVF,

---

12. Il y a une raison pratique à cela. Si une banque n'utilise pas un tel modèle, il y a un risque pour que les traders travaillant pour cette banque cherchent à arbitrer les modèles internes de la banque.

13. Voir B. Dupire, « Pricing with a Smile », *RISK*, février 1994, 18-20 ; E. Derman et I. Kani, « Riding on a Smile », *RISK*, février 1994, 32-39. M. Rubinstein, « Implied Binomial Trees », *Journal of Finance*, 49, n° 3 (juillet 1994), 771-818.

14. Voir B. Dupire, « Pricing With a Smile », *RISK*, février 1994, 18-20 ; L. B. G. Andersen et R. Brotherton-Ratcliffe, « The Equity Option Volatility Smile : An Implicit Finite Difference Approach », *Journal of Computational Finance*, 1, n° 2 (hiver 1997/98), 5-37. Dupire considère le cas où r et q sont nuls. Andersen et Brotherton-Ratcliffe intègrent des considérations plus générales.

15. Une procédure de lissage est nécessaire pour obtenir la surface de volatilité.

on obtient une distribution de probabilité correcte pour le sous-jacent aux dates futures considérées. Par conséquent, les options qui engendrent un seul flux à une date donnée sont évaluées correctement par ce modèle. Cependant, la distribution jointe des prix pour un ensemble de dates futures, obtenue dans le cadre du modèle IVF, n'est pas forcément la bonne[16].

24.4 Les actifs dérivés dépendant de la trajectoire du support

Nous allons maintenant voir comment les méthodes du chapitre 17 doivent être modifiées pour résoudre des problèmes d'évaluation particuliers. Nous montrons tout d'abord comment les arbres peuvent être utilisés pour évaluer les options path-dependent.

Un actif dérivé dépendant de la trajectoire suivie par le support (path-dependent) est caractérisé par un payoff s'écrivant comme une fonction plus ou moins complexe de l'historique des prix du sous-jacent. Les options asiatiques ou les options lookback sont des exemples de tels actifs dérivés. Comme nous l'avons vu au chapitre 22, le payoff d'une option asiatique dépend du prix moyen du support, alors que le payoff d'une option lookback dépend du prix maximal ou minimal du sous-jacent.

Lorsque des résultats analytiques ne peuvent être obtenus, on peut recourir aux simulations de Monte Carlo pour évaluer des options path-dependent (voir chapitre 17). Il faut alors tirer un échantillon de trajectoires de prix du sous-jacent, calculer le payoff de l'option pour chacune d'entre elles, déterminer le payoff moyen sur l'échantillon et actualiser au taux sans risque. Quand l'échantillon comporte un grand nombre de trajectoires, la moyenne des valeurs d'option obtenues peut être considérée comme un bon estimateur.

Le problème essentiel est le plus souvent le temps de calcul nécessaire pour obtenir une estimation d'une précision raisonnable. De ce fait, il est délicat d'évaluer les options de type américain par cette méthode. Dans cette section, nous montrons comment les méthodes du chapitre 17 peuvent être étendues de façon à être applicables à certaines options path-dependent[17]. Cette extension est plus efficace que la simulation de Monte Carlo et peut être utilisée pour des options exotiques de type américain. Deux conditions d'application doivent cependant être vérifiées :

16. Les options exotiques, comme les options composées ou à barrière, ne sont donc pas forcément évaluées de manière adéquate. Hull et Suo (2001) ont testé le modèle IVF en supposant que les prix des options étaient déterminés par un modèle à volatilité stochastique. Ils constatent que les options composées sont correctement évaluées, alors que des erreurs importantes sont commises pour les options à barrière (voir J. C. Hull et W. Suo, « A Methodology for the Assessment of Model Risk and Its Application to the Implied Volatility Function Model », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 2 (juin 2002), 297-318).

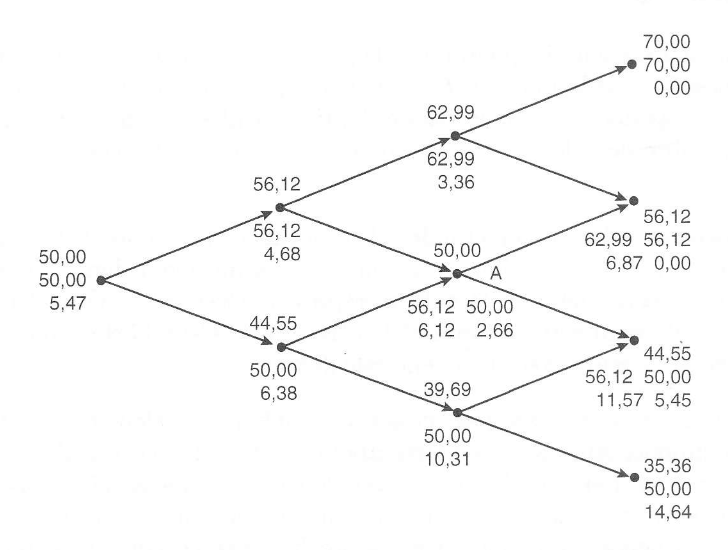
17. Cette démarche a été suggérée par J. Hull et A. White, « Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options », *Journal of Derivatives*, 1, n° 1, hiver 1993, 21-31.

1. Le payoff doit dépendre d'une seule fonction F des trajectoires.
2. Il doit être possible de calculer la valeur de F en $\tau + \Delta t$ à partir de la valeur de F à la date τ et de la valeur du support à la date $\tau + \Delta t$.

Illustration : les options lookback

Considérons un put lookback américain sur une action ne payant pas de dividendes[18] ; s'il est exercé à la date τ, le payoff est la différence entre le prix maximal du support (entre 0 et τ) et le prix du support en date τ. Supposons que l'action cote 50 € et ait une volatilité de 40 % par an ; le taux sans risque est de 10 % par an, l'option a une durée de vie de 3 mois et l'évolution des prix de l'action est régie par un arbre binomial à trois étapes. Avec les notations habituelles, on a $S_0 = 50$, $\sigma = 0{,}4$, $r = 0{,}10$, $\Delta t = 0{,}08333$, $u = 1{,}1224$, $d = 0{,}8909$, $a = 1{,}0084$ et $p = 0{,}5073$.

L'arbre obtenu apparaît dans le graphique 24.2. À chaque nœud, le nombre situé au-dessus est le prix de l'action ; les nombres situés au-dessous des précédents sont les prix maximums atteints depuis l'origine des trajectoires aboutissant au nœud considéré. Enfin, les nombres situés encore en dessous sont les prix de l'actif dérivé, en supposant que la trajectoire prise est celle qui a déterminé le maximum situé juste au-dessus. Les valeurs de l'actif dérivé aux nœuds terminaux sont calculées, pour chaque trajectoire, comme la différence entre prix maximal sur la trajectoire et prix terminal.



Graphique 24.2 : Arbre d'évaluation d'une option lookback américaine.

18. Cet exemple sert de première illustration de la procédure générale permettant de tenir compte de la dépendance du payoff à la trajectoire. Une méthode encore plus efficace pour les options lookback américaines est présentée dans la note technique n° 13 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr).

Pour illustrer la construction, considérons le nœud A où l'action vaut 50 €. Deux trajectoires aboutissent à ce nœud avec des maxima de 56,12 € et 50 €. Si le maximum est 50 € et si une hausse survient, le maximum devient 56,12 € et la valeur de l'actif dérivé est nulle. Si une baisse a lieu en dernière période, le prix maximal est 50 € et l'actif dérivé vaut 5,45 € puisque la valeur terminale du sous-jacent est 44,55 €. En supposant qu'il n'y a pas d'exercice prématuré, la valeur de l'actif dérivé au nœud A, si le prix maximal est de 50 €, est définie par :

$$(0 \times 0{,}5073 + 5{,}45 \times 0{,}4927)e^{-0{,}1\ \times\ 0{,}08333} = 2{,}66\ €$$

Il est clair qu'un exercice prématuré en A n'est pas optimal dans ce cadre puisque le payoff serait nul. Un calcul analogue, en supposant que le prix maximal est cette fois 56,12 €, donne une valeur de l'actif dérivé, sans exercice prématuré, égale à :

$$(0 \times 0{,}5073 + 11{,}57 \times 0{,}4927)e^{-0{,}1\ \times\ 0{,}0833} = 5{,}65\ €$$

Dans ce cas, l'exercice prématuré est optimal puisque le payoff est de 6,12 €. En procédant par induction arrière, on aboutit à une valeur initiale de l'option de 5,47 €.

Généralisation

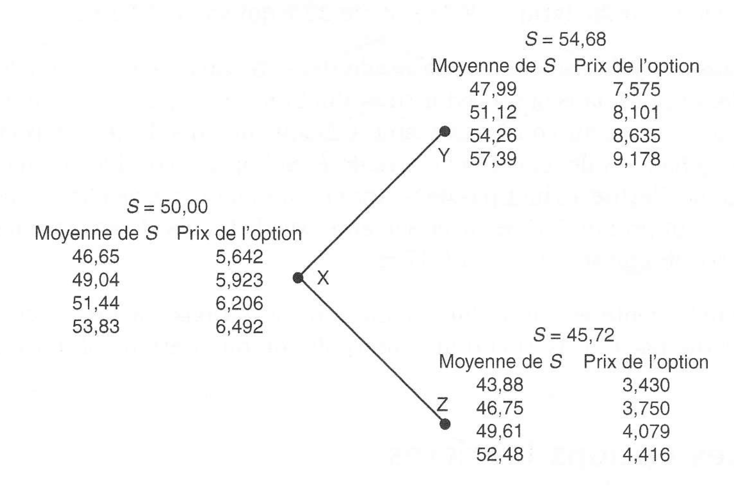
Dans l'exemple précédent, il apparaît que la procédure est maniable tant que le nombre de valeurs possibles de la fonction F n'augmente pas trop rapidement en fonction du nombre de sous-périodes. Dans le cas de l'option lookback, il n'y a pas de problème puisque le nombre de valeurs possibles pour F à la date $n\Delta t$ n'est jamais supérieur à n.

On peut cependant adapter la méthode si la croissance du nombre de valeurs possibles de F est trop rapide. L'intuition est la suivante : à un nœud donné, on effectue les calculs pour un petit nombre de valeurs représentatives de F. Quand la valeur de l'actif dérivé est requise pour évaluer d'autres valeurs sur l'arbre, on procède par interpolation des valeurs précédemment calculées.

La première étape est réalisée par induction avant, pour calculer les minima et les maxima du support sur les trajectoires aboutissant à chaque nœud. En supposant que la valeur de la fonction F en $\tau + \Delta t$ dépend seulement de sa valeur en τ et du sous-jacent en $\tau + \Delta t$, les valeurs maximales et minimales de F en $\tau + \Delta t$ peuvent être facilement obtenues. Une approche possible consiste à retenir parmi les valeurs représentatives le maximum, le minimum et un certain nombre d'autres valeurs régulièrement espacées entre ce maximum et ce minimum. Dans l'induction arrière appliquée ensuite, l'actif dérivé est évalué pour chaque valeur représentative de F. Pour illustrer cette démarche, reprenons le call sur moyenne de l'exemple 22.2 et analysons le cas où le payoff dépend de la moyenne arithmétique des prix. Le prix initial de l'action est de 50 €, de même que le prix d'exercice ; le taux sans risque est 10 %, la volatilité 40 % et la maturité 1 an. Considérons ici un arbre comportant

2vingt pas de temps ; les paramètres sont alors $\Delta t = 0{,}05$, $u = 1{,}0936$, $d = 0{,}9144$, $p = 0{,}5056$ et $1 - p = 0{,}4944$. La fonction F est la moyenne arithmétique des prix du support.

Le graphique 24.3 montre les calculs sur une petite partie de l'arbre (à la fin de la quatrième sous-période). Le nœud X est situé à la date 0,2, alors que les nœuds Y et Z sont à la date 0,25 et peuvent être atteints à partir de X. Le prix en X est 50. L'induction avant permet de savoir que la moyenne arithmétique maximale en X est 53,83 et la moyenne minimale 46,65 (le prix initial et le prix atteint au nœud X entrent dans le calcul de ces moyennes).



Graphique 24.3 : Partie de l'arbre pour évaluer l'option sur moyenne arithmétique.

Au nœud Y le prix est 54,68 et les moyennes maximale et minimale deviennent 57,39 et 47,99. De même, en Z, le prix est 45,72 et les moyennes maximale et minimale sont 52,48 et 43,88.

Supposons que nous ayons choisi quatre valeurs de F également réparties entre maximum et minimum. Au nœud X sont donc retenues les valeurs 46,65 ; 49,04 ; 51,44 et 53,83, alors qu'au nœud Y elles sont égales à 47,99 ; 51,12 ; 54,26 et 57,39. Enfin, au nœud Z, elles valent 43,88 ; 46,75 ; 49,61 et 52,48. Nous supposons que l'induction arrière a déjà été réalisée pour calculer la valeur de l'option pour chaque valeur possible de la moyenne en Y et en Z. Ces valeurs apparaissent dans le graphique 24.3. Par exemple, en Y, l'option vaut 8,101 € quand la moyenne est 51,12 €.

Considérons le calcul de la valeur de l'option au nœud X quand la moyenne est 51,44 €. Si le prix du support devient celui du nœud Y, la nouvelle moyenne s'écrit :

$$\frac{5 \times 51{,}44 + 54{,}68}{6} = 51{,}98$$

La valeur de l'actif dérivé pour cette moyenne est obtenue par interpolation entre les deux valeurs d'options correspondant aux moyennes 51,12 et 54,26. Ce calcul donne :

$$8{,}247 = \frac{(51{,}98 - 51{,}12) \times 8{,}635 + (54{,}26 - 51{,}98) \times 8{,}101}{54{,}26 - 51{,}12}$$

La même démarche appliquée au nœud Z donne une valeur de 4,182 pour l'actif dérivé. On en déduit au nœud X, quand la moyenne est 51,44, une valeur d'option égale à :

$$(0{,}5056 \times 8{,}247 + 0{,}4944 \times 4{,}182)e^{-0{,}1 \times 0{,}05} = 6{,}206$$

Les autres valeurs au nœud X sont obtenues de la même façon. En itérant le processus, on finit par obtenir la valeur de l'option au nœud initial, soit 7,17 €. Lorsque le nombre de pas de temps augmente ainsi que le nombre de valeurs représentatives de F à chaque nœud, le prix calculé pour l'option converge vers la valeur exacte. Avec soixante pas de temps et cent valeurs à chaque nœud, le prix est de 5,58 €, à comparer avec l'approximation analytique de l'exemple 22.2 qui valait 5,62 €.

L'avantage essentiel de cette méthode réside dans sa capacité à intégrer le caractère américain des options dans la procédure d'évaluation. Par rapport à ce qui vient d'être décrit, le seul changement consiste à tester à chaque nœud si l'exercice prématuré est optimal, pour chaque valeur représentative de F. Si l'option considérée précédemment était américaine, l'arbre à vingt pas de temps et trois ou quatre valeurs représentatives conduiraient à un prix de 7,77 € ; avec soixante pas de temps et cent valeurs représentatives, le prix obtenu serait égal à 6,17 €.

L'approche précédente est utile dans nombre de situations ; la précision des calculs peut être accrue par l'utilisation d'une interpolation quadratique plutôt que linéaire.

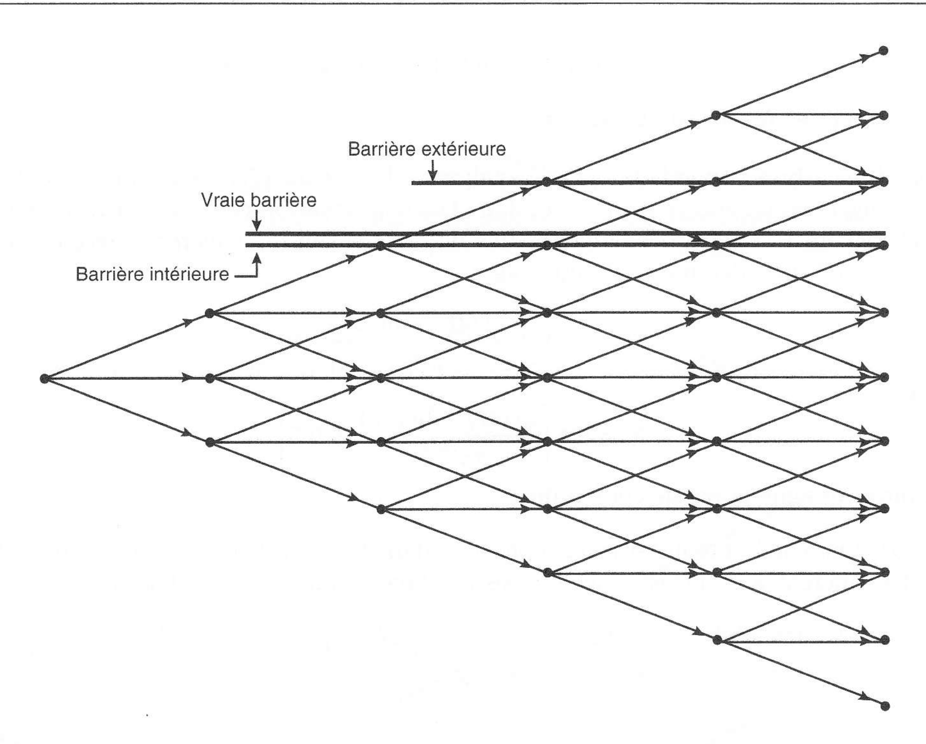
24.5 Les options barrières

Au chapitre 22, nous avons exposé les résultats analytiques permettant l'évaluation des options barrières standard. Nous traitons ici des procédures numériques utilisables quand des solutions analytiques ne sont pas disponibles.

En principe, ces options peuvent être évaluées à l'aide des arbres binomiaux et trinomiaux présentés au chapitre 17. Considérons par exemple une option up-and-out ; il est possible de l'évaluer comme une autre option, à ceci près que si un nœud situé au-dessus de la barrière est atteint, la valeur de l'option devient nulle.

Malheureusement, la convergence est ici aussi très lente. Des subdivisions très fines sont nécessaires pour atteindre une approximation raisonnable. Ceci s'explique par le fait que la barrière sur l'arbre n'est pas située exactement au même niveau que la barrière réelle[19]. Définissons la barrière intérieure comme les nœuds se situant juste en dessous de la vraie barrière (c'est-à-dire plus proches du centre de l'arbre) et la barrière extérieure comme les nœuds se situant juste au-dessus de la vraie barrière (c'est-à-dire plus éloignés du centre de l'arbre que la barrière réelle). Le graphique 24.4 montre ces deux barrières, intérieure et extérieure, pour un arbre trinomial, en supposant que la vraie barrière est horizontale.

19. Pour une discussion sur ce point, voir P. P. Boyle et S. H. Lau, « Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method », *Journal of Derivatives*, 1, n° 4, (été 1994), 6-14.



Graphique 24.4 : Barrières intérieure et extérieure pour un arbre trinomial.

La procédure de calcul suppose en fait que la barrière extérieure est la vraie barrière car les conditions d'annulation de la valeur de l'option sont atteintes sur ces nœuds. Quand le pas de temps est Δt, l'espace vertical entre deux nœuds est d'ordre $\sqrt{\Delta t}$. Les erreurs commises en assimilant la barrière extérieure à la vraie barrière sont donc d'ordre $\sqrt{\Delta t}$.

Pour améliorer l'évaluation, on utilise la démarche suivante :

1. On calcule la valeur de l'actif dérivé en supposant que la barrière intérieure est correcte.

2. On calcule la valeur de l'actif dérivé en supposant que la barrière extérieure est correcte.

3. On interpole entre les deux prix obtenus.

Une approche alternative consiste à supposer que les nœuds se situent sur la barrière. Notons S_0 le prix initial de l'actif et H la barrière. Dans un arbre trinomial, il y a trois mouvements possibles à chaque nœud pour le sous-jacent : un mouvement proportionnel de hausse u, un prix inchangé ou un mouvement proportionnel de baisse d, avec $d = 1/u$. Il est toujours possible de choisir u pour qu'il y ait des nœuds sur la barrière. Il faut pour cela :

$$H = S_0\, u^N$$

ou encore :

$$\ln(H) = \ln(S_0) + N\ln(u)$$

pour un entier N, positif ou négatif.

Quand les arbres trinomiaux ont été analysés à la section 17.4, la valeur $u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}$ a été suggérée, ou encore $\ln(u) = \sigma\sqrt{3\Delta t}$. Dans la situation considérée ici, il est bon de choisir $\ln(u)$ aussi proche que possible de cette valeur, en cohérence avec ce qui a été présenté précédemment. Il faut donc :

$$\ln(u) = \frac{\ln(H) - \ln(S_0)}{N}$$

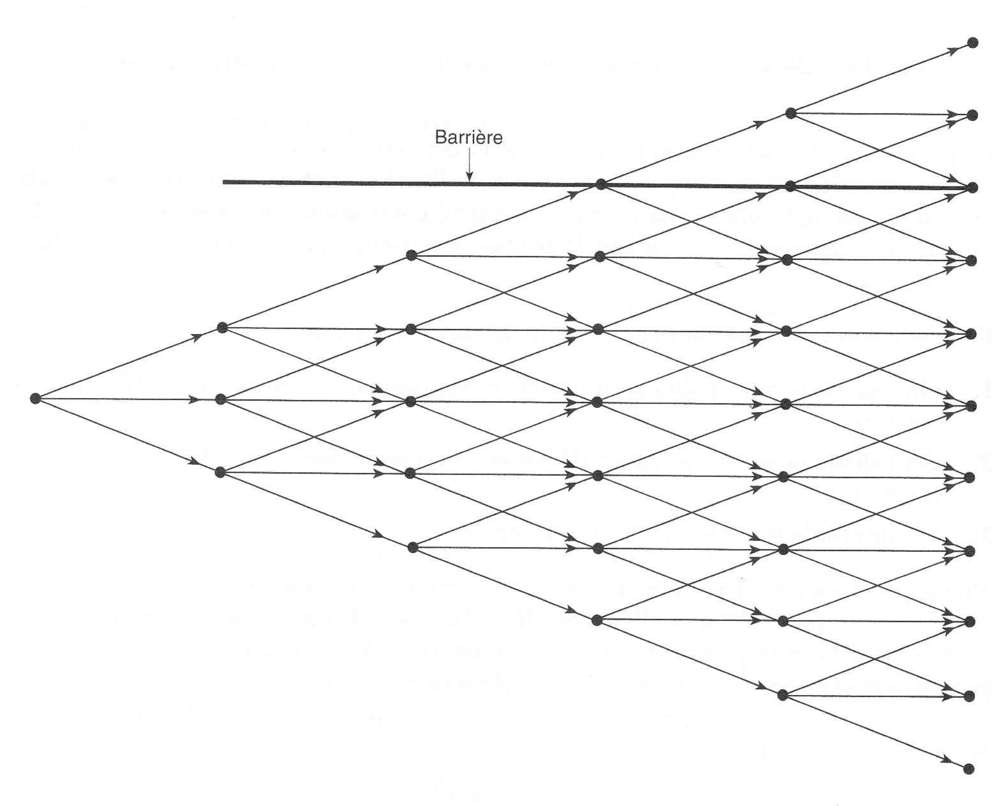
avec :

$$N = \text{Int}\left[\frac{\ln(H) - \ln(S_0)}{\sigma\sqrt{3\Delta t}} + 0{,}5\right]$$

où $\text{Int}[x]$ désigne la partie entière de x.

L'arbre trinomial obtenu est celui représenté dans le graphique 24.5. Les probabilités sur les différentes branches sont données par (avec les notations habituelles) :

$$p_d = -\frac{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t}{2\ln(u)} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2(\ln(u))^2}, \quad p_m = 1 - \frac{\sigma^2\Delta t}{(\ln(u))^2}, \quad p_u = \frac{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t}{2\ln(u)} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2(\ln(u))^2}$$

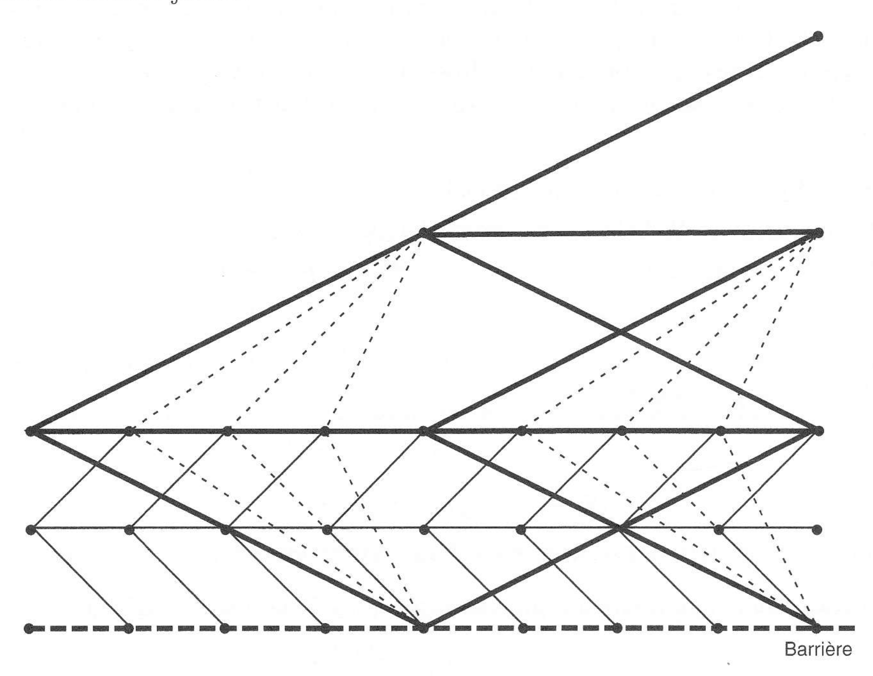


Graphique 24.5 : Arbre binomial avec des nœuds sur la barrière.

Le maillage adaptatif

Les méthodes présentées jusqu'ici fonctionnent correctement si le prix initial du sous-jacent n'est pas trop proche d'une barrière. Quand ce n'est pas le cas, la méthode du maillage adaptatif, présentée à la section 17.4, peut être utilisée[20]. L'intuition qui sous-tend cette approche est que l'efficacité numérique peut être améliorée en greffant sur un maillage grossier un second maillage beaucoup plus fin dans les régions où cela est nécessaire, c'est-à-dire au voisinage des barrières.

Le graphique 24.6 illustre la forme de l'arbre obtenu. Celui-ci est configuré de façon que des nœuds se situent sur les barrières. Comme toujours, les probabilités sur les branches sont calculées de manière à retrouver les deux premiers moments de la rentabilité du sous-jacent.



Graphique 24.6 : Maillage adaptatif pour évaluer des options à barrière.

Les traits gras du graphique 24.6 correspondent au maillage grossier. Les lignes moins épaisses traduisent le raffinement du maillage. Dans un premier temps, on procède à l'induction arrière sur le maillage grossier. On calcule ensuite les valeurs aux nœuds additionnels en utilisant les branches en pointillé. Finalement, on réalise l'induction arrière sur le maillage fin.

20. Voir S. Figlewski et B. Gao, « The Adaptive Mesh Model : A New Approach to Efficient Option Pricing », *Journal of Financial Economics*, 53 (1999), 313-51.

24.6 Les options sur deux actifs corrélés

Un autre problème numérique délicat est celui de l'évaluation d'options dépendant de deux actifs sous-jacents dont les prix sont corrélés. Parmi les nombreuses approches possibles, nous en présentons trois ci-après.

La transformation des variables

Il est relativement facile de construire un arbre tridimensionnel pour représenter l'évolution de deux variables non corrélées. Il suffit de construire un arbre bidimensionnel pour chacune d'elles, puis de les combiner. Les probabilités des branches de l'arbre résultant sont simplement les produits des probabilités des branches des arbres bidimensionnels. Considérons par exemple deux actions de prix S_1 et S_2 ; chacune peut être représentée par un arbre à la Cox-Ross-Rubinstein. Notons p_1 et p_2 les probabilités de hausse de chacun des deux titres ; l'arbre tridimensionnel est alors construit ainsi :

S_1 et S_2 augmentent avec une probabilité : $p_1 p_2$

S_1 augmente et S_2 baisse avec une probabilité : $p_1(1-p_2)$

S_1 baisse et S_2 augmente avec une probabilité : $p_2(1-p_1)$

S_1 et S_2 baissent avec une probabilité : $(1-p_2)(1-p_1)$

Supposons maintenant que S_1 et S_2 soient corrélés et que les processus risque-neutre d'évolution des prix soient :

$$dS_1 = (r - q_1)S_1\,dt + \sigma_1 S_1 dz_1$$

$$dS_2 = (r - q_2)S_2\,dt + \sigma_2 S_2 dz_2$$

On note ρ la corrélation instantanée des deux processus.

Définissons alors deux nouveaux processus x_1 et x_2 de la manière suivante[21] :

$$x_1 = \sigma_2 \ln(S_1) + \sigma_1 \ln(S_2)$$

$$x_2 = \sigma_2 \ln(S_1) - \sigma_1 \ln(S_2)$$

Le lemme d'Itô permet d'écrire :

$$d\ln(S_1) = \left(r - q_1 - \sigma_1^2/2\right) dt + \sigma_1 dz_1$$
$$d\ln(S_2) = \left(r - q_2 - \sigma_2^2/2\right) dt + \sigma_2 dz_2$$

On peut donc en déduire :

$$dx_1 = \left[\sigma_2\left(r - q_1 - \sigma_1^2/2\right) + \sigma_1\left(r - q_2 - \sigma_2^2/2\right)\right] dt + \sigma_1\sigma_2\left(dz_1 + dz_2\right)$$

21. Cette idée a été suggérée par J. C. Hull et A. White, « Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25 (1990), 87-100.

$$dx_2 = \left[\sigma_2 \left(r - q_1 - \sigma_1^2/2\right) - \sigma_1 \left(r - q_2 - \sigma_2^2/2\right)\right] dt + \sigma_1\sigma_2 \left(dz_1 - dz_2\right)$$

En remarquant que :

$$V(dz_1 + dz_2) = 2(1 + \rho)\, dt$$

$$V(dz_1 - dz_2) = 2(1 - \rho)\, dt$$

$$\text{cov}(dz_1 + dz_2; dz_1 - dz_2) = 0$$

on peut écrire :

$$dx_1 = \left[\sigma_2 \left(r - q_1 - \sigma_1^2/2\right) + \sigma_1 \left(r - q_2 - \sigma_2^2/2\right)\right] dt + \sigma_1\sigma_2 \sqrt{2(1 + \rho)}dz_A$$

$$dx_1 = \left[\sigma_2 \left(r - q_1 - \sigma_1^2/2\right) - \sigma_1 \left(r - q_2 - \sigma_2^2/2\right)\right] dt + \sigma_1\sigma_2 \sqrt{2(1 - \rho)}dz_B$$

où z_A et z_B sont des processus de Wiener standard non corrélés.

Les processus x_1 et x_2 peuvent alors être représentés par deux arbres séparés. Dans un intervalle de longueur Δt, x_i a une probabilité p_i d'augmenter de h_i et une probabilité $1 - p_i$ de baisser de h_i. Les variables p_i et h_i sont choisies de façon à ajuster les deux premiers moments de x_1 et x_2. Comme ces deux processus ne sont pas corrélés, les deux arbres peuvent être combinés en un seul arbre tridimensionnel, comme nous l'avons décrit précédemment. À chaque nœud de cet arbre, on peut facilement retrouver les valeurs correspondantes de S_1 et S_2 sous la forme :

$$S_1 = \exp\left(\frac{x_1 + x_2}{2\sigma_2}\right) \text{ et } S_2 = \exp\left(\frac{x_1 - x_2}{2\sigma_1}\right)$$

L'évaluation d'un actif dérivé par induction arrière se fait alors selon la procédure habituelle.

L'utilisation d'arbres non rectangulaires

Rubinstein a suggéré le recours à un arbre non rectangulaire pour représenter deux actifs corrélés[22]. À partir d'un nœud quelconque où les prix sont S_1 et S_2, chacun des quatre nœuds suivants peut être atteint avec une probabilité 0,25. Ils sont définis ainsi :

$$(S_1u_1,\ S_2A)\,;\ (S_1u_1,\ S_2B)\,;\ (S_1d_1,\ S_2C)\,;\ (S_2d_1,\ S_2D)$$

22. Voir M. Rubinstein, « Return to Oz », *RISK*, novembre 1994, 67-70.

avec :

$$u_1 = \exp\left[\left(r - q_1 - \sigma_1^2/2\right)\Delta t + \sigma_1\sqrt{\Delta t}\right]$$

$$d_1 = \exp\left[\left(r - q_1 - \sigma_1^2/2\right)\Delta t - \sigma_1\sqrt{\Delta t}\right]$$

$$A = \exp\left[\left(r - q_2 - \sigma_2^2/2\right)\Delta t + \sigma_2\sqrt{\Delta t}\left(\rho + \sqrt{1-\rho^2}\right)\right]$$

$$B = \exp\left[\left(r - q_2 - \sigma_2^2/2\right)\Delta t + \sigma_2\sqrt{\Delta t}\left(\rho - \sqrt{1-\rho^2}\right)\right]$$

$$C = \exp\left[\left(r - q_2 - \sigma_2^2/2\right)\Delta t - \sigma_2\sqrt{\Delta t}\left(\rho - \sqrt{1-\rho^2}\right)\right]$$

$$D = \exp\left[\left(r - q_2 - \sigma_2^2/2\right)\Delta t - \sigma_2\sqrt{\Delta t}\left(\rho + \sqrt{1-\rho^2}\right)\right]$$

Quand la corrélation est nulle, cette formulation est équivalente à la construction d'arbres séparés en utilisant la méthode présentée à la section 17.4.

L'ajustement des probabilités

Une troisième approche consiste à construire d'abord un arbre tridimensionnel en faisant comme si S_1 et S_2 n'étaient pas corrélés, puis à ajuster les probabilités pour tenir compte de la corrélation[23]. Nous utilisons ici la méthode présentée à la section 17.4 dans laquelle chacun des quatre mouvements possibles du couple (S_1 ; S_2) a une probabilité d'occurrence égale à 0,25 (tableau 24.1). Pour tenir compte des corrélations, on ajuste les probabilités, comme cela est indiqué dans le tableau 24.2.

Tableau 24.1 : Combinaison de variables binomiales non corrélées

	Mouvement de S_1	
Mouvement de S_2	**Baisse**	**Hausse**
Hausse	0,25	0,25
Baisse	0,25	0,25

23. Cette approche a été suggérée dans le contexte des taux d'intérêt par J. Hull et A. White, « Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II : Two-Factor Models », *Journal of Derivatives*, hiver 1994, 37-48.

Tableau 24.2 : Combinaison de variables binomiales dont la corrélation est ρ

	Mouvement de S_1	
Mouvement de S_2	**Baisse**	**Hausse**
Hausse	0,25 $(1-\rho)$	0,25 $(1+\rho)$
Baisse	0,25 $(1+\rho)$	0,25 $(1-\rho)$

24.7 Simulation de Monte Carlo et options américaines

La simulation de Monte Carlo est bien adaptée à l'évaluation d'options dont le payoff dépend de la trajectoire suivie par le sous-jacent (path-dependent), ou dépend de plusieurs variables. De même, les arborescences et les schémas aux différences finies fonctionnent bien pour les options américaines. Comment donc évaluer les options qui sont à la fois américaines et path-dependent, ou les options américaines dont le payoff dépend de plusieurs variables ?

À la section 24.4, nous avons montré comment modifier la construction des arbres pour tenir compte de la dépendance des payoffs aux trajectoires du sous-jacent. Un certain nombre de chercheurs ont adopté une approche différente en tentant d'utiliser la simulation de Monte Carlo pour les options américaines[24]. Nous exposons ci-après deux approches de ce type.

L'approche par les moindres carrés

Quand une option est américaine, il faut, à chaque date possible d'exercice, choisir si l'on exerce ou non. La valeur d'exercice est en général facile à calculer. Plusieurs chercheurs, notamment Longstaff et Schwartz, indiquent un moyen de déterminer la valeur de l'option, si celle-ci n'est pas exercée, dans le cadre d'une simulation de Monte Carlo[25]. Ils s'appuient sur une méthode des moindres carrés pour déterminer le meilleur ajustement entre la valeur de continuation (non exercice) de l'option et les variables pertinentes pour la décision d'exercice, à chaque date où celui-ci est possible. Cette méthode est illustrée ci-après par l'exemple figurant dans l'article de Longstaff et Schwartz.

Considérons un put américain de maturité 3 ans sur une action ne payant pas de dividendes. Le put peut être exercé à la fin de chaque année, le taux sans risque

24. Tilley fut le premier à publier une solution de ce type ; voir J. A. Tilley, « Valuing American Options in a Path Simulation Model », *Transactions of the Society of Actuaries*, 45 (1993), 83-104.

25. Voir F. A. Longstaff et E. S. Schwartz, « Valuing American Options by Simulation : A Simple Least Squares Approach », *Review of Financial Studies*, 14, n° 1, printemps 2001, 113-47.

continu est 6 %, le prix de l'action est égal à 1,0 et le prix d'exercice 1,1. Un échantillon de huit trajectoires du cours du support est donné dans le tableau 24.3 (en pratique, on tirerait bien évidemment un échantillon beaucoup plus important).

Tableau 24.3 : Échantillon de trajectoires pour l'évaluation du put

N° trajectoire	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1,00	1,09	1,08	1,34
2	1,00	1,16	1,26	1,54
3	1,00	1,22	1,07	1,03
4	1,00	0,93	0,97	0,92
5	1,00	1,11	1,56	1,52
6	1,00	0,76	0,77	0,90
7	1,00	0,92	0,84	1,01
8	1,00	0,88	1,22	1,34

Si l'option pouvait seulement être exercée à l'échéance, le payoff serait égal à la valeur intrinsèque à cette date ; celle-ci apparaît dans la dernière colonne du tableau 24.4.

Tableau 24.4 : Flux en cas d'exercice en fin d'année 3

N° trajectoire	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,07
4	0,00	0,00	0,18
5	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,20
7	0,00	0,00	0,09
8	0,00	0,00	0,00

Si le put est dans la monnaie à la fin de l'année 2, le détenteur doit décider s'il exerce ou non. Dans le tableau 24.3, on voit que cette question se pose pour les trajectoires 1, 3, 4, 6, 7. Pour celles-ci, on suppose une relation du type :

$$V = a + bS + cS^2$$

où S est le prix du sous-jacent en fin d'année 2 et V la valeur de l'option (actualisée en date 0) si elle n'est pas exercée à cette date. Les cinq observations de S sont ici 1,08, 1,07, 0,97, 0,77 et 0,84. Dans le tableau 24.4, les valeurs correspondantes de V sont $0{,}00e^{-0{,}06\times 1}$; $0{,}07e^{-0{,}06\times 1}$; $0{,}18e^{-0{,}06\times 1}$; $0{,}20e^{-0{,}06\times 1}$ et $0{,}09e^{-0{,}06\times 1}$. On

utilise ces données pour déterminer les valeurs de a, b et c qui minimisent :

$$\sum_{i=1}^{5} \left(V_i - a - bS_i - cS_i^2\right)^2$$

où V_i et S_i correspondent à la i-ième observation de V et S. On obtient alors $a = -1{,}07$; $b = 2{,}983$ et $c = -1{,}813$. La relation s'écrit donc :

$$V = -1{,}070 + 2{,}983S - 1{,}813S^2$$

Les valeurs de l'option en fin d'année 2 sur les trajectoires 1, 3, 4, 6 et 7 sont donc 0,0369 ; 0,0461 ; 0,1176 ; 0,1520 et 0,1565. À partir du tableau 24.3, on sait que les valeurs d'exercice en date 2 sont 0,02 ; 0,03 ; 0,13 ; 0,33 et 0,26. L'option devrait donc être exercée à cette date sur les trajectoires 4, 6 et 7. Le tableau 24.5 résume ces éléments en envisageant l'exercice aux dates 2 ou 3.

Tableau 24.5 : Flux en cas d'exercice en fins d'années 2 ou 3

N° trajectoire	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,07
4	0,00	0,13	0,00
5	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,33	0,00
7	0,00	0,26	0,00
8	0,00	0,00	0,00

On poursuit le raisonnement en déterminant les trajectoires pour lesquelles l'option est dans la monnaie en date 1. Il s'agit des trajectoires 1, 4, 6, 7 et 8. Le tableau 24.3 indique que les prix correspondants du sous-jacent sont 1,09 ; 0,93 ; 0,76 ; 0,92 et 0,88, respectivement.

Les valeurs correspondantes de V, déduites du tableau 24.5, sont alors $0{,}00e^{-0{,}06\times 1}$; $0{,}13e^{-0{,}06\times 1}$; $0{,}33e^{-0{,}06\times 1}$; $0{,}26e^{-0{,}06\times 1}$ et $0{,}00e^{-0{,}06\times 1}$.

La relation des moindres carrés est cette fois :

$$V = 2{,}038 - 3{,}335S + 1{,}356S^2$$

Les valeurs de continuation de l'option en date 1 sur les trajectoires 1, 4, 6, 7 et 8 sont alors 0,0139 ; 0,1092 ; 0,2866 ; 0,1175 et 0,1533. Le tableau 24.3 montre par ailleurs que les valeurs d'exercice en date 1 sont 0,01 ; 0,17 ; 0,34 ; 0,18 et 0,22. On en déduit qu'un exercice prématuré est optimal sur les trajectoires 4, 6, 7 et 8.

Le tableau 24.6 récapitule ces résultats. La valeur de l'option est déterminée, sur chaque trajectoire, par l'actualisation au taux sans risque des flux correspondants.

La moyenne sur les huit trajectoires donne l'estimation finale de la valeur de l'option, c'est-à-dire ici 0,1144. Cette valeur étant supérieure à 0,1 (valeur intrinsèque de l'option en date 0), il n'est pas optimal d'exercer immédiatement.

Tableau 24.6 : Flux de l'option

N° trajectoire	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,07
4	0,17	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00
6	0,34	0,00	0,00
7	0,18	0,00	0,00
8	0,22	0,00	0,00

Cette méthode se généralise aisément ; quand l'option peut être exercée à tout moment, il suffit de multiplier le nombre de dates et ainsi d'augmenter le nombre de prix simulés sur chaque trajectoire.

Paramétrisation de la frontière d'exercice prématuré

Plusieurs contributions, celle d'Andersen notamment, ont proposé une approche consistant à paramétrer la frontière d'exercice prématuré. Les valeurs optimales des paramètres sont déterminées par une méthode itérative, en débutant à la date d'échéance de l'option et en procédant par induction arrière[26]. Pour illustrer cette approche, continuons sur l'exemple du put avec les huit trajectoires du tableau 24.3. Dans ce cas, la frontière d'exercice prématuré à la date t peut être paramétrée par une valeur critique, notée $S^*(t)$, de S. Si le prix du sous-jacent à la date t passe en deçà de $S^*(t)$, l'option est exercée. La valeur de $S^*(3)$ est bien sûr 1,1, prix d'exercice de l'option. Déterminons maintenant $S^*(2)$; choisissons tout d'abord une valeur inférieure à 0,77 ; l'option n'est alors jamais exercée en date 2. Ses valeurs sur chacune des huit trajectoires sont 0,00 ; 0,00 ; $0{,}07e^{-0{,}06\times 1}$; $0{,}18e^{-0{,}06\times 1}$; 0,00 ; $0{,}20e^{-0{,}06\times 1}$; $0{,}09e^{-0{,}06\times 1}$ et 0,00. La valeur moyenne est ici 0,0636. Si l'on choisit $S^*(2) = 0{,}77$, les valeurs de l'option sur les huit trajectoires deviennent 0,00 ; 0,00 ; $0{,}07e^{-0{,}06\times 1}$; $0{,}18e^{-0{,}06\times 1}$; 0,00 ; 0,33 ; $0{,}09e^{-0{,}06\times 1}$ et 0,00. La moyenne est dans ce cas 0,0813. On fait les mêmes calculs quand $S^*(2)$ prend les valeurs 0,84 ; 0,97 ; 1,07 et 1,08. Les valeurs moyennes de l'option pour ces quatre cas sont 0,1032 ; 0,0982 ; 0,0938 et 0,0963. La valeur maximale est donc obtenue pour $S^*(2) = 0{,}84$. Pour être tout à fait précis, la valeur optimale est située entre 0,84 et 0,97. On calcule ensuite $S^*(1)$ en supposant

26. Voir L. Andersen, « A Simple Approach to the Pricing of Bermudean Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model », *Journal of Computational Finance*, 3, n° 2, hiver 2000, 1-32.

tout d'abord $S^*(2) < 0{,}76$; dans ce cas, l'option n'est jamais exercée en $t = 1$ et elle vaut $0{,}1032e^{-0{,}06\times 1} = 0{,}0972$.

Avec $S^*(1) = 0{,}76$, les valeurs de l'option pour les différentes trajectoires, calculées comme précédemment, ont une moyenne égale à 0,1008. On essaie ensuite pour $S^*(1)$ les valeurs 0,88 ; 0,92 ; 0,93 et 1,09. Les valeurs moyennes d'options obtenues sont respectivement 0,1283 ; 0,1202 ; 0,1215 et 0,1228.

Il s'ensuit que la valeur optimale de $S^*(1)$ se situe entre 0,88 et 0,92. Enfin, en date 0, la valeur de l'option sans exercice prématuré est $0{,}1283e^{-0{,}06\times 1} = 0{,}1208$. Cette valeur est supérieure à la valeur d'exercice immédiat de 0,1.

En pratique, des dizaines de milliers de simulations sont mises en œuvre pour déterminer la frontière d'exercice prématuré dans cette méthode. Quand cette frontière a été obtenue, de nouvelles simulations sont réalisées pour, cette fois, évaluer l'option en tenant compte de la frontière d'exercice prématuré déterminée dans l'étape précédente.

Cet exemple de put américain est un cas simple car le seuil d'exercice prématuré à une date donnée dépend uniquement de la valeur du sous-jacent à cette date. Dans certains produits plus complexes, la paramétrisation de la frontière d'exercice ne trouve pas de solution aisée.

Les bornes supérieures

Les deux approches qui viennent d'être décrites tendent à sous-évaluer les options américaines car la frontière d'exercice prématuré déterminée par ces méthodes n'est pas exactement la frontière optimale. Cette remarque a conduit Andersen et Broadie à proposer une procédure fournissant une borne supérieure à la valeur de l'option[27]. Cette technique peut être utilisée conjointement avec n'importe laquelle des méthodes fournissant une borne inférieure du prix de l'option pour obtenir un encadrement du vrai prix de l'option américaine considérée.

Résumé

Plusieurs modèles ont été développés dans le but d'ajuster les courbes de volatilité observées en pratique. Le modèle à élasticité constante de la variance (CEV) engendre une courbe de volatilité analogue à celle qui est observée sur les options sur actions. Le modèle de diffusion à sauts permet quant à lui d'obtenir une courbe telle que celle qui est observée pour les options sur devises. Les modèles à volatilité stochastique, plus souples, permettent d'engendrer les deux types de courbes observées sur les options sur actions ou sur devises. La fonction de volatilité implicite procure encore une plus

27. Voir L. Andersen et M. Broadie, « A Primal-Dual Algorithm for Pricing Multi-Dimensional American Options », *Working Paper*, Columbia University, 2001.

grande souplesse. Elle permet d'ajuster parfaitement une courbe de volatilité aux prix des options européennes cotées sur le marché.

La simulation de Monte Carlo est l'approche la plus naturelle pour l'évaluation des options path-dependent. Elle présente cependant deux inconvénients : le temps de calcul nécessaire est important et elle ne peut être utilisée aisément pour les options américaines.

Heureusement, des modèles d'arbres permettent d'évaluer de nombreuses options path-dependent. Cette approche consiste à choisir quelques valeurs représentatives de la fonction qui relie payoffs et trajectoires à chaque nœud, et à procéder par induction arrière.

L'évaluation des options lookback par cette méthode est un peu plus subtile. Plutôt que d'évaluer l'option en unités monétaires, il faut retenir le prix du sous-jacent comme numéraire.

Les méthodes d'arbres peuvent aussi servir à l'évaluation de nombreuses options barrières, mais la convergence est lente lorsqu'on affine la subdivision du temps. Une des possibilités pour gérer ce problème consiste à modifier l'arbre de façon qu'il y ait toujours des nœuds sur les barrières. Une autre méthode consiste en une interpolation pour tenir compte du fait que les nœuds se situent en général de part et d'autre des barrières. Enfin, il est aussi possible d'affiner le maillage dans les zones critiques, proches des barrières.

Lorsque les payoffs des options dépendent de deux actifs sous-jacents corrélés, il est nécessaire de construire des variables non corrélées à partir de ces sous-jacents. L'évolution de ces variables est modélisée selon le schéma usuel, et les deux arbres sont ensuite combinés pour obtenir un seul arbre tridimensionnel. À chaque nœud, on procède à la transformation inverse pour retrouver les valeurs des variables corrélées. Une autre solution consiste à construire l'arbre comme si les variables n'étaient pas corrélées, puis à ajuster les probabilités sur les branches de façon à tenir compte de la corrélation.

La simulation de Monte Carlo n'est pas, *a priori*, adaptée à l'évaluation des options américaines. Cependant, deux transformations de cette méthode existent, qui peuvent pallier cet inconvénient. La première est fondée sur une méthode de moindres carrés permettant de lier la valeur de l'option non exercée aux variables pertinentes. La seconde consiste à paramétrer la frontière d'exercice prématuré et à la déterminer de manière itérative par induction arrière.

Références complémentaires

ANDERSEN L., « A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model », *Journal of Computational Finance*, 3, n° 2 (hiver 2000), 1-32.

ANDERSEN L. B. G. et R. BROTHERTON-RATCLIFFE, « The Equity Option Volatility Smile : An Implicit Finite Difference Approach », *Journal of Computational Finance*, 1, n° 2 (hiver 1997/98), 3-37.

BOYLE P. P. et S. H. LAU, « Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method », *Journal of Derivatives*, 1, n° 4 (été 1994), 6-14.

CONZE A. et R. VISWANATHAN, « Path Dependent Options : The Case of Lookback Options », *Journal of Finance*, 46 (1991), 1893-1907.

COX J. C. et S. A. ROSS, « The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes », *Journal of Financial Economics*, 3 (mars 1976), 145-66.

DERMAN E. et I. KANI, « Riding on a Smile », *RISK*, février 1994, 32-39.

DUAN J.-C., « The GARCH Option Pricing Model », *Mathematical Finance*, 5 (1995), 13-32.

DUAN J.-C., « Cracking the Smile », *RISK*, décembre 1996, 55-59.

DUPIRE B., « Pricing With a Smile », *RISK*, février 1994, 18-24.

FIGLEWSKI S. et B. GAO, « The Adaptive Mesh Model, A New Approach to Efficient Option Pricing », *Journal of Financial Economics*, 53 (1999), 313-51.

HESTON S. L., « A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options », *Review of Financial Studies*, 6, n° 2 (1993), 327-43.

HULL J. et A. WHITE, « Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options », *Journal of Derivatives*, 1, n° 1 (hiver 1993), 21-31.

HULL J. C. et A. WHITE, « Finding the Keys », *RISK*, septembre 1993, 109-112.

HULL J. C. et A. WHITE, « The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities », *Journal of Finance*, 42 (juin 1987), 281-300.

HULL J. C. et A. WHITE, « An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility », *Advances in Futures and Options Research*, 3 (1988), 27-61.

HULL J. C. et W. SUO, « A Methodology for the Assessment of Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, n° 2 (juin 2002).

LONGSTAFF F. A. et E. S. SCHWARTZ, « Valuing American Options by Simulation : A Simple Least-Squares Approach », *Review of Financial Studies*, 14, n° 1 (printemps 2001), 113-47.

MADAN D. B., P. P. CARR et E. C. CHANG, « The Variance- Gamma Process and Option Pricing », *European Finance Review*, 2 (1998), 7-105.

MERTON R. C., « Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous », *Journal of Financial Economics*, 3 (mars 1976), 125-44.

REBONATO R., « *Volatility and Correlation : The Perfect Hedger and the Fox* », 2e éd., Chichester Wiley, 2004.

RITCHKEN P. et R. Trevor, « Pricing Options Under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes », *Journal of Finance*, 54, n° 1 (février 1999), 377-402.

RUBINSTEIN M., « Implied Binomial Trees », *Journal of Finance*, 49, n° 3 (juillet 1994), 771-818.

RUBINSTEIN M., « Return to Oz », *RISK*, novembre 1994, 67-70.

STUTZER M., « A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation », *Journal of Finance*, 51 (décembre 1996), 1633-52.

TILLEY J. A., « Valuing American Options in a Path Simulation Model », *Transactions of the Society of Actuaries*, 45 (1993), 83-104.

Problèmes et exercices

24.1 Vérifiez que les formules du modèle CEV satisfont la relation de parité call-put.

24.2 Comment utiliseriez-vous une simulation de Monte Carlo pour construire un échantillon de trajectoires du prix du sous-jacent quand le modèle de diffusion à sauts de Merton est utilisé ?

24.3 Vérifiez que la relation de parité Call-Put est satisfaite dans le modèle de diffusion à sauts de Merton lorsque l'amplitude du saut est log-normale.

24.4 Supposons que la volatilité d'un actif soit de 20 % entre les mois 0 et 6, de 22 % entre les mois 6 et 12, et de 24 % entre les mois 12 et 24. Quelle volatilité doit-on utiliser dans le modèle de Black et Scholes pour évaluer une option à 2 ans ?

24.5 Dans le cadre du modèle de diffusion à sauts de Merton, considérons le cas où les sauts ramènent le prix de l'actif vers 0. λ désigne le nombre moyen de sauts par an. Montrez que le prix d'un call européen dans cet univers est le même que celui d'un call de mêmes caractéristiques, avec un processus de prix ne comportant pas de sauts mais un taux sans risque égal à $r + \lambda$ au lieu de r. La possibilité de sauts réduit-elle ou augmente-t-elle la valeur du call dans ce cas ? (Indication : évaluez l'option en l'absence de sauts, puis avec un ou plusieurs sauts. La probabilité qu'il n'y ait pas de saut avant la date T est $e^{-\lambda T}$).

24.6 Soit S_0 le prix de date 0 d'une action en payant pas de dividendes ; l'intervalle $[0; T]$ est divisé en deux sous-périodes de longueurs t_1 et t_2. Pendant la première sous-période, le taux sans risque et la volatilité de l'action sont notés r_1 et σ_1 ; r_2 et σ_2 désignent les mêmes variables pendant la seconde sous-période. L'univers est supposé risque-neutre.

a. Utilisez les résultats du chapitre 13 pour déterminer la loi du prix en date T en fonction de r_1, r_2, σ_1, σ_2, t_1, t_2, S_0.

b. Soit $\overline{r}$ le taux sans risque moyen entre 0 et T, et $\overline{V}$ la variance moyenne sur $[0; T]$; quelle est la loi du prix en T en fonction de $\overline{r}$, $\overline{V}$, T et S_0 ?

c. Comment se modifient les résultats des questions (a) et (b) s'il y a trois sous-périodes avec des taux sans risque et des volatilités différents ?

d. Montrez que si le taux sans risque, r, et la volatilité, σ, sont des fonctions déterministes du temps, la loi de probabilité du prix de l'action

en T dans l'univers risque-neutre s'écrit :

$$\ln(S_T) \sim \phi\left(\ln(S_0) + \left(\bar{r} - \frac{1}{2}\bar{V}\right)T; \sqrt{\bar{V}T}\right)$$

où $\overline{r}$ est le taux sans risque moyen, $\overline{V}$ la moyenne de σ^2, et S_0 le prix initial.

24.7 Écrivez les équations permettant de simuler la trajectoire du prix de l'actif dans le modèle à volatilité stochastique des équations (24.2) et (24.3).

24.8 « Le modèle IVF ne donne pas forcément la surface de volatilité correcte. » Expliquez cette affirmation.

24.9 « Quand les taux d'intérêt sont constants, le modèle IVF modélise correctement la valeur de tout actif dérivé dont le payoff dépend du prix du sous-jacent à une seule date. » Expliquez cette affirmation.

24.10 Utilisez un arbre à trois périodes pour évaluer un call lookback américain sur une devise quand le taux de change initial est 1,6, le taux sans risque domestique 5 % par an, le taux sans risque étranger 8 %, la volatilité du taux de change 15 % et la maturité 18 mois. Utilisez l'approche de la section 24.4.

24.11 Qu'arrive-t-il au modèle variance-gamma quand le paramètre v tend vers 0 ?

24.12 Utilisez un arbre à trois périodes pour évaluer un put américain sur la moyenne géométrique des prix d'une action ne versant pas de dividendes. L'action cote 40 €, le prix d'exercice est 40 €, le taux sans risque 10 % par an, la volatilité 35 % par an et la maturité 3 mois. La moyenne géométrique est mesurée entre aujourd'hui et l'échéance de l'option.

24.13 Peut-on utiliser l'approche (voir section 24.4) de l'évaluation d'options path-dependent pour évaluer une option américaine d'échéance 2 ans procurant un payoff $\max(S_{\text{moy}} - K; 0)$, où S_{moy} est le prix moyen du sous-jacent sur les trois mois précédant la date d'exercice ? Justifiez votre réponse.

24.14 Vérifiez si le nombre 6,492 dans le graphique 24.3 est correct.

24.15 Dans l'exemple de la section 24.7, analysez la décision d'exercice prématuré pour les huit trajectoires. Quelle est la différence entre ces décisions dans l'approche par moindres carrés et dans l'approche consistant à paramétrer la frontière d'exercice prématuré ? Pour l'échantillon de trajectoires considéré, quelle méthode donne la valeur d'option la plus élevée ?

24.16 Une action cote 100 € et ne verse pas de dividendes ; un put européen sur cette action a un prix d'exercice de 110 € et une échéance à 1 an. Le taux sans risque est 5 % et la variance moyenne sur la durée de vie de l'option est de 0,06 avec une probabilité 0,2 ; 0,09 avec une probabilité de 0,5 et 0,12 avec une probabilité de 0,3. La volatilité n'est pas corrélée avec le prix. Utilisez DerivaGem pour estimer la valeur de l'option.

24.17 Quand il existe deux barrières dans la définition du contrat d'option, comment peut-on construire un arbre dont les nœuds se situent sur les barrières ?

Questions complémentaires

24.18 Une option lookback européenne sur indice, d'une durée de vie de 9 mois, vient d'être créée. L'indice vaut aujourd'hui 400, le taux sans risque est de 6 % par an, le rendement en dividende de l'indice est de 4 % et la volatilité de l'indice de 20 %.

Utilisez l'approche de la section 24.4 pour évaluer l'option, et comparez votre réponse à celle qui est donnée par DerivaGem en utilisant la formule analytique d'évaluation.

24.19 Les volatilités employées pour évaluer une option sur devise de maturité 6 mois sont celles du tableau 16.2. Les taux sans risque domestique et étranger sont égaux à 5 % et le taux de change aujourd'hui est égal à 1,0000. Considérez un bull spread consistant en l'achat d'un call de prix d'exercice 1,05 et la vente d'un call de prix d'exercice 1,10, les deux options ayant une durée de vie de 6 mois.

a. Quelle est la valeur du spread ?

b. Quelle volatilité pour les deux options donne la valeur correcte du bull spread (utilisez le développeur d'applications de DerivaGem conjointement avec le solveur d'Excel) ?

c. Les réponses précédentes appuient-elles l'affirmation énoncée au début de ce chapitre, selon laquelle la volatilité à utiliser pour évaluer des options exotiques va parfois à l'encontre de l'intuition ?

d. La fonction de volatilité implicite (IVF) donne-t-elle le prix correct pour le spread ?

24.20 Reprenez l'analyse de la section 24.7 concernant l'exemple du put, sous l'hypothèse d'un prix d'exercice à 1,13. Utilisez à la fois l'approche des moindres carrés et la paramétrisation de la frontière d'exercice prématuré.

24.21 Considérons le modèle de diffusion à sauts de Merton pour une action ne versant pas de dividendes. Il y a en moyenne un saut par an. La taille moyenne des sauts est 2 % et l'écart-type du logarithme de cette amplitude des sauts (en pourcentage du prix) est 20 %.

L'action cote 100 €, le taux sans risque est 5 %, la volatilité σ de la partie continue du processus de prix est 15 % et la durée de vie 6 mois. Utilisez le développeur d'applications de DerivaGem pour calculer les volatilités implicites pour des prix d'exercice d'options de 80, 90, 100, 110 et 124. Que peut-on déduire de la courbe obtenue concernant la distribution de probabilité du prix du sous-jacent ?

Chapitre 25

Martingales, changements de mesure et de numéraire

Jusqu'à présent, nous avons évalué les options en supposant que les taux d'intérêt étaient constants. Dans ce chapitre, nous abandonnons cette hypothèse restrictive de façon à préparer le lecteur à l'évaluation des produits dérivés de taux qui sera abordée aux chapitres 26 à 30.

L'évaluation dans un univers risque-neutre, présentée dans les chapitres précédents, repose sur deux étapes : (a) la détermination des flux futurs espérés de l'actif dérivé sous la probabilité risque-neutre et (b) l'actualisation de ces flux espérés au taux sans risque.

Quand les taux d'intérêt sont constants et les marchés complets, cette méthode permet d'évaluer les actifs dérivés sans ambiguïté. Quand les taux sont stochastiques, le problème est plus délicat. Que signifie l'actualisation au taux sans risque dans ce cadre ? Doit-on considérer que, chaque jour, la rentabilité espérée est égale au taux (sans risque) pour l'horizon d'une journée ? Doit-on plutôt retenir un horizon d'un an, de cinq ans ? En d'autres termes, il s'agit de définir l'actualisation au taux sans risque.

Dans ce chapitre, nous montrons que les choix possibles sont multiples et que chacun d'eux correspond à un univers risque-neutre particulier. Nous définissons tout d'abord le *prix de marché du risque* et nous montrons que la rentabilité en excès du taux sans risque est, pour tout actif dérivé, proportionnelle à ce prix de marché du risque, calculé par rapport à chacune des variables déterminant les rentabilités, c'est-à-dire par rapport aux variables fondamentales jugées pertinentes pour la description de l'incertitude dans l'économie. L'univers risque-neutre « classique » est celui dans lequel tous les prix de marché du risque sont nuls. Nous verrons cependant que des descriptions alternatives sont parfois bien utiles.

Les *martingales* sont des processus stochastiques essentiels dans l'évaluation risque-neutre. Une martingale est un processus constant en espérance conditionnelle. En d'autres termes, l'espérance de la valeur future d'un tel processus, conditionnellement à l'information présente, est égale à sa valeur présente. En particulier, ce processus a un drift nul. Un résultat fondamental de ce chapitre est l'existence d'une mesure martingale équivalente. Il s'agit d'une probabilité sous laquelle les prix, exprimés en unités d'un numéraire convenablement choisi, sont des martingales.

Ce résultat est appliqué à l'évaluation des options sur actions quand les taux d'intérêt sont stochastiques et à l'évaluation des options d'échange d'un actif contre un autre. Au chapitre 26, ces résultats permettront de comprendre les modèles de marché standard, utilisés dans l'évaluation des dérivés de taux d'intérêt. Au chapitre 27, ils apparaissent dans l'évaluation de produits non standard, et au chapitre 29, ils seront d'une grande utilité pour la présentation du modèle de marché LIBOR.

25.1 Le prix de marché du risque

Nous étudions dans un premier temps les propriétés des actifs dérivés ne dépendant que d'une seule variable, notée θ (appelée variable d'état), qui suit un processus de diffusion décrit par :

$$\frac{d\theta}{\theta} = mdt + sdz \tag{25.1}$$

où z est un processus de Wiener.

Les paramètres m et s sont respectivement le taux de croissance espéré et la volatilité de θ. Ils dépendent uniquement de θ et t. La variable θ n'est pas forcément le prix d'un actif d'investissement. Il peut par exemple s'agir d'une température, mesurée dans une station météo donnée, ou de la valeur d'un indice de sinistralité d'un pool de polices d'assurance.

Notons f_1 et f_2 les prix de deux actifs dérivés dépendant uniquement de θ et t. Ces actifs peuvent être des options ou, plus généralement, des titres dont les payoffs futurs dépendent d'une façon ou d'une autre de θ et t. Nous supposons pour le moment que ces actifs n'engendrent pas de flux avant leur date d'échéance[1]. Leurs dynamiques sont décrites par les processus suivants :

$$\frac{df_1}{f_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dz$$

$$\frac{df_2}{f_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dz$$

où μ_{x}, μ_{y}, σ_{x} et σ_{y} dépendent de θ et t. Le processus z est le même processus de Wiener que celui de l'équation (25.1), car c'est ici la seule source d'incertitude.

1. Cette hypothèse peut être abandonnée sans difficulté majeure (voir problème 25.7).

Nous relions maintenant les prix de ces deux processus en utilisant une analyse similaire à celle du modèle de Black et Scholes de la section 13.6. Les versions de ces processus en temps discret s'écrivent :

$$\Delta f_1 = \mu_1 f_1 \Delta t + \sigma_1 f_1 \Delta z \tag{25.2}$$

$$\Delta f_2 = \mu_2 f_2 \Delta t + \sigma_2 f_2 \Delta z \tag{25.3}$$

En formant un portefeuille localement sans risque (sur un intervalle de temps de longueur infinitésimale), on peut éliminer Δz ; il faut pour cela acheter $\sigma_2 f_2$ unités de l'actif 1 et vendre $\sigma_1 f_1$ unités de l'actif 2. Si on note Π la valeur du portefeuille, on peut écrire :

$$\Pi = (\sigma_2 f_2) f_1 - (\sigma_1 f_1) f_2 \tag{25.4}$$

et donc :

$$\Delta\Pi = (\sigma_2 f_2)\Delta f_1 - (\sigma_1 f_1)\Delta f_2$$

En substituant (25.2) et (25.3) dans cette équation, on obtient :

$$\Delta\Pi = (\mu_1 \sigma_2 f_2 f_1 - \mu_2 \sigma_1 f_2 f_1)\Delta t \tag{25.5}$$

Comme ce portefeuille est localement sans risque, il est rémunéré au taux sans risque sur un intervalle de longueur Δt. Par conséquent :

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

Cette équation, associée aux équations (25.4) et (25.5), conduit à :

$$\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1 = r(\sigma_2 - \sigma_1)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} \tag{25.6}$$

On remarque que le membre de gauche de l'équation (25.6) dépend uniquement des paramètres du processus f_1 alors que le membre de droite dépend uniquement des paramètres du processus f_2.

Notons λ la valeur de chacun des deux membres de l'équation (25.6). Le raisonnement précédent montre (en abandonnant ici les indices) que le prix, f, d'un actif dérivé quelconque vérifie :

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sigma dz \tag{25.7}$$

et :

$$\frac{\mu \ - r}{\sigma} = \lambda \tag{25.8}$$

Le paramètre λ est appelé *prix de marché du risque*. Il peut dépendre à la fois de θ et t, mais ne dépend pas de la nature de l'actif dérivé. À tout instant, il doit être identique pour tous les actifs dérivés considérés ne dépendant que de θ et t.

Il est bon de noter que le paramètre σ est le coefficient de dz dans l'équation (25.7). Il peut être positif ou négatif. En effet, si s est positif et si f est négativement corrélé à

θ, alors σ sera négatif puisqu'une hausse de θ dont l'origine est une variation positive de z doit correspondre à une baisse de f. C'est donc en fait la valeur absolue de σ qui est usuellement appelée volatilité de f.

Le prix de marché du risque mesure le taux de substitution entre rentabilité (en excès du taux sans risque) et risque pour les actifs dépendant de θ. L'équation (25.8) se réécrit :

$$\mu - r = \lambda\sigma \tag{25.9}$$

Pour donner un contenu intuitif à cette équation, σ peut s'interpréter comme la quantité de risque (relatif à θ) présente dans l'actif dérivé f. Le membre de gauche de l'équation est la rentabilité espérée, en excès du taux sans risque, exigée pour ce titre. L'équation (25.9) établit donc un lien entre cette rentabilité espérée et le risque de l'actif.

Dans ce chapitre, nous ne serons pas concernés par la mesure du prix de marché du risque ; ce point sera vu au chapitre 31 dans le contexte de l'évaluation des options réelles.

Au chapitre 5, nous avons distingué actifs d'investissement et actifs de consommation. Un actif d'investissement est acheté ou vendu aux seules fins d'investir, par une majorité des intervenants. Il peut entrer dans une stratégie dont l'objet est la composition d'un portefeuille sans risque. Les actifs de consommation sont prioritairement destinés à être consommés et ne peuvent avoir le même usage. Par conséquent, si θ lui-même est un actif d'investissement, on doit avoir $m - r = \lambda s$, mais si θ est un actif de consommation, cette égalité ne sera pas toujours vérifiée.

■ **Exemple 25.1**

Considérons un actif dérivé dont le prix est positivement corrélé au prix du pétrole mais ne dépend d'aucune autre variable. Ce contrat a une rentabilité espérée de 12 % par an et une volatilité annuelle de 20 %. Si le taux sans risque est égal à 8 %, le prix de marché du risque (de la variable prix du pétrole) est donné par :

$$\frac{0{,}12 - 0{,}08}{0{,}2} = 0{,}2$$

Cependant, comme le pétrole est un actif de consommation, le prix de marché du risque de l'actif dérivé ne peut être obtenu par l'équation (25.8).

■ **Exemple 25.2**

Considérons deux actifs dont les prix sont positivement reliés au taux d'intérêt à 90 jours. Le premier a une rentabilité espérée de 3 % et une volatilité de 20 %, alors que le second a une volatilité de 30 %. Si le taux sans risque est 6 %, le premier titre a un prix de marché du risque égal à :

$$\frac{0{,}03 - 0{,}06}{0{,}2} = -0{,}15$$

L'équation (25.9), appliquée au second actif, montre que celui-ci doit avoir une rentabilité espérée égale à $0{,}06 - 0{,}15 \times 0{,}3 = 0{,}015$, soit 1,5 % par an.

Les différents univers risque-neutre

Le processus de l'actif dérivé est caractérisé par :

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sigma dz$$

La valeur de μ dépend de l'attitude face au risque des investisseurs. Dans un univers où le prix de marché du risque est nul, λ est nul et dans ce cas μ est égal à r. Le processus de f s'écrit alors :

$$\frac{df}{f} = rdt + \sigma dz$$

L'univers dans lequel le processus de prix des actifs a un drift égal à r sera qualifié d'univers risque-neutre classique.

Mais d'autres hypothèses peuvent être posées concernant le prix de marché du risque. De manière générale, le processus de f s'écrit, en utilisant l'équation (25.9) :

$$\frac{df}{f} = (r + \lambda\sigma)\, dt + \sigma dz \tag{25.10}$$

Le prix de marché du risque par rapport à une variable (ici θ) ? détermine le taux de croissance espéré des prix des actifs dérivés qui dépendent de cette variable. On constate que si le prix de marché du risque est modifié, les taux de croissance espérés changent eux aussi, mais les volatilités restent inchangées. Ce point a déjà été illustré à la section 11.7. Le choix d'un prix de marché du risque revient en fait à définir une probabilité sous laquelle sont calculées les rentabilités espérées des actifs. Pour une certaine valeur de λ, l'univers obtenu est l'univers réel et les rentabilités espérées sont celles qui sont pertinentes sur les marchés réels.

25.2 Le cas de plusieurs variables d'état

Considérons maintenant n variables θ_1, θ_2,...,θ_n, chacune caractérisée par un processus du type suivant :

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i} = m_i\, dt + s_i\, dz_i \tag{25.11}$$

pour i=1,2,...,n, les z_i désignant des processus de Wiener. Les paramètres m_i et s_i sont les taux de croissance et volatilités espérés et peuvent dépendre des θ_i et du temps. L'annexe de ce chapitre donne une version multidimensionnelle du lemme d'Itô, montrant que le prix d'un actif dérivé f dépendant des n variables θ_i s'écrit :

$$\frac{df}{f} = \mu\, dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\, dz_i \tag{25.12}$$

Dans cette équation, μ est la rentabilité espérée de l'actif et $\sigma_i\, dz_i$ est la composante risquée relative à la i-ième variable d'état.

L'annexe de ce chapitre montre la relation suivante :

$$\mu - r = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \sigma_i \tag{25.13}$$

où λ_i est le prix de marché du risque relatif à θ_i. L'équation (25.9) est donc un cas particulier de l'équation (25.13) quand $n = 1$. Chaque terme $\lambda_i \sigma_i$ mesure la part de la i-ième variable d'état dans l'espérance de rentabilité exigée par les investisseurs. Quand ce terme est nul, les investisseurs n'exigent aucune prime pour le risque apporté par cette variable, et quand il est positif, les investisseurs exigent une rémunération supplémentaire pour supporter ce risque. Quand $\lambda_i \sigma_i$ est négatif, cela signifie que la variable θ_i a pour effet la réduction du risque global supporté par un investisseur.

■ **Exemple 25.3**

Le prix d'une action donnée dépend de trois facteurs : le prix du pétrole, le prix de l'or et la performance d'un indice boursier. Supposons que les prix de marché du risque pour ces trois variables soient respectivement 0,2, – 0,1 et 0,4. Les volatilités de ces trois facteurs apparaissant dans l'équation (25.12) sont égales à 5 %, 10 % et 15 % respectivement. La prime de risque (rentabilité en excès du taux sans risque) demandée sur cette action sera alors égale à :

$$0{,}2 \times 0{,}05 - 0{,}1 \times 0{,}1 + 0{,}4 \times 0{,}15 = 0{,}06$$

soit 6 % par an. Si d'autres variables affectent le prix de cette action, la relation précédente reste valide à condition que le prix de marché du risque de ces autres variables soit nul.

L'équation (25.13) est étroitement liée au modèle APT (*Arbitrage Pricing Theory*) développé par Ross en 1976[2]. La version en temps continu du CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) ou modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF) est aussi un cas particulier de cette équation. En effet, le CAPM stipule que la rentabilité espérée exigée par les investisseurs est égale au taux sans risque, auquel s'ajoute une prime de risque proportionnelle à l'excès de rentabilité du portefeuille de marché par rapport au taux sans risque. Si ce modèle est correct, les λ_i sont proportionnels aux corrélations entre les variations des θ_i et celles du portefeuille de marché.

25.3 Les martingales

Un processus de diffusion qui est une martingale a un drift nul. En d'autres termes, il vérifie :

$$d\theta = \sigma dz$$

où z est un mouvement brownien. La volatilité σ peut elle-même être stochastique et dépendre de θ et éventuellement d'autres variables. Une des propriétés importantes

2. Voir S. A. Ross, « The Arbitrage Pricing Theory of Capital Asset Pricing », *Journal of Economic Theory*, 13 (décembre 1976), 343-62.

des martingales est la constance de l'espérance. Pour toute date t, on a :

$$E(\theta_t) = \theta_0$$

L'intuition de ce résultat est que, sur un court intervalle de temps, la variation de ce processus est proportionnelle à la variation du mouvement brownien, processus dont les accroissements ont une espérance nulle. La variation entre 0 et t étant la somme des variations sur de courts intervalles, elle aura aussi une espérance nulle.

L'existence d'une mesure martingale équivalente

Notons f et g les prix de deux actifs échangés, dépendant d'une seule source d'incertitude. Nous supposons que ces titres ne paient pas de flux aux dates intermédiaires[3] et que le prix g est toujours strictement positif. Définissons :

$$\phi = \frac{f}{g}$$

La variable ϕ définit le prix relatif de f par rapport à g. En d'autres termes, le prix de f est exprimé en unités d'actif g plutôt qu'en unités monétaires. L'actif g sert de numéraire. Dire qu'il existe une mesure martingale équivalente signifie qu'en l'absence d'opportunités d'arbitrage, il existe un choix de prix de marché du risque (et donc une probabilité) tel que le processus ϕ soit une martingale sous cette probabilité. Cette propriété n'aurait pas d'intérêt si la probabilité en question dépendait de l'actif f considéré. On peut en fait montrer que ce n'est pas le cas. En opérant ce choix particulier de prix de marché du risque, les prix de tous les actifs, exprimés en unités de numéraire, sont des martingales. Le prix de marché du risque pertinent est alors la volatilité de g. On peut donc affirmer que, pour tout processus de prix d'actif f, les processus f/g suivent des martingales quand le prix de marché du risque est la volatilité de g.

Pour démontrer ce résultat, notons σ_f et σ_g les volatilités de f et g. De l'équation (25.10) on déduit, dans l'univers où le prix de marché du risque est σ_g :

$$df = (r + \sigma_f \sigma_g) f dt + \sigma_f f dz$$

$$dg = \left(r + \sigma_g^2\right) g dt + \sigma_g g dz$$

En appliquant le lemme d'Itô aux fonctions $\ln(f)$ et $\ln(g)$, on peut écrire :

$$d \ln(f) = \left(r + \sigma_g \sigma_f - \frac{\sigma_f^2}{2}\right) dt + \sigma_f dz$$

$$d \ln(g) = \left(r + \frac{\sigma_g^2}{2}\right) dt + \sigma_g dz$$

3. Le problème 25.8 étend l'analyse au cas où les titres paient des flux intermédiaires.

On a alors :

$$d\ln(f) - d\ln(g) = \left(\sigma_g\sigma_f - \frac{\sigma_f^2}{2} - \frac{\sigma_g^2}{2}\right) dt + (\sigma_f - \sigma_g)\, dz$$

qui s'écrit encore :

$$d\ln\left(\frac{f}{g}\right) = -\frac{(\sigma_f - \sigma_g)^2}{2} dt + (\sigma_f - \sigma_g)\, dz$$

On applique à nouveau le lemme d'Itô pour retrouver le processus suivi par f/g à partir de celui qui est décrit ci-dessus. On obtient alors :

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = (\sigma_f - \sigma_g)\frac{f}{g} dz \tag{25.14}$$

et on a bien montré que f/g est une martingale. En particulier, le drift de ce processus est nul puisqu'il n'y a plus de terme en dt.

Un univers dans lequel le prix de marché du risque est σ_g est appelé univers *forward-neutre* de numéraire g.

Comme f/g est une martingale dans cet univers, on peut écrire :

$$\frac{f_0}{g_0} = E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$$

ou encore :

$$f_0 = g_0 E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right) \tag{25.15}$$

E_g désigne l'opérateur d'espérance dans l'univers forward-neutre de numéraire g.

25.4 Le choix du numéraire

Nous présentons maintenant diverses possibilités de choix de numéraire. Nous montrons dans un premier temps que le résultat de la section précédente est compatible avec ce qui a été fait jusqu'à présent, c'est-à-dire avec les méthodes d'évaluation dans l'univers risque-neutre classique. Les autres exemples sont exposés en vue du chapitre 26 qui présentera les méthodes d'évaluation d'options sur obligations, de caps de taux d'intérêt et d'options de swap.

Le compte d'épargne comme numéraire

Nous appelons compte d'épargne un actif qui vaut une unité monétaire en date 0 et dont la valeur augmente au rythme du taux sans risque instantané[4] r. Ce dernier

4. Le compte d'épargne est un actif dont le processus de valeur est la limite quand Δt tend vers zéro du processus suivant. En date 0, une unité monétaire est investie au taux sans risque pour une durée Δt. À la date Δt, le résultat de l'investissement (l'unité initiale plus les intérêts) est investi à nouveau pendant une durée Δt au taux sans risque prévalant à cet instant, et ainsi de suite.

peut être aléatoire. Si l'on note g le processus de valeur du compte d'épargne, il est caractérisé par :

$$dg = rg\,dt \tag{25.16}$$

Le drift de g est stochastique, mais par contre la volatilité est nulle. L'univers forward-neutre par rapport à ce numéraire a un prix de marché du risque nul. C'est en fait l'univers risque-neutre classique des chapitres précédents, dans lesquels r était de plus constant. L'équation (25.15) se réécrit :

$$f_0 = g_0 \hat{E}\left(\frac{f_T}{g_T}\right) \tag{25.17}$$

où $\hat{E}$ est l'opérateur d'espérance dans l'univers risque-neutre classique. De plus, la valeur du numéraire en date 0 est égale à 1, et sa valeur en date T s'écrit :

$$g_T = e^{\int_0^T r dt}$$

L'équation (25.17) s'écrit donc :

$$f_0 = \hat{E}\left(f_T e^{-\int_0^T r dt}\right) \tag{25.18}$$

En posant $\bar{r} = \frac{1}{T}\int_0^T r dt$, l'équation (25.18) se réécrit sous une forme familière :

$$f_0 = \hat{E}\left(f_T e^{-\bar{r}T}\right) \tag{25.19}$$

Si, de plus, le taux r est constant (voir chapitres précédents), on retrouve :

$$f_0 = e^{-rT}\hat{E}\left(f_T\right)$$

Un zéro-coupon comme numéraire

Notons $P(t,T)$ le prix de date t d'un zéro-coupon payant 1 euro en date T ; l'opérateur d'espérance dans cet univers sera noté E_T car c'est en date T que la valeur du numéraire est ici égale à 1. L'équation (25.15) s'écrit donc :

$$f_0 = P(0,T)E_T(f_T) \tag{25.20}$$

La différence essentielle avec l'équation (25.19) est qu'ici le terme relatif à la valeur du numéraire est en dehors de l'espérance. Par conséquent, choisir ce numéraire simplifie considérablement les choses lorsqu'on cherche à évaluer un actif ne payant qu'un seul flux en date T.

Considérons une variable θ quelconque qui ne soit pas un taux d'intérêt[5]. Un contrat forward sur θ d'échéance T, est un contrat qui paie $\theta_T - K$ à la date T où θ_T est la

5. Nous verrons un peu plus loin que les contrats forward sur taux d'intérêt sont définis différemment des contrats forward sur d'autres variables économiques.

valeur de θ la date T. Notons f la valeur de ce contrat. L'équation (25.20) implique que :

$$f_0 = P(0,T)\left[E_T(\theta_T) - K\right]$$

Le prix forward, noté F, de f pour un contrat d'échéance T est la valeur de θ pour laquelle $f_0 = 0$. Il s'ensuit que :

$$F = \frac{f_0}{P(0,T)}\, F = E_T(f_T) \tag{25.21}$$

Cette égalité montre que, dans l'univers forward-neutre associé au numéraire zéro-coupon d'échéance T, le prix forward d'un actif, pour un contrat d'échéance T, est égal à l'espérance du prix spot futur à la date T. On peut noter ici la différence entre prix forward et prix futures. L'argument de la section 14.7 montre que le prix futures est le prix espéré en T dans l'univers risque-neutre classique.

L'équation (25.20) montre qu'on peut évaluer n'importe quel actif en calculant son payoff espéré, dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T, et en actualisant au taux sans risque. L'équation (25.21), quant à elle, montre qu'il est correct, dans cet univers, de supposer que le prix forward de l'actif, observé aujourd'hui, est égal à son prix futur espéré en date T. Ces deux résultats seront essentiels à la compréhension des méthodes d'évaluation d'options sur obligations abordées au chapitre suivant.

Le comportement des taux quand le numéraire est un zéro-coupon

Notons maintenant T_1 et T_2 deux dates futures et $\mathrm{R}(t, T_1, T_2)$ le taux forward pour la période séparant T_1 et T_2, vu de la date t. Ce taux est exprimé avec un rythme de composition des intérêts égal à $T_2 - T_1$ (si $T_2 - T_1 = 0{,}5$, il s'agit de taux semestriels, et si $T_2 - T_1 = 0{,}25$, les taux sont trimestriels). Le prix forward, vu de la date t, d'un zéro-coupon pour la période $[T_1\,;\,T_2]$ s'écrit :

$$\frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}$$

Comme un taux d'intérêt forward est le taux induit par le prix forward du zéro-coupon correspondant, on a :

$$\frac{1}{1 + (T_2 - T_1)\,R(t,T_1,T_2)} = \frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}$$

On en déduit alors le taux forward :

$$R(t,T_1,T_2) = \frac{1}{(T_2 - T_1)}\left(\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)} - 1\right)$$

ou encore :

$$R(t,T_1,T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1}\left(\frac{P(t,T_1) - P(t,T_2)}{P(t,T_2)}\right)$$

On pose alors :

$$f = \frac{1}{T_2 - T_1} \left(P\left(t,T_1\right) - P\left(t,T_2\right) \right)$$

et $g = P(t, T_2)$. Il existe alors une probabilité sous laquelle le processus de taux forward $R(t, T_1, T_2)$ est une martingale quand le numéraire est g. On peut en particulier écrire :

$$R(t,T_1,T_2) = E_2[R(T_1,T_1,T_2)] \tag{25.22}$$

où E_2 est l'opérateur d'espérance dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T_2.

Ce résultat indique que le taux forward est égal au taux spot futur espéré dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T_2. Cette propriété, combinée au résultat donné dans l'équation (25.20), sera essentielle pour la compréhension du modèle de marché standard et son application à l'évaluation des caps de taux au chapitre suivant.

Une annuité comme numéraire

Nous présentons maintenant une application supplémentaire du résultat général sur le changement de mesure et de numéraire. Pour cela, considérons un swap débutant à une date future $T = T_0$, avec des dates de paiement $T_1, T_2, \ldots, T_N$. Le principal est égal à 1 €. Le taux de swap forward, vu de la date $t < T$, est noté $s(t)$. Il s'agit du taux de swap pour lequel la valeur du swap est nulle. La valeur de la jambe fixe du swap est égale à :

$$s(t)A(t)$$

avec :

$$A\left(t\right) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(T_{i+1} - T_i\right) P\left(t,T_{i+1}\right)$$

Nous avons montré au chapitre 7 que, si on ajoute à chaque jambe le principal du swap au dernier paiement, la valeur de la jambe variable à la date de départ est égale au principal. Si on ajoute donc un paiement de 1 € à la date T_N, la jambe variable vaut 1 € à la date de départ T_0. La valeur, en date t, de 1 € reçu en date T_N est égale à $P(t, T_N)$, et celle de 1 € reçu en T_0 est égale à $P(t, T_0)$. La valeur de la jambe variable à la date t est donc :

$$P(t,T_0) - P(t,T_N)$$

En égalisant les valeurs des deux jambes du swap, on a :

$$s(t)A(t) = P(t,T_0) - P(t,T_N)$$

ou encore

$$s\left(t\right) = \frac{P\left(t,T_0\right) - P\left(t,T_N\right)}{A\left(t\right)} \tag{25.23}$$

On peut maintenant appliquer les résultats des sections précédentes en choisissant l'annuité comme numéraire et en posant $f = P(t, T_0) - P(t, T_N)$. Dans ce cas, le taux

de swap forward, vu de la date t, est égal au taux de swap espéré à la date de départ T.

$$s(t) = E_A(s(T)) \tag{25.24}$$

où E_A est l'opérateur d'espérance dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est l'annuité.

De manière plus générale, pour tout actif f, on déduit de l'équation (25.15) que :

$$f_0 = A(0)\, E_A\left(\frac{f_T}{A(T)}\right) \tag{25.25}$$

Ce résultat, combiné à l'équation (25.24), sera essentiel pour la compréhension du modèle de marché standard et son application à l'évaluation des options de swap européennes au chapitre suivant.

25.5 Extension au cas de plusieurs facteurs indépendants

Les résultats des sections 25.3 et 25.4 peuvent être étendus pour couvrir les situations où plusieurs sources d'incertitude indépendantes[6] sont à l'œuvre. S'il y a n facteurs indépendants, on peut écrire, pour deux actifs f et g quelconques, dans l'univers risque-neutre classique :

$$df = rf\,dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f,i} f\, dz_i$$

et

$$dg = rg\,dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{g,i} g\, dz_i$$

Les résultats de la section 25.2 montrent que l'on peut choisir des univers différents dans lesquels ces processus s'écrivent :

$$df = \left(r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{f,i}\right) f\, dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f,i} f\, dz_i$$

et

$$dg = \left(r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{g,i}\right) g\, dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{g,i} g\, dz_i$$

où les coefficients λ_i sont les prix de marché du risque des différents facteurs. L'un de ces univers est l'univers réel. Un univers forward-neutre dont le numéraire est g est obtenu en posant $\lambda_i = \sigma_{g,i}$. Le lemme d'Itô permet alors de montrer, du fait de l'indépendance des n facteurs, que le processus f/g est une martingale (voir problème 25.12). Les autres résultats des deux sections précédentes (à partir de l'équation (25.15)) restent inchangés.

6. L'hypothèse d'indépendance n'est pas cruciale ; si elle n'est pas vérifiée, il est toujours possible de trouver des facteurs orthogonaux qui décrivent l'incertitude de la même façon (procédé d'orthogonalisation).

25.6 Applications

Nous proposons ci-après deux applications des techniques présentées précédemment, sachant que de nombreuses autres applications seront développées aux chapitres 26, 27, 29 et 30.

Le résultat de Black et Scholes

L'univers forward-neutre peut être utilisé pour évaluer des options européennes quand les taux sont stochastiques, étendant ainsi le modèle de Black et Scholes. Considérons un call d'échéance T sur une action ne versant pas de dividendes pendant la durée de vie de l'option. L'équation (25.20) permet d'écrire :

$$c = P(0,T)E_T(\max(S_T - K; 0)) \tag{25.26}$$

où K est le prix d'exercice, S_T la valeur de l'action à l'échéance de l'option, et E_T l'opérateur d'espérance dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T. Si on note R le taux zéro-coupon pour la maturité T, on peut écrire le prix de l'option sous la forme :

$$c = e^{-RT}E_T(\max(S_T - K; 0)) \tag{25.27}$$

Si le prix de l'action en date T est log-normal dans l'univers forward-neutre considéré, et si l'écart-type de $\ln(S_T)$ est noté s, le résultat de l'annexe du chapitre 13 conduit à :

$$E_T(\max(S_T - K; 0)) = E_T(S_T)N(d_1) - KN(d_2) \tag{25.28}$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(E_T\left(S_T\right)/K\right) + s^2/2}{s}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(E_T\left(S_T\right)/K\right) - s^2/2}{s}$$

Par l'équation (25.21) on sait que l'espérance du prix de l'action en date T est égale au prix initial capitalisé au taux R, c'est-à-dire :

$$E_T(S_T) = S_0 e^{RT} \tag{25.29}$$

Les équations (25.27) à (25.29) conduisent donc à :

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-RT}N(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(S_0/K\right) + RT + s^2/2}{s}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(S_0/K\right) + RT - s^2/2}{s}$$

Si la volatilité du prix de l'action est telle que $s = \sigma\sqrt{T}$, on retrouve le modèle de Black et Scholes où R vient se substituer à r puisque d_1 et d_2 s'écrivent :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + \left(R + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + \left(R - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Le même raisonnement pourrait être appliqué à un put européen pour retrouver la formule de Black et Scholes adaptée à ce type d'option.

L'option d'échange d'un titre contre un autre

Considérons maintenant une option permettant d'échanger, à une date future T, un actif d'investissement de valeur U contre un autre actif d'investissement de valeur V. Ce type d'option a déjà été analysé à la section 22.11. Les volatilités des deux actifs sont notées σ_U et σ_V, et la corrélation entre U et V est notée ρ. Les deux actifs ne paient pas de flux avant la date T. L'actif U est choisi comme numéraire g, et en faisant jouer à V le rôle de f dans l'équation (25.15), on obtient :

$$V_0 = U_0 E_U\left(\frac{V_T}{U_T}\right) \tag{25.30}$$

où E_U est l'espérance dans l'univers forward-neutre de numéraire U.

Si la variable f de l'équation (25.15) définit maintenant la valeur de l'option d'échange, on a

$$f_T = \max(V_T - U_T\ ;\ 0)$$

Il s'ensuit que :

$$f_0 = U_0 E_U\left(\frac{\max(V_T - U_T; 0)}{U_T}\right)$$

ou encore

$$f_0 = U_0 E_U\left(\max\left(\frac{V_T}{U_T} - 1; 0\right)\right) \tag{25.31}$$

Si l'on note $\hat{\sigma}$ la volatilité du rapport V/U, on a (voir exercice 25.14) :

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_U^2 + \sigma_V^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V$$

En utilisant l'annexe du chapitre 13 et l'équation (25.31), on peut écrire :

$$f_0 = U_0\left[E_U\left(\frac{V_T}{U_T}\right)N(d_1) - N(d_2)\right]$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + \hat{\sigma}^2 T/2}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

En substituant maintenant l'équation (25.30), on aboutit à :

$$f_0 = V_0 N(d_1) - U_0 N(d_2) \tag{25.32}$$

Si les deux actifs U et V procurent des revenus intermédiaires aux taux q_U et q_V, la formule d'évaluation devient :

$$f_0 = e^{-q_V T} V_0 N(d_1) - e^{-q_U T} U_0 N(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + \left(q_U - q_V + \hat{\sigma}^2/2\right) T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

On retrouve ici le résultat de l'équation (22.3).

25.7 Changement de numéraire

Lorsque le numéraire est différent, le processus stochastique suivi par une variable économique est susceptible d'être modifié. Dans cette section, nous étudions l'impact d'un tel changement. Dans l'univers forward-neutre de numéraire g, le processus suivi par une variable f s'écrit :

$$df = \left(r + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{g,i}\sigma_{f,i}\right) f dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f,i} f dz_i$$

Si le numéraire est un autre actif h, on aura de la même façon :

$$df = \left(r + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{h,i}\sigma_{f,i}\right) f dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f,i} f dz_i$$

où $\sigma_{h,i}$ est la i-ième composante de la volatilité de h.

L'effet du changement de numéraire porte uniquement sur le drift du processus de f qui est modifié de

$$\sum_{i=1}^{n} (\sigma_{h,i} - \sigma_{g,i})\, \sigma_{f,i}$$

Considérons maintenant une variable v, fonction des prix des actifs échangés sur le marché. v n'est pas forcément le prix d'un actif échangé en tant que tel. On note $\sigma_{v,i}$ la i-ième composante de la volatilité de v ; le lemme d'Itô multidimensionnel de l'annexe de ce chapitre permet de calculer le processus de v quand le numéraire est différent. Il apparaît que le drift de v est modifié de la même manière que celui des actifs échangés (voir problème 25.6 pour le cas d'une variable d'état, et problème 25.13 quand il y a plusieurs variables d'état). Le drift de v est donc modifié de

$$\alpha_v = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_{h,i} - \sigma_{g,i})\, \sigma_{v,i} \tag{25.33}$$

Définissons maintenant le processus $w = h/g$, appelé ratio des numéraires, et $\sigma_{w,i}$ la i-ième composante de la volatilité de w. En appliquant à nouveau le lemme d'Itô (voir problème 25.14), on peut montrer que

$$\sigma_{w,i} = \sigma_{h,i} - \sigma_{g,i}$$

L'équation (25.33) est donc équivalente à :

$$\alpha_v = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{v,i}\sigma_{w,i} \qquad (25.34)$$

On a alors :

$$\alpha_v = \rho\sigma_v\sigma_w \qquad (25.35)$$

où σ_v, σ_w sont les volatilités totales de v et w, et ρ est le coefficient de corrélation instantanée de v et w[7].

Ce résultat est remarquable de simplicité. L'ajustement du drift du processus v quand on passe d'un numéraire à un autre est la covariance entre la variation en pourcentage de v et la variation en pourcentage du ratio des numéraires. Ce résultat sera appliqué aux quantos et aux ajustements temporels au chapitre 27.

Résumé

Le prix de marché du risque d'une variable définit le taux de substitution entre rentabilité et risque pour les actifs dont les payoffs dépendent de cette variable. Quand il y a une seule variable d'état, l'excès de rentabilité d'un actif par rapport au taux sans risque est égal au prix de marché du risque multiplié par la volatilité de la variable. Quand plusieurs variables d'état interviennent, cet excès de rentabilité est obtenu en sommant les produits des prix de marché du risque de ces différentes variables avec les volatilités des dites variables.

Le changement de probabilité est une technique performante pour l'évaluation des actifs dérivés. Elle avait déjà été introduite aux chapitres 11 et 13. Le principe d'évaluation risque-neutre permet de faire comme si les agents étaient neutres face au

---

7. Pour bien voir qu'il en est ainsi, on peut remarquer que les variations de v et w, notées δv et δw, dans un intervalle de durée δt, s'écrivent :

$$\Delta v = ... + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{v,i} v \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad \text{et} \quad \Delta w = ... + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{w,i} w \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

Les processus de Wiener ne sont pas corrélés, par conséquent $E\left(\varepsilon_j \varepsilon_i\right) = 0$ si $i \neq j$. Par définition du coefficient de corrélation, on a $\rho v \sigma_v w \sigma_w = E(\Delta v \Delta w) - E(\Delta v)E(\Delta w)$.
En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt, on aboutit à :

$$\rho\sigma_v\sigma_w = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{v,i}\sigma_{w,i}$$

risque pour l'évaluation des actifs dérivés, mais les prix obtenus sont corrects dans tous les univers, l'univers réel en particulier. Dans l'univers risque-neutre classique, le prix de marché du risque de toutes les variables est nul. De plus, le prix futures d'un actif est égal à l'espérance de son prix à la date d'échéance du contrat considéré.

Dans ce chapitre, nous avons présenté des extensions de ces principes. Ainsi, quand les taux d'intérêt sont stochastiques, il y a plusieurs choix possibles pour définir l'univers risque-neutre qui, dans ce contexte, est appelé univers forward-neutre. Quand il y a une seule variable d'état, un univers forward-neutre dont le numéraire est le prix d'un actif échangé peut être défini en choisissant comme prix de marché du risque la volatilité du numéraire. Une définition du même type s'applique quand il y a plusieurs variables d'état. De manière générale, nous avons montré que, dans un univers de numéraire g, les processus de prix d'actifs f/g, exprimés en unités de numéraire, sont des martingales. Une martingale est, en particulier, un processus d'Itô dont le drift est nul. De plus, à toute date, la valeur d'un tel processus est égale à sa valeur future espérée, conditionnellement à l'information détenue. De ce fait, l'évaluation de nombreux actifs dérivés de taux peut être simplifiée en choisissant judicieusement le numéraire.

Nous avons aussi montré comment des extensions de l'approche risque-neutre permettaient d'évaluer des options d'échange d'un actif contre un autre. Aux chapitres 26, 27, 29 et 30, ces extensions seront aussi très utiles pour l'évaluation des dérivés de taux d'intérêt.

Références complémentaires

BAXTER M. et A. RENNIE, *Financial Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

COX J. C., J. E. INGERSOLL et S. A. ROSS, « An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices », *Econometrica*, 53 (1985), 363-84.

DUFFIE D., *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.

GARMAN M., « A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes », *Working Paper 50*, University of California, Berkeley, 1976.

HARRISON J. M. et D. M. KREPS, « Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets », *Journal of Economic Theory*, 20 (1979), 381-408.

HARRISON J. M. et S. R. PLISKA, « Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading », *Stochastic Processes and Their Applications*, 11 (1981), 215-260.

Problèmes et exercices

25.1 Comment le prix de marché du risque d'une variable qui n'est pas le prix d'un actif d'investissement est-il défini ?

25.2 Si le prix de marché du risque de l'or est nul, les coûts de stockage de 1 % par an et le taux sans risque de 6 %, quel est le taux de croissance espéré du prix de l'or ? Vous supposerez que l'or ne procure pas de revenus intermédiaires.

25.3 Considérons deux titres dépendant de la même variable de marché. Leurs rentabilités espérées sont respectivement de 8 % et 12 %. La volatilité du premier titre est de 15 % et le taux sans risque est de 4 %. Quelle est la volatilité du second titre ?

25.4 Une compagnie pétrolière est constituée dans l'unique but d'explorer une petite zone du Texas. Sa valeur dépend de deux variables : le prix du pétrole et la quantité de réserves qu'elle peut découvrir et prouver. Pensez-vous que le prix de marché du risque de la seconde variable soit positif, nul ou négatif ?

25.5 Écrivez l'équation aux dérivées partielles satisfaite par un actif dont la valeur dépend de celle de deux actions ne payant pas de dividendes, en construisant un portefeuille sans risque à partir de l'actif dérivé et des deux actions, et en utilisant un raisonnement d'arbitrage.

25.6 Supposez qu'un taux d'intérêt suive le processus suivant :

$$dx = a\,(x_0 - x)\,dt + c\sqrt{x}\,dz$$

où a, x_0 et c sont des constantes positives. Le prix de marché du risque est noté λ. Quel est le processus suivi par x dans l'univers risque-neutre traditionnel ?

25.7 Montrez que si l'actif f procure un dividende au taux q, l'équation (25.9) devient $\mu + q - r = \lambda\sigma$. (Indication : construisez un nouvel actif f^*, ne produisant pas de revenus intermédiaires mais qui correspond à l'actif f quand tous les revenus sont réinvestis dans f.)

25.8 Montrez que si f et g procurent des revenus aux taux q_f et q_g, l'équation (25.15) devient :

$$f_0 = g_0 e^{(q_f - q_g)T} E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$$

(Indication : construisez deux nouveaux actifs f^* et g^* ne produisant pas de revenus intermédiaires mais qui correspondent aux actifs f et g quand tous les revenus sont réinvestis dans f et g.)

25.9 « La valeur future espérée d'un taux d'intérêt dans l'univers risque-neutre est supérieure à celle dans l'univers réel. » Quelles sont les implications de cette affirmation quant au prix de marché du risque pour (a) un taux d'intérêt et (b) un prix d'obligation ? Pensez-vous que cette affirmation soit correcte ? Justifiez votre réponse.

25.10 La variable S est le prix d'un actif d'investissement qui procure un dividende au taux q dans la devise A. Elle suit le processus :

$$dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dz$$

dans l'univers réel. Écrivez le processus suivi par S et le prix de marché du risque correspondant, en définissant de nouvelles variables si nécessaire, dans :

a. L'univers risque-neutre traditionnel dans la devise A.

b. L'univers risque-neutre traditionnel dans la devise B.

c. L'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T dans la devise A.

d. L'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T dans la devise B.

25.11 Expliquez la différence de définition entre un taux forward et la valeur forward d'autres variables comme les prix d'action ou de matières premières.

25.12 Montrez le résultat de la section 25.5, c'est-à-dire si :

$$df = \left(r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{f,i}\right) f\,dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f,i} f\,dz_i$$

et

$$dg = \left(r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{g,i}\right) g\,dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{g,i} g\,dz_i$$

avec des processus de Wiener indépendants, le processus f/g est une martingale pour $\sigma_{g,i} = \lambda_i$.

25.13 Démontrez l'équation (25.33) de la section 25.7.

25.14 Montrez que si $w = h/g$, où h et g dépendent de n processus de Wiener, la i-ième composante de la volatilité de w est la différence des i-ièmes composantes des volatilités de h et g. Utilisez ce résultat pour montrer que si U et V ont pour volatilités σ_U et σ_V et si $W = U/V$, alors $\sigma_W = \sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_V^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V}$ (le résultat de la note de bas de page n° 7 peut être utile).

Questions complémentaires

25.15 Le prix d'un actif est positivement corrélé à deux variables : le prix du cuivre et le taux de change JPY/USD. Les prix de marché du risque pour ces deux variables sont respectivement 0,5 et 0,1. Si le prix du cuivre restait fixe, la volatilité du prix de l'actif serait égale à 8 % par an. Si le taux de change restait fixe, la volatilité de l'actif serait de 12 %. Le taux sans risque est de 7 % par an. Quelle est la rentabilité espérée de cet actif ? Si les deux variables d'état sont indépendantes, quelle est la volatilité de l'actif ?

25.16 Le prix d'un zéro-coupon d'échéance T suit le processus :

$$dP(t,T) = \mu_P P(t,T)dt + \sigma_P P(t,T)dz$$

et le processus de prix d'un actif dérivé, noté f, dont le sous-jacent est cette obligation, est caractérisé par :

$$df = \mu_f \, fdt + \sigma_f \, fdz$$

Il y a une seule source d'incertitude et f ne verse pas de revenus intermédiaires.

a. Quel est le prix forward, F, de f pour un contrat d'échéance T ?

b. Quel est le processus suivi par F dans un univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T ?

c. Quel est le processus suivi par F dans l'univers risque-neutre classique ?

d. Quel est le processus suivi par f dans un univers forward-neutre dont le numéraire est un zéro-coupon d'échéance T^* différente de T ? On notera σ_P^* la volatilité de cette obligation.

25.17 Considérons une variable qui n'est pas un taux d'intérêt :

a. Dans quel univers son prix futures est-il une martingale ?

b. Dans quel univers son prix forward est-il une martingale ?

c. En définissant d'autres variables si nécessaire, donnez l'expression de la différence entre le drift du prix futures et le drift du prix forward dans l'univers risque-neutre traditionnel.

d. Montrez que ce résultat est cohérent avec les points mentionnés dans la section 5.8 à propos des circonstances dans lesquelles le prix futures est supérieur au prix forward.

Annexe

Les processus stochastiques multidimensionnels

Dans cette annexe, nous présentons l'extension du lemme d'Itô aux fonctions de plusieurs variables et montrons le résultat donné dans l'équation (25.13) reliant l'excès de rendement par rapport au taux sans risque au prix de marché du risque quand il y a plusieurs sources d'incertitude.

Le lemme d'Itô pour les fonctions de plusieurs variables

Le lemme d'Itô, présenté à l'annexe du chapitre 12, donne le processus suivi par une fonction régulière (les dérivées partielles d'ordre 2 existent) d'un autre processus. Nous présentons ici la version multidimensionnelle de ce résultat quand la fonction dont on cherche à caractériser le processus dépend de plusieurs autres processus.

Considérons donc une fonction f dépendant de n variables x_1,x_2,x_n, et du temps t. Chaque variable x_i est supposée suivre un processus d'Itô de drift a_i et de variance instantanée b_i^2,$(1 \leqslant i \leq n)$. On peut donc écrire :

$$dx_i = a_i dt + b_i dz_i \tag{25A.1}$$

où les z_i sont des processus de Wiener. Les paramètres a_i et b_i sont des fonctions des x_i et du temps t. Un développement en série de Taylor permet d'écrire :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t}\Delta x_i \Delta t + ... \tag{25A.2}$$

La version discrétisée de l'équation (25A.1) s'écrit :

$$\Delta x_i = a_i \Delta t + b_i \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

où ε_i suit une loi normale centrée-réduite. La corrélation instantanée entre z_i et z_j est notée ρ_{ij}. C'est donc la corrélation entre ε_i et ε_j. À l'annexe du chapitre 12, nous avions utilisé les passages à la limite suivants :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x_i^2 = b_i^2 dt$$

et

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x_i \Delta x_j = b_i b_j \rho_{ij} dt \quad \lim_{\Delta t \to 0} \Delta x_i \Delta x_j = b_i b_j \rho_{ij} dt$$

Quand $\Delta t \to 0$, les trois premiers termes du développement de Δf dans l'équation (25A.2) sont d'ordre 1 en Δt. Tous les autres termes sont d'ordre supérieur. Par conséquent, on a :

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} dt$$

Il s'agit d'une version multidimensionnelle du lemme d'Itô. En remplaçant les dx_i par leur expression donnée dans l'équation (25A.1), on obtient :

$$df = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} \right) dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} b_i dz_i \tag{25A.3}$$

Une généralisation alternative peut être obtenue en considérant que f dépend d'un seul processus x mais que x dépend de m processus de Wiener, sous la forme :

$$dx = adt + \sum_{i=1}^{m} b_i dz_i$$

Dans ce cas, on écrit :

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + ...$$

$$\Delta x = a\Delta t + \sum_{i=1}^{m} b_i \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x_i^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} b_i b_j \rho_{ij} dt$$

où, comme précédemment, la corrélation instantanée entre z_i et z_j est notée ρ_{ij}. Cette expression permet de réécrire :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_i b_j \rho_{ij}\right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}\sum_{i=1}^{m} b_i dz_i \qquad (25A.4)$$

Finalement, si l'on considère le cas plus général dans lequel f dépend de n variables mais où chacune d'elles dépend de m processus de Wiener, c'est-à-dire :

$$dx_i = a_i dt + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} dz_k$$

les mêmes arguments conduisent à l'expression :

$$df = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}a_i + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} b_{ik} b_{jl} \rho_{kl}\right) dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{m} b_{ik} dz_k \qquad (25A.5)$$

Rentabilités espérées avec plusieurs sources d'incertitude

Dans la section 25.1, nous avons établi la relation entre rentabilité et risque dans le cas d'une source unique d'incertitude. Nous montrons ci-après le résultat de l'équation (25.13).

Considérons n processus de Wiener et $n+1$ actifs échangés sur le marché, dont les rentabilités dépendent des n processus de Wiener. Notons f_j le prix du j-ième actif et supposons que ces actifs ne paient pas de dividende. La première partie de la présente annexe implique que les processus de prix vérifient :

$$df_j = \mu_j f_j \, dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} f_j dz_i \qquad (25A.6)$$

Comme il y a $n+1$ actifs et n processus de Wiener, il est possible de former un portefeuille localement sans risque, noté Π, en utilisant l'ensemble des titres. Notons k_j la quantité de titre j dans le portefeuille. On a donc :

$$\Pi = \sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j \tag{25A.7}$$

Les k_j sont choisis de façon que les composantes stochastiques des rentabilités soient nulles, c'est-à-dire qu'ils doivent vérifier :

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j \sigma_{ij} f_j = 0 \tag{25A.8}$$

La variation de valeur du portefeuille s'écrit :

$$d\Pi = \sum_{j=1}^{n+1} k_j \mu_j f_j \, dt$$

et son coût initial est :

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j$$

En l'absence d'opportunités d'arbitrage, la rémunération du portefeuille doit être égale au taux sans risque, ce qui s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j \mu_j f_j = r \sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j \tag{25A.9}$$

ou encore :

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j (\mu_j - r) = 0 \tag{25A.10}$$

Les équations (25A.8) et (25A.10) peuvent être vues comme un système homogène de $n+1$ équations dont les inconnues sont les quantités de titres. Celles-ci ne sont pas toutes nulles. Par un résultat bien connu d'algèbre linéaire, ces équations admettent une solution si :

$$f_j(\mu_j - r) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{ij} f_j \tag{25A.11}$$

c'est-à-dire :

$$\mu_j - r = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{ij} \tag{25A.12}$$

pour certaines valeurs de λ_j qui ne dépendent que des variables d'état et du temps. En supprimant l'indice j, on voit que pour tout actif f, on a :

$$df = \mu f \, dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i f dz_i$$

avec

$$\mu - r = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i$$

ce qui démontre le résultat de l'équation (25.13).

Chapitre 26

Les dérivés de taux : les modèles de marché standard

Les actifs dérivés de taux d'intérêt sont des instruments financiers dont les payoffs dépendent d'une façon ou d'une autre du niveau des taux. Dans les années 1980 et 1990, les volumes de transactions sur ces produits ont très rapidement augmenté, que ce soit sur le marché OTC ou sur les marchés organisés. Le défi pour les opérateurs fut alors de trouver des modèles d'évaluation et de couverture efficaces et robustes pour ces produits.

Les dérivés de taux sont plus difficiles à évaluer que les dérivés sur actions ou sur devises pour les raisons suivantes :

1. L'évolution d'un taux d'intérêt est plus compliquée à modéliser que celle d'une action ou d'une devise.
2. Pour l'évaluation de nombreux produits, il est indispensable de recourir à un modèle d'évolution de la courbe des taux dans son ensemble.
3. Les volatilités en différents points de la courbe des taux sont différentes.
4. Les taux d'intérêt interviennent à la fois dans la définition des payoffs de ces actifs et dans l'actualisation de ceux-ci.

Dans ce chapitre, nous analysons les trois modèles d'évaluation d'options de taux les plus classiques : il s'agit des options sur obligations, des caps/floors et des options de swap ou *swaptions*. Nous montrons comment évaluer ces produits et utilisons les résultats du chapitre 25 pour étudier la cohérence interne de ces modèles.

26.1 Le modèle de Black

Le modèle de Black et Scholes est devenu d'une utilisation courante depuis sa publication en 1973. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 14, ce modèle a été étendu à

l'évaluation des options sur indices, sur devises, et sur contrats futures. Les traders se sont habitués à l'hypothèse de log-normalité des prix qui sous-tend cette approche et à la volatilité comme mesure du risque. Il n'est donc pas surprenant que des tentatives aient été faites pour étendre ce modèle aux dérivés de taux.

Dans les sections qui suivent, nous montrons, dans le cadre des trois modèles cités précédemment, comment l'hypothèse de log-normalité facilite l'évaluation de ces produits. Le modèle utilisé ici est appelé modèle de Black car les formules obtenues sont proches de celles qui ont été établies par Fisher Black pour l'évaluation des options sur contrats futures de matières premières (voir section 14.8).

Nous commençons par rappeler ce modèle en montrant par la même occasion qu'il est suffisamment souple pour évaluer une large gamme d'options européennes.

Utilisation du modèle de Black pour les options européennes

Considérons une option européenne sur une variable de valeur V et définissons :

T : durée de vie de l'option

F : prix forward de V pour un contrat d'échéance T

F_0 : valeur de F à la date 0

K : prix d'exercice de l'option

$P(t,T)$: prix en date t d'un zéro-coupon de maturité T

V_T : valeur de V en T

σ : volatilité de F

Le modèle de Black consiste à calculer le payoff espéré de l'option en supposant que :

1. V_T a une distribution log-normale telle que l'écart-type de $\ln(V_T)$ est $\sigma\sqrt{T}$.
2. L'espérance de V_T est F_0.

On actualise ensuite le payoff espéré sur T années au taux sans risque en multipliant par $P(0,T)$. Le payoff de l'option à la date T est $\max(V_T - K;0)$. Comme nous l'avons montré à l'annexe du chapitre 13, l'hypothèse de log-normalité implique que le payoff espéré est égal à :

$$E(V_T)N(d_1) - KN(d_2)$$

où $E(V_T)$ est la valeur espérée de V_T et :

$$d_1 = \frac{\ln\left(E\left(V_T\right)/K\right) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(E\left(V_T\right)/K\right) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Comme nous avons supposé que $E(V_T) = F_0$, l'actualisation au taux sans risque implique :

$$c = P(0,T)[F_0 N(d_1) - KN(d_2)] \tag{26.1}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

De la même façon, la valeur du put s'écrit :

$$p = P(0,T)[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \tag{26.2}$$

Ce modèle sera appelé modèle de Black dans la suite. Une de ses caractéristiques importantes est que l'hypothèse d'un mouvement brownien géométrique pour l'évolution de V ou F n'est pas nécessaire. Par contre il faut supposer qu'à la date T la variable V_T est log-normale. Le paramètre σ est généralement appelé volatilité de F ou volatilité forward de F. Cependant son rôle se limite à permettre la définition de l'écart-type de V_T par la relation :

$$\text{Écart-type de } \ln(V_T) = \sigma\sqrt{T}$$

Ce paramètre de volatilité ne nous dit cependant rien sur l'écart-type de $\ln(V_t)$ à d'autres dates t que T.

Le cas des paiements décalés

Le modèle de Black peut être étendu à la situation dans laquelle le flux est calculé à partir de la valeur de V à la date T, même si ce flux est effectivement payé à une date ultérieure T^*. Le payoff espéré est alors actualisé à partir de T^* au lieu de T, de sorte que les équations (26.1) et (26.2) deviennent :

$$c = P(0,T^*)[F_0 N(d_1) - KN(d_2)] \tag{26.3}$$

$$p = P(0,T^*)[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \tag{26.4}$$

avec d_1 et d_2 inchangés.

Validité du modèle de Black

Il est assez facile de voir que le modèle de Black s'applique quand les taux d'intérêt sont constants ou déterministes. Dans ce cas, comme nous l'avons expliqué au chapitre 5, le prix forward de V est égal au prix futures, et le modèle est identique à celui de la section 14.7.

Lorsque les taux sont stochastiques, deux aspects des équations (26.1) à (26.4) méritent discussion.

1. Pourquoi aurait-on $E(V_T) = F_0$?

2. Pourquoi peut-on ignorer l'évolution aléatoire des taux lors de l'actualisation ?

Comme nous appliquons le modèle de Black à des options sur obligations, à des caps et des floors ou encore à des swaptions, nous utiliserons les résultats de la section 25.4 pour montrer que les équations (26.1) à (26.4) sont exactes quand les taux sont stochastiques. Le modèle de Black a donc un fondement théorique solide et son domaine d'application est plus large que ce qui est parfois annoncé.

26.2 Les options sur obligations

Une option sur obligation est le droit d'acheter ou de vendre une obligation particulière à une date future donnée et à un prix spécifié. Ces options sont en général cotées sur le marché OTC, mais des options de ce type sont souvent incluses dans des émissions d'obligations (obligations à bons de souscription d'obligations, ou OBSO) pour rendre celles-ci plus attractives.

Obligations à clauses optionnelles

Certaines obligations donnent la possibilité à l'émetteur de rembourser par anticipation à un prix fixé à certaines dates futures (elles sont appelées *callable bonds* ou obligations remboursables au gré de l'émetteur). Le détenteur d'une option de ce type a vendu un call à l'émetteur. Le prix d'exercice est le prix auquel l'émetteur convient de rembourser l'obligation. En général, l'option de remboursement anticipé ne peut être exercée dans les premières années de vie de l'obligation. À partir du moment où cet exercice est possible, le prix d'exercice est le plus souvent une fonction décroissante du temps. Par exemple, si l'obligation a une échéance 10 ans, il peut être interdit d'exercer pendant les deux premières années, puis l'exercice peut avoir lieu à 110 dans les années 3 et 4, 107,5 dans les années 5 et 6, 106 dans les années 7 et 8, et enfin 103 dans les deux dernières années. L'existence de cette option de remboursement anticipé est reflétée dans le taux actuariel de ce type d'obligation. Il est en général plus élevé que celui d'obligations classiques de mêmes caractéristiques (en termes de taux de coupon et de maturité).

L'option de remboursement anticipé peut aussi être donnée au souscripteur (on parle alors de *puttable bond* ou obligation remboursable au gré du souscripteur). L'acheteur de ce titre a alors acquis une option de vente sur l'obligation. Par conséquent, la valeur d'une telle obligation est supérieure à celle d'une obligation classique de mêmes caractéristiques. Il s'ensuit que les taux actuariels de ces titres sont en général plus faibles que ceux des obligations sans clause optionnelle. Un exemple de ce type de titre est une obligation à 10 ans remboursable au bout de 5 ans.

Les emprunts auprès des banques ou les comptes de dépôts contiennent souvent des clauses optionnelles. Les possibilités de remboursement anticipé sur les emprunts immobiliers sont les exemples les plus classiques.

Dans certains cas, la clause optionnelle saute moins aux yeux. Supposons qu'une banque propose à un client un prêt au taux de 5 % pour cinq ans et lui donne deux mois pour se décider. C'est comme si le client avait obtenu une option de vente dont

la durée de vie est de deux mois et dont le sous-jacent est une obligation à 5 ans avec un taux de coupon de 5 %.

Les options européennes sur obligations

De nombreuses options sur obligations négociées sur le marché OTC ainsi que certaines clauses optionnelles d'emprunts obligataires sont de type européen. Nous analysons dans ce qui suit les modèles usuels d'évaluation de telles options.

L'hypothèse la plus commune est que le prix de l'obligation suit, à l'échéance de l'option, une loi log-normale. Les équations (26.1) et (26.2) peuvent alors être utilisées pour évaluer l'option en considérant que F_B est le prix forward de l'obligation. σ_B est défini de façon que $\sigma_B\sqrt{T}$ soit l'écart-type du logarithme du prix à la date T. Les équations définissant les prix d'options sur cette obligation sont :

$$c = P(0,T)[F_B N(d_1) - KN(d_2)] \tag{26.5}$$

$$p = P(0,T)[KN(-d_2) - F_B N(-d_1)] \tag{26.6}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(F_B/K) + \sigma_B^2 T/2}{\sigma_B\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_B\sqrt{T}$$

En utilisant les résultats de la section 5.5, F_B peut être calculé par la formule :

$$F_B = \frac{B_0 - I}{P(0,T)} \tag{26.7}$$

où B_0 est le prix de l'obligation à la date 0 et I est la valeur actuelle des coupons qui sont payables pendant la durée de vie de l'option. Dans cette formule, il est bon de noter que les prix de l'obligation (au comptant et forward) sont des prix coupon couru. La relation entre prix coupon couru et prix pied de coupon est examinée à la section 6.2.

Le prix d'exercice des équations (26.5) et (26.6) devrait être un prix d'exercice coupon couru. Il faut donc être vigilant dans la définition des caractéristiques de l'option. Si le prix d'exercice est défini comme le montant qui sera échangé au moment de l'exercice, le prix K devra être égal à ce montant. Si, par contre, comme c'est plus courant, le prix d'exercice est le prix pied de coupon applicable à la date d'exercice, K doit être égal au prix d'exercice plus le coupon couru. On peut noter que les traders appellent le prix pied de coupon *clean price* et le prix coupon couru *dirty price*.

- **Exemple 26.1**

Considérons une option de durée de vie 10 mois sur une obligation de maturité 9,75 ans et de nominal 1 000 €. Le prix coupon couru est aujourd'hui de 960 € et le prix d'exercice est 1 000 €. Le taux sans risque à 10 mois est 10 % et

la volatilité du prix forward à 10 mois est 9 % par an. Le taux de coupon de l'obligation est de 10 % mais le coupon est semestriel ; le premier est payé dans 3 mois et le second dans 9 mois. On suppose que les taux sans risque à 3 mois et 9 mois sont respectivement 9 % et 9,5 %. La valeur actuelle des coupons est donc :

$$50 \times e^{-0,25 \times 0,09} + 50 \times e^{-0,75 \times 0,095} = 95,45$$

soit 95,45 €. De l'équation (26.7) on déduit :

$$F_B = (960 - 95,45)\, e^{\frac{10}{12} \times 0,1} = 939,68$$

a. Si le prix d'exercice est le prix coupon couru qui serait payé pour obtenir l'obligation à la date d'exercice, les paramètres de l'équation (26.5) sont :

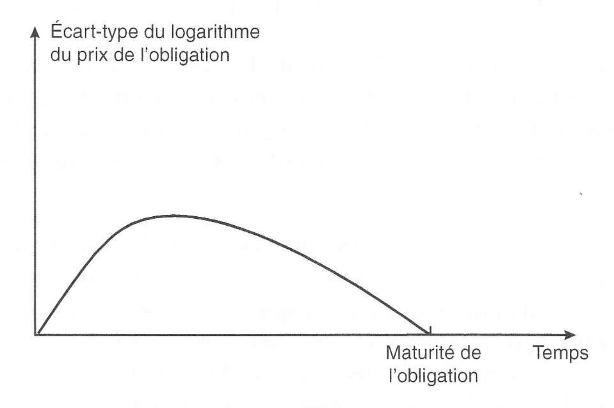
$$F_B = 939,68\,;\; K = 1000\,;\; P(0,T) = e^{-\frac{10}{12} \times 0,1} = 0,92\,;\; \sigma_B = 0,09 \text{ et } T = \frac{10}{12}.$$

Le prix de l'option est alors 9,49 €.

b. Si le prix d'exercice est le prix pied de coupon qui serait payé pour obtenir l'obligation à la date d'exercice, un mois de coupon couru doit être ajouté à K puisque l'échéance de l'option survient un mois après le paiement du second coupon. Cela donne une valeur de K égale à :

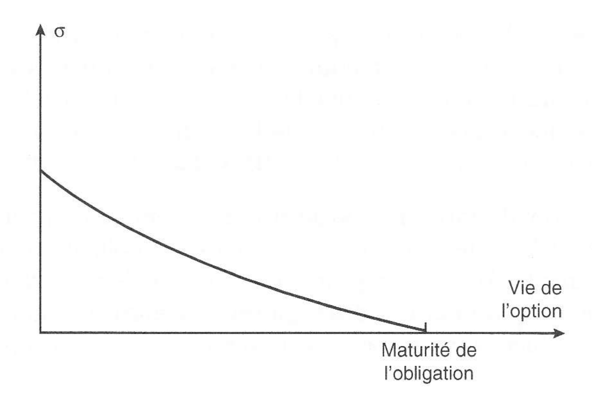
$$K = 1000 + 50 \times \frac{1}{6} = 1008,33$$

Les valeurs des autres paramètres sont inchangées et l'option vaut alors 7,97 €.



Graphique 26.1 : Écart-type du logarithme du prix de l'obligation en fonction du temps.

Le graphique 26.1 montre comment la volatilité du logarithme du prix de l'obligation change au cours du temps. La volatilité est nulle aujourd'hui puisque le prix est connu, mais aussi à la date de maturité de l'obligation puisque le prix de remboursement est connu. Entre ces deux dates, la volatilité augmente puis diminue. La volatilité σ qui



Graphique 26.2 : Variation de la volatilité σ_B en fonction de la durée de vie de l'option.

devrait être employée pour évaluer une option européenne sur obligation s'écrit :

$$\frac{\text{Écart-type du logarithme du prix de l'obligation à la date d'échéance de l'option}}{\sqrt{\text{Durée de vie de l'option}}}$$

Le graphique 26.2 donne l'allure de σ_B en fonction de la durée de vie de l'option. En général, σ_B diminue quand la durée de vie de l'option augmente.

Volatilités des taux

Dans le contexte des options sur obligations, les volatilités auxquelles il est fait référence sont plus souvent des volatilités de taux actuariels que des volatilités de prix. Le concept de duration, introduit au chapitre 4, est utilisé pour convertir une volatilité de taux en volatilité de prix. Notons D la duration modifiée de l'obligation qui sert de sous-jacent au contrat d'option ; la relation entre les variations du prix forward, F_B, et les variations du taux forward, y_F, s'écrit :

$$\frac{\Delta F_B}{F_B} \approx -D \times \Delta y_F$$

ou encore :

$$\frac{\Delta F_B}{F_B} \approx -Dy_F \times \frac{\Delta y_F}{y_F}$$

Cette relation suggère que la volatilité du prix forward de l'obligation peut être reliée, du moins approximativement, à celle du taux actuariel par la relation :

$$\sigma_B = Dy_0\sigma_y \qquad (26.8)$$

où y_0 est la valeur initiale de y_F.

Quand un trader fait référence à une volatilité de taux, il est implicite que la conversion en volatilité de prix se fait par l'intermédiaire de l'équation (26.8) et que le prix de

l'option est évalué par les équations (26.5) et (26.6). Supposons qu'une obligation, support d'un call, ait une duration modifiée de 5 ans à la date d'échéance de l'option, que le taux forward initial soit 8 % et que la volatilité du taux cotée par le broker soit 20 %. Cela signifie que le prix de marché de l'option doit être calculé par l'équation (26.5) en utilisant un paramètre $\sigma_B = 5 \times 0{,}08 \times 0{,}2 = 0{,}08$, c'est-à-dire 8 % par an.

La feuille de calcul Bond_Options du logiciel DerivaGem accompagnant ce livre peut être utilisée pour évaluer des options européennes sur obligations par le modèle de Black, en sélectionnant « Black-European » comme modèle d'évaluation. L'utilisateur entre alors la volatilité du taux actuariel qui est transformée comme ci-dessus par le programme pour évaluer l'option. Le prix d'exercice peut être coupon couru ou pied de coupon.

Exemple 26.2

Considérons un put sur une obligation à 10 ans de nominal 100 €. Le taux de coupon est 8 %, payable semestriellement. La durée de vie de l'option est 2,5 ans avec un prix d'exercice de 115 €. La volatilité du taux forward est 20 %. La courbe des taux zéro-coupon est plate au niveau de 5 %. DerivaGem montre que l'obligation cote alors 122,84 €, pied de coupon. Quand le prix d'exercice est donné pied de coupon, l'option vaut 2,37 €. Si, par contre, le prix d'exercice est donné coupon couru, le prix de l'option est 1,74 €. (Précisons que les prix obtenus ne sont pas forcément identiques à ceux qui sont calculés « à la main », car DerivaGem suppose 365 jours par an et arrondit la durée de vie au nombre entier de jours le plus proche ; voir problème 26.16 pour le calcul « manuel ».)

Justification théorique du modèle

À la section 25.4, nous avons envisagé différentes alternatives à l'évaluation risque-neutre classique des actifs dérivés. L'une d'elles consistait à passer dans un univers forward-neutre en utilisant comme numéraire un zéro-coupon d'échéance T. Nous avons montré que :

1. La valeur courante de n'importe quel actif est égale à l'espérance de sa valeur en date T, multipliée par le prix d'un zéro-coupon d'échéance T (voir équation (25.20)).
2. La valeur espérée de date T de n'importe quel titre dans cet univers est égale à son prix forward (voir équation (25.21)).

Le premier de ces deux résultats montre que le prix d'un call d'échéance T sur une obligation est donné par :

$$c = P(0,T)E_T[\max(B_T - K; 0)] \tag{26.9}$$

où B_T est le prix de l'obligation à l'échéance de l'option, E_T est l'opérateur d'espérance par rapport à la probabilité forward-neutre associée au zéro-coupon d'échéance T. Le second résultat implique que :

$$E_T(B_T) = F_B \tag{26.10}$$

Si le prix de l'obligation suit une loi log-normale en T avec un écart-type $\sigma\sqrt{T}$ pour le logarithme de B_T, l'annexe du chapitre 13 montre que l'équation (26.9) devient :

$$c = P(0,T)[E_T(B_T)N(d_1) - KN(d_2)]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(E_T\left(B_T\right)/K\right) + \sigma_B^2 T/2}{\sigma_B\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(E_T\left(B_T\right)/K\right) - \sigma_B^2 T/2}{\sigma_B\sqrt{T}} = d_1 - \sigma_B\sqrt{T}$$

En utilisant l'équation (26.10) dans les formules présentées ci-dessus, on retrouve exactement le modèle de Black de l'équation (26.5). Nous avons ainsi montré qu'on peut utiliser le taux zéro-coupon de maturité T dans l'actualisation, à condition de retenir comme prix futur espéré de l'obligation le prix forward.

26.3 Les caps de taux

Les caps de taux sont des options très couramment négociées par les institutions financières sur le marché OTC. Pour comprendre de quoi il retourne, considérons un bon à taux variable pour lequel l'intérêt est périodiquement réajusté au niveau du LIBOR. Le délai entre deux réajustements est appelé *tenor*. Supposons que le tenor soit de trois mois ; le taux du bon pour les trois premiers mois est le LIBOR initial ; pour les trois mois suivants, le taux d'intérêt payé par le bon est le LIBOR qui prévaut à la fin du premier trimestre, et ainsi de suite.

Un cap de taux procure une assurance contre une hausse des taux au-delà d'un seuil spécifié appelé taux plafond (*cap rate*). Supposons que le principal soit de 10 millions, le tenor de trois mois, la durée du cap de 5 ans et le taux plafond de 4 %. Imaginons qu'à une date de réajustement quelconque, le LIBOR atteigne 5 %. Le bon doit payer un intérêt à la fin du trimestre qui suit cette date égal à :

$$0{,}25 \times 0{,}05 \times 10\ 000\ 000 = 125\ 000$$

Si le LIBOR était à 4 %, le paiement serait de 100 000 ; dans ces conditions, le cap que nous venons de décrire engendrera un flux de 25 000 = 125 000 – 100 000. Ce calcul suppose qu'il y a exactement 0,25 an entre deux dates de réajustement. En pratique, le calcul tient compte du nombre exact de jours entre ces deux dates, avec des règles précises quant au décompte des jours.

Le payoff du cap ne survient pas à la date à laquelle le taux est arrivé à 5 %, mais trois mois plus tard. Cela est dû au fait que les intérêts à 5 % sur le bon seront aussi payés trois mois après l'observation d'un LIBOR à 5 %.

À chaque date de réajustement, le taux LIBOR est constaté. S'il est inférieur à 4 %, le cap n'engendre aucun flux (trois mois plus tard) ; si, par contre, il dépasse 4 %, le payoff engendré 3 mois plus tard est calculé comme ci-dessus, c'est-à-dire 1/4 du différentiel de taux d'intérêt entre le taux LIBOR observé et le taux plafond, appliqué

au principal de 10 millions. Les caps sont définis de façon que, même si le taux initial est supérieur au taux plafond, cela n'engendre pas de flux à la première date de réajustement (puisqu'il n'y a pas de risque sur ce premier flux). Dans notre exemple, le cap dure 5 ans, il y a donc 19 dates de réajustement correspondant aux fins de trimestres 1 à 19, et 19 paiements potentiels aux fins de trimestres 2 à 20.

Le cap comme portefeuille d'options de taux

Considérons un cap de durée de vie T avec un principal L et un taux plafond R_K. Les dates de réajustement sont notées $t_1,\ t_2,\dots,t_n$ et on note $t_{n+1}{=}T$. Soit R_k le taux effectif pour la période $[t_k,\ t_{k+1}[$, observé à la date t_k. Le payoff du cap en t_{k+1} s'écrit :

$$L\delta_k \max\left(R_k - R_K; 0\right) \tag{26.11}$$

où $\delta_k = t_k + 1 - t_k$[1]. Les deux taux intervenant dans cette formule sont composés au rythme δ_k.

L'équation (26.11) est le paiement d'un call sur LIBOR d'échéance t_{k+1}. Le cap peut donc être vu comme un portefeuille de n options de ce type. Les taux LIBOR sont observés aux dates $t_1,\ t_2,\dots,t_n$ et les paiements sont réalisés aux dates $t_2,\ t_3,\dots,t_{n+1}$. Les n options qui constituent le cap sont appelées *caplets*.

Le cap comme portefeuille d'options sur obligations

Un cap peut aussi être défini comme un portefeuille de puts sur obligations zéro-coupon, les payoffs des puts survenant à la date à laquelle ils sont calculés. Dans l'équation (26.11), le payoff de date t_{k+1} est équivalent à un payoff de date t_k égal à :

$$\frac{L\delta_k}{1 + R_k\delta_k} \max\left(R_k - R_K; 0\right)$$

Quelques lignes de calcul élémentaire permettent de réécrire ce payoff sous la forme :

$$\max\left[L - \frac{L(1 + R_K\delta_k)}{1 + R_k\delta_k}; 0\right] \tag{26.12}$$

L'expression :

$$\frac{L\left(1 + R_K\delta_k\right)}{1 + R_k\delta_k}$$

est la valeur en t_k d'un zéro-coupon qui paye $L(1{+}R_K\delta_k)$ en t_{k+1}. L'expression (26.12) est donc le payoff d'un put d'échéance t_k sur un zéro-coupon d'échéance t_{k+1} avec un prix d'exercice L et une valeur nominale du zéro-coupon égale à $L(1{+}R_K\delta_k)$. Le cap peut donc bien être analysé comme un portefeuille de puts européens sur obligations sans coupons.

1. Les conventions en matière de décompte des jours sont précisées à la fin de cette section.

Floors et collars

Les floors et les collars sont définis dans le même esprit que les caps. Un floor engendre un flux quand le taux de référence du bon tombe en deçà d'un seuil donné, appelé taux plancher. Avec les notations précédentes, le payoff d'un floor en t_{k+1} s'écrit :

$$L\delta_k \max(R_K - R_k, 0)$$

Un floor est donc un portefeuille de puts sur taux ou un portefeuille de calls sur obligations zéro-coupon. Chaque option composant le floor est appelée *floorlet*.

Un collar est destiné à assurer une protection contre une variation du taux en dehors d'un intervalle défini. Il s'agit donc de la combinaison d'une position longue sur un cap et d'une position courte sur un floor. Il est généralement conçu pour que sa valeur initiale soit nulle, c'est-à-dire de façon que le cap et le floor qui le composent aient même valeur initiale. Comme le montre l'encadré 26.1, il existe aussi une relation de parité call-put entre caps et floors.

Encadré 26.1 La parité call-put pour les caps et les floors

Il existe entre caps et floors une relation de parité du type Call-Put qui s'écrit :

$$\text{Prix du cap} = \text{Prix du floor} + \text{Valeur du swap}$$

Dans cette égalité, le cap et le floor ont même prix d'exercice R_K. Le swap est le contrat qui engage à recevoir le taux variable R_k et à payer le taux fixe R_K, sans échange de flux à la première date d'ajustement des taux. Les trois instruments ont une même durée de vie et la même fréquence de payoffs. Ce résultat peut être compris en considérant une position longue sur le cap, combinée à une position courte sur le floor. Le cap engendre un flux égal à LIBOR – R_K pendant les périodes où le taux LIBOR est plus grand que R_K. La position courte sur le floor engendre un flux égal à –(R_K – LIBOR) = LIBOR – R_K pendant les périodes où le taux LIBOR est plus petit que R_K. En définitive le cash-flow est toujours LIBOR – R_K. C'est en même temps le cash-flow du swap. Il s'ensuit que la différence entre la valeur du cap et celle du floor doit être celle du swap.

Notez que, le plus souvent, les swaps sont construits de sorte que le paiement à la première date de réajustement soit défini par le taux LIBOR de la date initiale. En revanche, les caps et les floors sont structurés de sorte qu'il n'y ait pas de paiement à la première date de réajustement. C'est pourquoi ici le swap doit être défini de façon à ne pas engendrer de paiement à la première date de réajustement.

Évaluation des caps et des floors

L'équation (26.11) a montré que le caplet correspondant au taux observé en t_k paye un flux en t_{k+1} égal à :

$$L\delta_k \max(R_k - R_K; 0)$$

Si on suppose que R_k est log-normal avec une volatilité σ_k, l'équation (26.3) donne la valeur du caplet comme :

$$L\delta_k P(0,t_{k+1})[F_k N(d_1) - R_K N(d_2)] \tag{26.13}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(F_k/R_k) + \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_k/R_k) - \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k\sqrt{t_k}$$

où F_k est le taux forward entre t_k et t_{k+1}. La valeur du *floorlet* correspondant est déduite de l'équation (26.4) :

$$L\delta_k P(0,t_{k+1})[R_K N(-d_2) - F_k N(-d_1)] \tag{26.14}$$

Dans ces équations, les taux R_K et F_k sont composés à une fréquence correspondant au délai entre deux réajustements.

■ Exemple 26.3

Considérons un contrat de cap sur un emprunt de 10 000 € qui plafonne le taux d'intérêt à 8 % (en composition trimestrielle) pour trois mois débutant dans un an. Ce contrat est un caplet qui pourrait être composant d'un cap. Supposons que la courbe des taux soit plate au niveau de 7 % (en composition trimestrielle) et que la volatilité du taux sous-jacent au contrat soit de 20 % par an. Le taux zéro-coupon continu pour toutes les maturités est 6,9394 %. Dans l'équation (26.13), on a $F_k = 0{,}07$; $\delta_k = 0{,}25$; $L = 10\ 000$; $R_K = 0{,}08$; $t_k = 1$; $t_{k+1} = 1{,}25$; $P(0, t_{k+1}) = e^{-0{,}069394\times 1{,}25} = 0{,}9169$ et $\sigma_k = 0{,}2$. Par conséquent :

$$d_1 = \frac{\ln(0{,}07/0{,}08) + 0{,}2^2 \times 1/2}{0{,}20 \times 1} = -0{,}5677$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}20 = -0{,}7677$$

On en déduit la valeur du caplet :

$$0{,}25 \times 10\ 000 \times 0{,}9169[0{,}07N\ (-0{,}5677) - 0{,}08N\ (-0{,}7677)] = 5{,}162$$

(DerivaGem donne 5,146 comme valeur du caplet. L'écart est lié aux hypothèses déjà mentionnées de 365 jours par an et de l'arrondi au nombre de jours le plus proche.)

L'équation (26.13) permet d'évaluer séparément chaque caplet composant d'un cap. On peut éventuellement utiliser des volatilités différentes pour chaque caplet ; on les appelle alors *volatilités spot*. Une alternative consiste à employer les mêmes volatilités pour tous les caplets d'un cap, mais à autoriser des volatilités différentes pour des caps n'ayant pas la même durée de vie. On parle alors de volatilités plates (*flat volatilities*)[2]. Habituellement, les volatilités utilisées sur les marchés sont plates. Cependant, de nombreux traders préfèrent les volatilités spot car elles leur permettent d'identifier les caplets surévalués ou sous-évalués. Les options sur contrat futures Eurodollar sont très semblables à des caplets, et les volatilités spot employées pour les caplets sur LIBOR 3 mois sont souvent comparées à celles qui sont calculées à partir des options sur contrat futures Eurodollar.

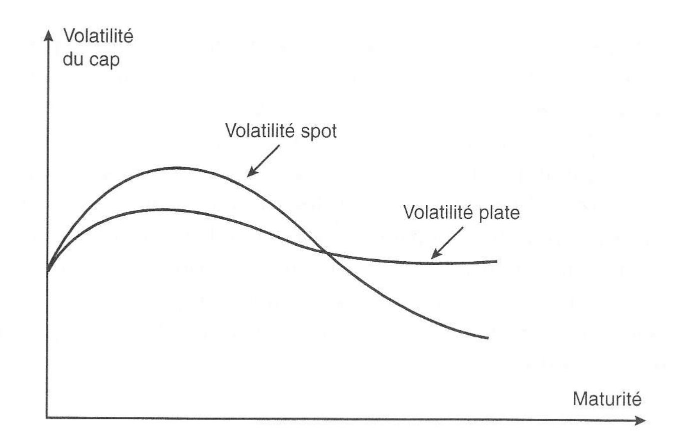
Volatilités spot versus volatilités plates

Le graphique 26.3 donne un exemple de volatilités plates et spot en fonction de la maturité (pour la volatilité spot, la maturité est celle du caplet, alors que pour la volatilité plate, la maturité est celle du cap). Les volatilités plates sont proches de moyennes cumulées de volatilités spot (ce sont des intégrales en quelque sorte) et présentent de ce fait une variabilité plus faible. Comme on peut le voir dans le graphique 26.3, les courbes présentent une « bosse » à la maturité de deux-trois ans. Cette bosse est observable aussi bien quand on calcule des volatilités implicites à partir des prix d'options que quand on utilise des données historiques. Il n'y a pas de consensus sur la justification de cette observation, mais une des explications possibles est la suivante. Les taux (très) courts sont contrôlés par les banques centrales, alors qu'à la maturité 2-3 ans, ce sont les opérateurs de marché qui, par leurs interventions, les déterminent. On peut alors supposer qu'ils sur-réagissent lorsqu'ils observent un changement des taux courts, ce qui induit une volatilité plus élevée sur les taux à 2-3 ans, comparée à celle du taux court. Au-delà de 2-3 ans, le phénomène de retour à la moyenne, qui sera abordé au chapitre 28, est observé, ce qui conduit à une baisse des volatilités sur cette partie de la courbe.

Les brokers fournissent des tables de volatilité (plate) implicite pour les caps et les floors. Les instruments utilisés pour ce calcul sont proches de la monnaie, ce qui signifie ici que le taux plafond/plancher considéré est identique à celui du swap qui a les mêmes dates de flux que le cap/floor.

Le tableau 26.1 donne un exemple de table de volatilité fournie par un broker sur le marché américain. Le tenor du cap est de trois mois et la durée de vie varie entre 1 et 10 ans. Les données illustrent bien le phénomène de bosse observé dans le graphique 26.3.

2. Les volatilités spot peuvent être déduites des volatilités plates et vice versa.



Graphique 26.3 : La courbe en bosse de la volatilité.

Tableau 26.1 : Table de volatilité pour des caps et floors (USD)

Durée de vie	Cap bid	Cap ask	Floor bid	Floor ask
1 an	18,00	20,00	18,00	20,00
2 ans	23,25	24,25	23,75	24,75
3 ans	24,00	25,00	24,50	25,50
4 ans	23,75	24,75	24,25	25,25
5 ans	23,50	24,50	24,00	25,00
7 ans	21,75	22,75	22,00	23,00
10 ans	20,00	21,00	20,25	21,25

Justification théorique du modèle

On peut montrer la cohérence du modèle de Black pour un caplet en considérant un univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon de maturité t_{k+1}. L'analyse de la section 25.4 montre que :

1. La valeur aujourd'hui de n'importe quel actif est sa valeur espérée à la date t_{k+1} multipliée par $P(0, t_{k+1})$ (équation (25.20)).
2. L'espérance du taux d'intérêt pour la période $[t_k\,;\,t_{k+1}]$ est le taux forward dans cet univers (équation (25.22)).

Le premier de ces deux résultats implique que le prix du caplet dont le payoff survient à la date t_{k+1} est :

$$L\delta_k P(0,\, t_{k+1}) E_{k+1}\left[\max(R_k - R_K)\right]$$

où E_{k+1} désigne l'opérateur d'espérance dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance t_{k+1}. L'annexe du chapitre 13 permet d'écrire cette expression sous la forme :

$$L\delta_k P(0,\ t_{k+1})[E_{k+1}(R_k)\ N(d_1) - R_K\ N(d_2)]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(E_{k+1}\left(R_k\right)/R_K\right) + \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(E_{k+1}\left(R_k\right)/R_K\right) - \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k\sqrt{t_k}$$

Mais le second résultat implique que :

$$E_{k+1}(R_k) = F_k$$

On retrouve la formule d'évaluation de l'équation (26.13). On peut donc bien actualiser au taux observé aujourd'hui pour la maturité t_{k+1} tant que l'espérance du taux d'intérêt est considérée comme égale au taux forward.

Utilisation de DerivaGem

Le logiciel DerivaGem qui accompagne ce livre peut être utilisé pour évaluer des caps et des floors par le modèle de Black. Dans la feuille Cap_and_Swap_Option, choisissez Cap/Floor dans la catégorie « Underlying Type » et « Black-European » dans la catégorie modèle d'évaluation. La courbe des taux zéro-coupon introduite s'entend en taux continus. Les données à introduire sont la date de départ et de fin du cap, la volatilité plate et le tenor, c'est-à-dire la fréquence de réajustement. Le programme calcule les dates de paiement par induction arrière. Le premier *caplet/floorlet* est supposé couvrir une période située entre 0,5 et 1,5 fois le tenor. Supposons par exemple que la période couverte par le cap se situe entre 1,2 et 2,8 années et que le tenor soit de trois mois. Il y a six caplets, correspondant aux périodes allant de 2,55 à 2,8 ans, de 2,3 à 2,55 ans, et ainsi de suite jusqu'à la première période allant de 1,2 à 1,55 an, cette dernière étant plus longue que les autres.

L'impact des conventions de décompte des jours

Les formules présentées jusque-là ne tenaient pas compte des conventions de décompte des jours (voir la section 6.1 pour une explication sur ce point). Supposons que le taux de cap R_K soit exprimé avec une convention Exact/360 (pratique courante aux USA). Cela signifie que l'intervalle de longueur δ_k devrait être remplacé par un intervalle de longueur a_k correspondant à la partie effective concernée par la capitalisation entre t_k et t_{k+1}. Supposons que t_k et t_{k+1} correspondent respectivement au 1er mai et au 1er août. Dans la convention Exact/360 il y a 92 jours et on devrait avoir $a_k = 92/360 = 0{,}2521$. Il faut aussi exprimer le taux forward F_k avec cette même convention. Il faut donc le définir en résolvant l'équation :

$$1 + a_k F_k = \frac{P(0{,}t_k)}{P(0{,}t_{k+1})}$$

L'impact de cette transformation est du même ordre que si l'on convertit R_K d'une base Exact/360 en une base Exact/Exact. En d'autres termes, c'est équivalent à multiplier le taux de cap coté par 365/360 ou 366/360 pour obtenir R_K et en déduire F_k en résolvant :

$$1 + \delta_k F_k = \frac{P(0,t_k)}{P(0,t_{k+1})}$$

26.4 Options de swap européennes

Les options de swap ou *swaptions* sont des options sur des swaps de taux. Elles donnent le droit à leur détenteur de conclure un swap à une date future déterminée. De nombreuses institutions financières qui proposent des swaps de taux à leurs clients négocient aussi ce type d'options. Comme le montre l'encadré 26.2, une swaption peut aussi s'analyser comme une option sur obligation.

Pour illustrer la façon dont une option de swap peut être utilisée, considérons une entreprise qui sait que dans six mois elle accordera un prêt à taux variable à 5 ans, mais qui souhaiterait échanger les intérêts à taux variable contre des intérêts à taux fixe (voir chapitre 7 sur l'utilisation des swaps). L'entreprise peut alors acheter une swaption (en supportant un coût) qui lui donne le droit, dans six mois, de recevoir le LIBOR et de payer un taux fixe en contrepartie, par exemple 8 % pour cinq ans. Si le taux fixe des swaps dans six mois est inférieur à 8 %, l'entreprise n'exercera pas son option et conclura le swap à ce moment-là sur le marché. À l'inverse, si le taux fixe du swap est supérieur à 8 % à cette date, elle exercera son droit et obtiendra un swap à des conditions meilleures que celles qui sont proposées sur le marché.

Les swaptions offrent donc la garantie que le taux fixe qui sera payé à une date future sera inférieur à un seuil fixé. Il s'agit donc d'une alternative aux *forward swaps* (ou swaps différés). Ces contrats n'entraînent pas de coût initial, mais engagent l'entreprise à conclure le swap à la date spécifiée. Avec une swaption, la possibilité est laissée de profiter de conditions de marché plus favorables tout en se protégeant contre une dégradation de ces conditions. La différence entre une swaption et un forward swap est de même nature que celle qui existe entre une option et un contrat forward.

Encadré 26.2 Le lien avec les options sur obligations

Au chapitre 7, nous avons montré qu'un swap est équivalent à l'échange d'une obligation à taux fixe contre une obligation à taux variable. À la date de départ du swap, la valeur de l'obligation à taux variable est égale au principal du swap. Une option de swap peut ainsi être interprétée comme une option d'échange d'une obligation à taux fixe contre le principal du swap. Si une option de swap donne le droit à son détenteur de payer le taux fixe et de recevoir le taux variable, c'est un put sur l'obligation à taux fixe dont le prix d'exercice est le principal du swap. Si, au contraire, elle donne le droit de payer le taux variable en recevant le taux fixe, c'est un call sur l'obligation à taux fixe avec un prix d'exercice égal au principal du swap.

Valorisation des options de swap européennes

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 7, le taux de swap pour une maturité donnée, à un instant t, est le taux fixe qui serait échangé contre le LIBOR dans un swap émis en date t. Le modèle classique utilisé pour valoriser les options de swap européennes suppose que le taux de swap à la maturité de l'option est log-normal. Considérons une option de swap donnant le droit de payer le taux s_K et de recevoir le LIBOR dans un swap qui dure n années et qui démarre dans T années. Nous supposons que le swap donne lieu à m paiements par an et le principal est noté L.

Au chapitre 7, nous avons vu que les conventions de décompte des jours pouvaient conduire à de légères différences dans les paiements de la jambe fixe d'une date à l'autre. Ici, nous ignorons cet effet et supposons que le paiement fixe est toujours égal à L/m. Le cas général sera abordé à la fin de cette section.

Notons s_T le taux de swap pour un swap de durée n à la date d'échéance de l'option de swap (s_T et s_K ont un rythme de composition de m fois par an) ; en comparant les cash-flows du swap à taux s_T avec ceux du swap à taux s_K, on constate que la swaption engendre une série de flux définis par :

$$\frac{L}{m}\max\left(s_T - s_K\ ;0\right)$$

Les flux sont reçus m fois par an pendant n années ; notons donc $T_1, T_2, \ldots, T_{mn}$ les dates de paiement, mesurées en années à compter d'aujourd'hui (on a approximativement $T_i = T + \frac{i}{m}$). Chaque cash-flow est le payoff d'un call sur s_T de prix d'exercice s_K. En utilisant l'équation (26.3), la valeur du cash-flow reçu en T_i est donnée par :

$$\frac{L}{m}P\left(0,T_i\right)\left[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)\right]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(s_0/s_K\right) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(s_0/s_K\right) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

où s_0 est le taux de swap forward calculé comme indiqué à l'équation (25.23).

La valeur totale de la swaption est donc :

$$\sum_{i=1}^{mn}\frac{L}{m}P(0,T_i)[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

Notons A la valeur d'un contrat qui paye $1/m$ aux dates (T_i, i=1,...,mn) ; la valeur de la swaption devient :

$$LA[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)] \tag{26.15}$$

où A est défini par :

$$A = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{mn} P\left(0,T_i\right)$$

Si, par contre, la swaption donne le droit à son détenteur de recevoir le taux fixe s_K au lieu de le payer, le payoff s'écrit :

$$\frac{L}{m}\max(s_K - s_T, 0)$$

Il s'agit alors d'un put sur s_T. Comme précédemment, les flux sont reçus aux dates $(T_i,\ i{=}1,\ldots,mn)$; la valeur de la swaption est donnée par l'équation (26.4) :

$$LA[s_K N(-d_2) - s_0 N(-d_1)] \tag{26.16}$$

- **Exemple 26.4**

Supposons que la courbe LIBOR soit plate au niveau de 6 % (continu) et considérons une option de swap qui donne à son détenteur le droit de payer 6,2 % dans un swap de trois ans débutant dans cinq ans. La volatilité du taux de swap est 20 %, les paiements sont semestriels et le principal est 100 €. Dans ce cas :

$$A = \frac{1}{2}[e^{-0,06\times 5,5}+e^{-0,06\times 6}+e^{-0,06\times 6,5}+e^{-0,06\times 7}+e^{-0,06\times 7,5}+e^{-0,06\times 8}] = 2{,}0035$$

Un taux de 6 % continu devient 6,09 % en composition semestrielle. Il s'ensuit dans cet exemple que $s_0 = 0{,}0609$; $s_K = 0{,}062$; $T = 5$; $\sigma = 0{,}2$. On en déduit alors :

$$d_1 = \frac{\ln(0{,}0609/0{,}062) + 0{,}2^2 \times 5/2}{0{,}2\sqrt{5}} = 0{,}1836$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}2\sqrt{5} = -0{,}2636$$

L'équation (26.15) permet alors d'obtenir la valeur de la swaption :

$$100 \times 2{,}0035[0{,}0609 \times N(0{,}1836) - 0{,}062N(-0{,}2636)] = 2{,}07$$

qui correspond au prix trouvé dans DerivaGem.

Les cotations des brokers

Les intermédiaires (brokers) fournissent des tables de volatilité implicite pour les swaptions européennes. Les instruments utilisés pour ces calculs sont les options à la monnaie, c'est-à-dire que le taux d'exercice de la swaption est égal au taux de swap forward. Le tableau 26.2 donne un exemple de ce type de données pour le marché américain.

Le tenor des swaps ayant servi à construire cette table est de six mois. La durée de vie de l'option figure dans la première colonne, alors que la première ligne donne la durée de vie du swap. On constate dans la colonne correspondant à un an la bosse de volatilité déjà évoquée dans le cas des caps. Quand la maturité des swaps s'allonge, cette bosse tend à disparaître.

Tableau 26.2 : Table de volatilité pour des swaptions européennes (en % par an)

	Durée de vie du swap						
Durée de vie de l'option	**1 an**	**2 ans**	**3 ans**	**4 ans**	**5 ans**	**7 ans**	**10 ans**
1 mois	17,75	17,75	17,75	17,50	17,00	17,00	17,00
3 mois	19,50	19,00	19,00	18,00	17,50	17,00	16,00
6 mois	20,00	20,00	19,25	18,50	18,75	17,75	16,75
1 an	22,50	21,75	20,50	20,00	19,50	18,25	16,75
2 ans	22,00	22,00	20,75	19,50	19,75	18,25	16,75
3 ans	21,50	21,00	20,00	19,25	19,00	17,75	16,50
4 ans	20,75	20,25	19,25	18,50	18,25	17,50	16,00
5 ans	20,00	19,50	18,50	17,75	17,50	17,00	15,50

Justification théorique du modèle d'évaluation des swaptions

On peut montrer la cohérence du modèle de Black pour les swaptions en considérant un univers forward-neutre avec l'annuité A comme numéraire. L'analyse de la section 25.4 montre que :

1. La valeur, aujourd'hui, de n'importe quel actif est égale à la valeur aujourd'hui de l'annuité multipliée par l'espérance du rapport :

   Prix de l'actif à la date T/Valeur de l'annuité à la date T

   dans cet univers (voir équation (25.25)).
2. L'espérance du taux de swap à la date T est égale au taux de swap forward (voir équation (25.24)).

Le payoff de l'option de swap à la date T, quand le taux payé est s_K et le taux reçu s_T, est égal à :

$$\frac{L}{m}\max\left(s_T - s_K\,;0\right)$$

Le premier résultat montre que la valeur de l'option de swap est donnée par :

$$LA \times E_A\left[\max(s_T - s_K\,;\,0)\right]$$

Cette quantité est égale, en utilisant l'annexe du chapitre 13, à :

$$LA\left[E_A(s_T)\ N(d_1) - s_K N(d_2)\right]$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln\left(E_A\left(s_T\right)/s_K\right) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(E_A\left(s_T\right)/s_K\right) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Le second argument montre ici aussi que $E_A(s_T) = s_0$. La combinaison de ces deux résultats conduit bien à la formule (26.15). Cela montre que nous pouvons faire comme si les taux d'intérêt étaient constants dans l'actualisation tant que nous utilisons le taux de swap forward comme taux de swap espéré en date T.

L'impact de la convention de décompte des jours

Nous précisons maintenant les formules précédentes en tenant compte de la convention pour le décompte des jours. Le taux fixe du swap est supposé être exprimé en Exact/365 ou 30/360. Supposons $T_0 = T$ et notons a_i la fraction de période de capitalisation pendant l'intervalle séparant T_{i-1} de T_i. Les formules présentées précédemment sont correctes avec une annuité A définie par :

$$A = \sum_{i=1}^{mn} a_i P(0,T_i)$$

Comme nous l'avons indiqué dans l'équation (25.23) le taux de swap forward s_0 est donné en résolvant :

$$s_0 A = P(0,T) - P(0,T_{mn})$$

26.5 Généralisations

Nous avons présenté trois versions différentes du modèle de Black appliquées aux options sur obligations, aux caps/floors, et enfin aux options de swap. Chacun de ces modèles a une cohérence interne, mais ils ne sont pas globalement cohérents entre eux. En effet, quand les prix d'obligations aux dates futures suivent des lois log-normales, ce n'est pas le cas pour les taux zéro-coupon et les taux de swap.

Ces résultats peuvent être généralisés ainsi :

1. Lorsqu'un instrument financier quelconque engendre un payoff en date T dépendant du prix d'un actif (sous-jacent) en date T, sa valeur aujourd'hui est égale au produit de $P(0,T)$ par le paiement terminal espéré, calculé dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T.
2. Lorsqu'un instrument financier quelconque engendre un payoff en date T_2 dépendant d'un taux (sous-jacent), pour la maturité T_2, mais observé en date T_1, sa valeur aujourd'hui est égale au produit de $P(0,T_2)$ par le paiement terminal espéré, calculé dans l'univers où le taux (sous-jacent) futur espéré est égal au taux forward.
3. Considérons maintenant un instrument financier quelconque engendrant un payoff qui se présente comme une annuité. Le montant de l'annuité est déterminé en date T comme une fonction du taux de swap débutant en date T pour n années.

De plus, les dates de paiement de l'annuité sont les mêmes que celles du swap. La valeur aujourd'hui de l'instrument financier est égale au produit de A par le paiement espéré annuel, où (a) A est la valeur présente de l'annuité quand les paiements se font au rythme d'une unité monétaire par an, et (b) les espérances sont calculées dans l'univers où le taux de swap futur espéré (en date T) est égal au taux de swap forward.

Ces résultats généralisent les trois applications du modèle de Black présentées précédemment.

26.6 La couverture des dérivés de taux

Les techniques s'appuyant sur les « grecques », développées au chapitre 15, peuvent être étendues à la couverture des produits dérivés de taux.

Le risque delta est associé ici à une modification de la courbe zéro-coupon. Cependant, les variations de cette courbe sont diverses et de nombreux deltas différents peuvent être calculés. Les possibilités les plus classiques sont les suivantes :

1. Évaluer l'impact d'une translation d'un point de base de la courbe. Cette variation est parfois notée DV01.
2. Évaluer l'impact de faibles variations des prix des instruments qui ont servi à la construction de la courbe.
3. Segmenter la courbe zéro-coupon (ou forward) et évaluer l'impact d'une translation d'un point de base sur l'un des segments, le reste n'étant pas modifié (voir encadré 6.3).
4. Opérer une analyse en composantes principales (voir section 18.9) et évaluer l'impact des changements des facteurs essentiels de l'analyse. Le premier delta ainsi obtenu mesure l'effet d'un déplacement parallèle de la courbe, le second l'effet d'un changement de pente, etc.

En pratique, les traders préfèrent la deuxième méthode car la courbe ne peut varier que si les prix des actifs qui servent à la calculer se modifient. Ils considèrent ainsi qu'il est préférable de se concentrer sur l'exposition au risque de variation de prix des inputs de la courbe des taux.

Quand plusieurs deltas (qui sont des dérivées partielles premières) sont calculés, les choix se multiplient pour les gammas (qui sont des dérivées partielles secondes). Si dix actifs sont utilisés pour construire la courbe et si dix deltas sont calculés par rapport aux variations de prix de chacun de ces composants, il y a 55 gammas possibles, inutilisables en pratique. Une solution peut être d'ignorer les dérivées croisées, mais il en reste quand même 10. Une deuxième possibilité est de calculer un seul gamma en envisageant une translation de la courbe des taux. Une troisième solution est de calculer les gammas par rapport aux deux premiers facteurs de l'analyse en composantes principales.

Le vega d'un portefeuille mesure l'exposition aux changements de volatilité. Une possibilité de gestion de ce risque consiste à évaluer l'impact sur la valeur d'un portefeuille d'une variation donnée de la volatilité de l'ensemble des caps et des swaptions. Cela suppose cependant que la volatilité est gouvernée par un seul facteur, ce qui est sans doute simpliste. Une meilleure solution consiste à réaliser une analyse en composantes principales des volatilités de l'ensemble des instruments et à calculer des vega par rapport aux facteurs les plus significatifs.

Résumé

Le modèle de Black est très prisé pour l'évaluation des options de taux européennes. Le point clé de ce modèle est l'hypothèse de log-normalité du sous-jacent à la date d'échéance de l'actif dérivé. Pour une option sur obligation, c'est le prix de cette dernière qui est supposé log-normal, pour un cap c'est le taux des caplets qui est log-normal, et pour une swaption, c'est le taux de swap. Chacun de ces modèles a sa cohérence interne, mais ils ne sont pas cohérents entre eux.

Le modèle de Black suppose de calculer le payoff espéré en s'appuyant sur l'hypothèse que la valeur future espérée du sous-jacent est égale à sa valeur forward ; on actualise ensuite au taux zéro-coupon observé sur le marché aujourd'hui. Quand le contrat comporte des spécificités en termes de dates de paiement, un ajustement temporel ou de convexité sur le prix forward est nécessaire, comme nous allons le voir au chapitre 27.

Références complémentaires

BLACK F., « The Pricing of Commodity Contracts », *Journal of Financial Economics*, 3 (mars 1976), 167-79.

Problèmes et exercices

26.1 Une entreprise limite à 10 % le coût d'un emprunt au taux LIBOR 3 mois par l'intermédiaire d'un cap. Le principal est 20 millions d'euros. À une date de réajustement, le LIBOR est à 12 % ; quel est le flux engendré par le cap ? À quelle date ce flux surviendra-t-il ?

26.2 En quoi une swaption ressemble-t-elle à une option sur obligation ?

26.3 Utilisez le modèle de Black pour évaluer un put européen d'échéance 1 an sur une obligation 10 ans. Le prix actuel de l'obligation est 125 €, le prix d'exercice 110 €, le taux à 1 an est 10 %, la volatilité du prix de l'obligation est 8 % par an, et la valeur actuelle des coupons payables pendant la durée de vie de l'option s'élève à 10 €.

26.4 Expliquez avec précision comment vous utiliseriez dans l'évaluation d'un cap 5 ans (a) les volatilités spot, et (b) les volatilités plates.

26.5 Calculez la valeur d'une option qui plafonne le taux 3 mois, débutant dans 15 mois, à 5 % (en composition trimestrielle) sur un principal de 1 000 €. Le taux forward pour la période en question est 4 % (composition trimestrielle). Le taux continu pour la maturité 18 mois est 3,5 % et la volatilité du taux forward est 12 % par an.

26.6 Une banque utilise le modèle de Black pour évaluer les options sur obligations. Supposez qu'une volatilité implicite, calculée sur une option à 5 ans portant sur une obligation à 10 ans, soit utilisée pour évaluer une option à 9 ans sur cette même obligation. Pensez-vous que le prix ainsi estimé sera trop élevé ou trop faible ? Justifiez votre réponse.

26.7 Calculez la valeur d'une option à 4 ans sur une obligation à 5 ans par le modèle de Black. L'obligation cote 105 €, coupon couru. Une obligation de maturité 4 ans et de même coupon cote 102 €, toujours coupon couru. Le prix d'exercice de l'option est 100 €, le taux sans risque à 4 ans est 10 % et la volatilité anticipée du prix de l'obligation dans quatre ans est 2 %.

26.8 Si la volatilité du taux actuariel pour un put 5 ans sur une obligation 10 ans est 22 %, à combien cette option devrait-elle être évaluée ? Vous supposerez que, au vu des taux d'aujourd'hui, la duration de l'obligation est 4,2 ans et le taux actuariel forward 7 %.

26.9 Quel instrument est équivalent à un collar 5 ans de coût nul, où le prix d'exercice du cap est égal à celui du floor ? À quoi est égal ce prix d'exercice commun ?

26.10 Donnez une relation de parité call-put pour les options européennes sur obligations.

26.11 Donnez une relation de parité call-put pour les swaptions européennes.

26.12 Expliquez l'opportunité d'arbitrage révélée par des volatilités implicites (plates) différentes sur un cap et sur un floor. Les données du tableau 26.1 révèlent-elles ce type d'opportunité ?

26.13 Quand le prix d'une obligation suit une loi log-normale, le taux actuariel peut-il être négatif ? Justifiez votre réponse.

26.14 Quelle est la valeur d'une option de swap européenne qui donne à son détenteur le droit, dans quatre ans, de conclure un swap à 3 ans par lequel elle paiera un taux fixe de 5 % et recevra le LIBOR ? Le principal du swap est 10 millions d'euros. La courbe des taux est plate au niveau de 5 % (en composition annuelle) et la volatilité du taux de swap est de 20 %. Comparez votre réponse à celle donnée par DerivaGem.

26.15 Le taux actuariel d'un zéro-coupon, noté R, suit le processus :

$$dR = \mu dt + \sigma dz$$

où μ et σ sont des fonctions de R et t, et z est un processus de Wiener. Utilisez le lemme d'Itô pour montrer que la volatilité du prix du zéro-coupon tend vers 0 quand la durée de vie résiduelle de l'obligation tend vers 0.

26.16 Calculez « à la main » les prix d'options de l'exemple 26.2.

26.17 Les taux zéro-coupon pour les maturités 1 à 5 ans sont respectivement 6 %, 6,4 %, 6,7 %, 6,9 % et 7 %. Le prix d'un cap à cinq ans avec paiements semestriels et principal 100 € pour un taux plafond de 8 % est 3 €. Utilisez DerivaGem pour calculer :

a. La volatilité plate à cinq ans pour les caps et les floors.

b. Le taux plancher pour construire un collar 5 ans à coût nul si le taux plafond du cap est 8 %.

26.18 Montrez que $V_1 + f = V_2$, où V_1 est la valeur d'une option de swap donnant le droit de payer le taux fixe s_K et de recevoir le LIBOR entre les dates T_1 et T_2, f est la valeur d'un forward swap permettant de recevoir le taux fixe s_K et de payer le LIBOR entre les dates T_1 et T_2, et V_2 est la valeur d'une option de swap permettant de recevoir le taux fixe s_K et de payer le LIBOR entre les dates T_1 et T_2. Déduisez-en que si s_K est égal au taux de swap forward observé aujourd'hui, alors $V_1 = V_2$.

26.19 Supposons que les taux zéro-coupon soient ceux de l'exercice 26.17 ; utilisez DerivaGem pour déterminer la valeur d'une option donnant le droit de payer le taux fixe de 6 % et de recevoir le LIBOR dans le cadre d'un swap à cinq ans débutant dans un an. Le principal est de 100 millions et les paiements sont semestriels ; la volatilité du taux de swap est de 21 %.

26.20 Expliquez comment vous calculeriez (a) la volatilité plate d'un cap à partir des volatilités spot, et (b) les volatilités spot à partir de la volatilité plate ?

Questions complémentaires

26.21 Considérons un put à 8 mois sur une obligation d'État dont la durée de vie résiduelle est 14,25 ans. Le prix coupon couru de cette obligation est 910 €, le prix d'exercice est 900 € et la volatilité 10 % par an. Un coupon de 35 € est payable dans trois mois. Le taux sans risque est de 8 % pour toutes les maturités jusqu'à un an. Utilisez le modèle de Black pour calculer le prix de l'option. Considérez les deux cas où le prix d'exercice est exprimé coupon couru ou pied de coupon.

26.22 Calculez le prix d'un cap sur LIBOR 3-mois dans neuf mois avec un principal de 1 000 €. Utilisez le modèle de Black avec les informations suivantes :

a. Le prix futures de l'Eurodollar neuf mois est 92 (ignorez les différences entre prix forward et prix futures).

b. La volatilité implicite d'une option Eurodollar neuf mois est 15 %.

c. Le taux d'intérêt à un an est 7,5 % (en continu).

d. Le taux de cap est 8 % (en Exact/360).

26.23 Supposez qu'en fréquence de composition annuelle, la courbe LIBOR soit plate au niveau de 8 %. Une swaption donne le droit à son détenteur de recevoir 7,6 % dans un swap de cinq ans débutant dans quatre ans. Les paiements sont annuels. Le principal est de un million d'euros et la volatilité du taux de swap est 25 %. Utilisez le modèle de Black pour évaluer l'option de swap. Comparez votre réponse avec celle donnée par DerivaGem.

26.24 Utilisez DerivaGem pour évaluer un collar à cinq ans qui garantit des taux compris entre 5 % et 7 % sur un prêt fondé sur le LIBOR (avec des réajustements trimestriels). La courbe des taux LIBOR (en continu) est supposée plate à 6 %. Utilisez une volatilité plate de 20 % et un principal de 100 €.

26.25 Utilisez DerivaGem pour évaluer une swaption européenne qui vous donne le droit, dans deux ans, de conclure un swap pour cinq ans dans lequel vous payez un taux fixe de 6 % et vous recevez le taux variable. Les flux du swap sont échangés semestriellement. Les taux zéro-coupon à un an, deux ans, cinq ans et dix ans (en continu) sont respectivement 5 %, 6 %, 6,5 %, 7 %. Le principal est 100 € et la volatilité de 15 % par an. Donnez un exemple d'utilisation d'une telle option de swap par une entreprise. Quelle option sur obligation est équivalente à la swaption ?

Chapitre 27

Ajustements de convexité, ajustements temporels et quantos

Une procédure usuelle pour calculer le prix d'un actif dérivé de type européen comporte deux étapes :

1. Calculer le flux terminal espéré en supposant que la valeur espérée à l'échéance de chaque variable pertinente est égale à la valeur forward de cette variable.
2. Actualiser ce flux espéré au taux sans risque applicable pour la période séparant la date d'évaluation de la date de réalisation du flux.

Cette démarche a déjà été utilisée au chapitre 4 pour évaluer des FRA. Nous avons supposé que le taux spot futur était égal au taux forward observé à la date d'évaluation et les flux ont été actualisés au taux sans risque. De même, au chapitre 7, nous avons évalué des swaps en appliquant ces principes. Enfin, au chapitre 26, nous avons montré que l'évaluation par le modèle de Black d'un grand nombre d'options européennes est une application de cette méthode en deux étapes. En particulier, les modèles du chapitre 26 concernant les options sur obligations, les caps/floors, et les swaptions appartiennent à cette catégorie.

La question est de savoir si cette technique s'applique dans tous les cas pour les options européennes. La réponse est négative ! Quand les flux sont définis de manière non standard, il est parfois nécessaire d'adapter l'approche précédente, en particulier l'étape 1. Dans ce chapitre, nous analysons trois types d'ajustements : les ajustements de convexité, les ajustements temporels et les quantos.

27.1 Les ajustements de convexité

Nous traitons en premier lieu le cas de l'évaluation d'un actif financier dont le payoff de date T dépend du taux actuariel d'une obligation à cette date.

On définit le taux actuariel forward (*forward yield*) comme le taux actuariel obtenu quand on considère que le prix de l'obligation est son prix forward. En d'autres termes, si B_T et y_T désignent respectivement le prix et le taux actuariel de l'obligation en date T, ces deux quantités sont liées par une fonction G, c'est-à-dire :

$$B_T = G(y_T)$$

Si F_0 est le prix forward de l'obligation, le taux actuariel forward y_0 est défini par :

$$F_0 = G(y_0)$$

La fonction G n'est évidemment pas linéaire. Par conséquent, quand le prix futur espéré de l'obligation est égal au prix forward (c'est-à-dire dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T), le taux actuariel futur espéré n'est pas égal au taux actuariel forward.

Ce point est illustré dans le graphique 27.1. Il montre la relation entre prix et taux actuariels. Si on suppose pour simplifier qu'il y a trois prix équiprobables en date T pour l'obligation, tels que $B_3 - B_2 = B_2 - B_1$, on constate que le prix espéré est B_2. Par contre, les trois taux actuariels correspondants y_1, y_2, y_3 ne sont pas équidistants car la courbe liant le prix au taux est convexe. Par conséquent, le taux actuariel moyen sera supérieur à y_2 (par l'inégalité de Jensen).

Considérons maintenant un actif dérivé qui engendre un payoff dépendant du taux actuariel y_T. L'équation (25.20) autorise à évaluer cet actif (a) en calculant son paiement espéré dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T, et (b) en actualisant au taux zéro-coupon pour cette même maturité. Dans cet univers, le prix forward de l'obligation est égal au prix futur espéré, mais ici c'est le taux actuariel espéré qui nous intéresse. L'analyse de l'annexe de ce chapitre donne une approximation de cette espérance sous la forme :

$$E_T\left(y_T\right) = y_0 - \frac{1}{2} y_0^2 \, \sigma_y^2 \, \frac{G''\left(y_0\right)}{G'\left(y_0\right)} \tag{27.1}$$

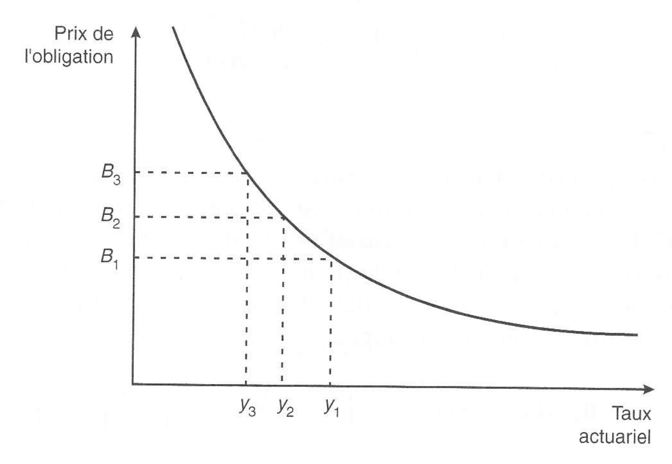
où G' et G'' désignent les deux premières dérivées de G, E_T est l'opérateur d'espérance dans l'univers forward-neutre et σ_y est la volatilité du taux actuariel. Par conséquent, on peut actualiser au taux sans risque de maturité T à condition de considérer que le taux actuariel futur espéré est égal à :

$$y_0 - \frac{1}{2} y_0^2 \, \sigma_y^2 \, \frac{G''\left(y_0\right)}{G'\left(y_0\right)}$$

plutôt qu'à y_0. La différence entre les deux :

$$-\frac{1}{2} y_0^2 \, \sigma_y^2 \, \frac{G''\left(y_0\right)}{G'\left(y_0\right)}$$

est appelée ajustement de convexité. Dans le graphique 27.1, cette différence correspond à celle qui sépare y_2 du taux actuariel espéré. Notons pour terminer que l'ajustement de convexité est positif car G est convexe décroissante, ses deux premières dérivées sont donc de signe opposé.



Graphique 27.1 : Relation entre les prix et les taux actuariels d'obligation à une date T.

Application 1 : taux d'intérêt

Comme première application de l'équation (27.1), nous analysons un actif financier qui procure un payoff à la date T égal à l'intérêt obtenu entre T et T^* sur un principal égal à L (cet exemple sera utile au chapitre 30). Il est bon de noter que l'intérêt de la période T à T^* est normalement payé en T^* ; ici il est payé en avance, c'est-à-dire en T.

Le cash-flow considéré s'écrit donc $LR_T\tau$, où $\tau = T^* - T$ et R_T est le taux zéro-coupon applicable en T pour une durée $\tau = T^* - T$ (avec une fréquence de composition τ)[1]. R_T s'analyse comme le taux actuariel d'un zéro-coupon d'échéance T^*. On peut donc écrire la relation entre le prix de cette obligation et son taux actuariel y sous la forme :

$$G(y) = \frac{1}{1 + y\tau}$$

De l'équation (27.1), on déduit :

$$E_T(R_T) = R_0 - \frac{1}{2} R_0^2 \sigma_R^2 T \frac{G''(R_0)}{G'(R_0)}$$

ou encore :

$$E_T(R_T) = R_0 + \frac{R_0^2 \sigma_R^2 \tau T}{1 + R_0 \tau} \qquad (27.2)$$

1. Pour faciliter la présentation, nous considérons une base Exact/Exact dans les exemples.

où R_0 est le taux forward applicable sur la période allant de T à T^*, vu de la date 0, et σ_R la volatilité de ce taux forward.

La valeur de cet actif financier s'écrit alors :

$$P(0,T)\,L\tau\left(R_0 + \frac{R_0^2\sigma_R^2\tau T}{1+R_0\tau}\right)$$

- **Exemple 27.1**

Considérons un actif dérivé qui engendre un payoff dans trois ans égal au taux zéro-coupon 1 an à cette date (composé annuellement) multiplié par un principal de 1 000 €. Le taux zéro-coupon initial est de 10 % pour toutes les maturités, et la volatilité du taux forward pour la période d'un an débutant dans 3 ans est de 20 %. Dans ce cas, $R_0 = 0{,}1$; $\sigma_R = 0{,}2$; $T = 3$; $\tau = 1$ et $P(0{,}3) = \frac{1}{1{,}1^3} = 0{,}7513$. La valeur du produit dérivé est alors :

$$0{,}7513 \times 1000 \times 1 \times \left(0{,}1 + \frac{0{,}1^1 \times 0{,}2^2 \times 1 \times 3}{1 + 0{,}1 \times 1}\right)$$

c'est-à-dire 75,95 €. Ce prix est à comparer au prix de 75,13 € obtenu sans ajustement de convexité.

Application 2 : les taux de swap

Considérons maintenant un actif dérivé engendrant un payoff à la date T égal à un taux de swap observé à cette date. Un taux de swap est en fait le taux actuariel au pair d'une obligation. Afin de calculer l'ajustement de convexité, nous faisons l'hypothèse (approximative) que le taux d'un swap à N années à la date T est égal au taux actuariel d'une obligation à N années dont le taux de coupon est le taux de swap forward aujourd'hui. Cette approximation permet l'utilisation de l'équation (27.1).

- **Exemple 27.2**

On considère un actif financier dont le payoff dans trois ans est égal au taux de swap à trois ans sur un principal de 100 €. Les paiements du swap sont annuels et les taux zéro-coupon pour toutes les maturités sont de 12 % (en composition annuelle). La volatilité du taux de swap forward à trois ans est 22 % (déduite du prix des swaptions). On approxime le taux de swap par le taux actuariel d'une obligation qui paie un coupon de 12 %, ce qui conduit à une fonction G définie par :

$$G(y) = \frac{0{,}12}{1+y} + \frac{0{,}12}{(1+y)^2} + \frac{1{,}12}{(1+y)^3}$$

On en déduit :

$$G'(y) = -\frac{0{,}12}{(1+y)^2} - \frac{0{,}24}{(1+y)^3} - \frac{3{,}36}{(1+y)^4}$$

$$G''(y) = \frac{0{,}24}{(1+y)^3} + \frac{0{,}72}{(1+y)^4} + \frac{13{,}44}{(1+y)^5}$$

Dans ce cas, le taux actuariel forward, noté y_0, est égal à 12 %. On a alors $G'(y_0) = -2{,}4018$ et $G''(y_0) = 8{,}2546$. De l'équation (27.1) on déduit :

$$E_T(y_T) = 0{,}12 + \frac{1}{2} \times 0{,}12^2 \times 0{,}22^2 \times 3 \times \frac{8{,}2546}{2{,}4018} = 0{,}1236$$

Nous devrions bien sûr supposer un taux de swap forward de 12,36 % au lieu de 12 %, en évaluant cet actif. On aboutit à une valeur de :

$$\frac{100 \times 0{,}1236}{1{,}12^3} = 8{,}80$$

qui doit être comparée aux 8,54 € obtenus sans ajustement de convexité.

27.2 Les ajustements temporels

Il s'agit ici de préciser les modifications à apporter à l'évaluation lorsque le flux de l'actif dérivé est payé à une date T_2, mais que la variable v déterminant ce flux est observée plus tôt, en $T_1 < T_2$. Notons :

v_1 : valeur de v en T_1

F : valeur forward de v pour un contrat d'échéance T_1

$E_1(v_1)$: espérance forward-neutre (numéraire $P(t, T_1)$) de v_1

$E_2(v_1)$: espérance forward-neutre (numéraire $P(t, T_2)$) de v_1

G : prix forward d'un zéro-coupon pour la période $[T_1 ; T_2]$

R : taux forward pour la période $[T_1 ; T_2]$ (fréquence de composition m)

R_0 : valeur de R aujourd'hui

σ_F : volatilité de F

σ_G : volatilité de G

σ_R : volatilité de R

ρ : corrélation instantanée de R et F

Quand on passe de l'univers forward-neutre relatif à la date T_1 à l'univers forward-neutre relatif à la date T_2, le ratio des deux numéraires est :

$$\frac{P(0{,}T_2)}{P(0{,}T_1)}$$

L'équation (25.35) implique que le taux de croissance de v varie de :

$$\alpha_v = -\rho\sigma_G\sigma_F \tag{27.3}$$

Le signe moins est justifié par la corrélation instantanée de G et R qui vaut –1. On sait par ailleurs que :

$$G = \frac{1}{(1 + R/m)^{m(T_2 - T_1)}}$$

Par le lemme d'Itô, on déduit la relation entre les volatilités de G et R^2 :

$$\sigma_G = \frac{\sigma_R R\,(T_2 - T_1)}{1 + R/m}$$

L'équation (27.3) peut être réécrite :

$$\alpha_v = -\rho \frac{\sigma_R \sigma_F R\,(T_2 - T_1)}{1 + R/m}$$

En supposant, en première approximation, que R reste constant au niveau R_0, on peut écrire :

$$E_2\,(v_2) = E_1\,(v_1) \exp\left(-\rho \frac{\sigma_R \sigma_F R_0 T_1\,(T_2 - T_1)}{1 + R_0/m}\right) \tag{27.4}$$

Cette relation permet d'ajuster la valeur forward d'une variable quand il existe un décalage entre l'observation de la variable et le paiement du flux qui en découle.

■ **Exemple 27.3**

Un actif dérivé engendre un payoff dans six ans défini comme la valeur d'un indice dans cinq ans. La valeur forward de l'indice est 1 200 pour un contrat d'échéance 5 ans. La volatilité de cette valeur forward est 20 %. La volatilité du taux forward pour la période allant de cinq à six ans est 18 %, et la corrélation entre ces deux variables est –0,4. On suppose de plus que la courbe des taux est plate au niveau de 8 % en composition annuelle. L'application des résultats qui viennent d'être donnés au cas où v est la valeur de l'indice donne :

$$E_2\,(v_1) = E_1\,(v_1) \exp\left(0{,}4 \frac{0{,}20 \times 0{,}18 \times 0{,}08 \times 5 \times 1}{1 + 0{,}08}\right) = 1{,}00535 \times E_1\,(v_1)$$

mais les arguments développés au chapitre 25 permettent d'affirmer que $E_1(v_1)$ est égale à la valeur forward de l'indice, soit 1200. Il s'ensuit que :

$$E_2(v_1) = 1206{,}42$$

La valeur de l'actif dérivé que nous cherchons à évaluer est donc :

$$1206{,}42 \times P\,(0{,}6) = 1206{,}42 \times \frac{1}{(1{,}08)^6} = 760{,}25$$

Retour sur l'application 1

Le résultat de l'application 1, à la section 27.1, peut être obtenu par une approche alternative. En utilisant les notations d'alors, R_T était le taux d'intérêt entre T et T^*, et R_0 était le taux forward pour la même période. Dans l'univers forward-neutre relatif

2. À la place du lemme d'Itô, on peut aussi utiliser le résultat obtenu sur la duration à la section 26.2.

à T^*, la valeur espérée de R_T est R_0. En utilisant l'équation (27.4) avec $T_1 = T$; $T_2 = T^*$; $F = R$, dont on déduit $\sigma_F = \sigma_R$; $\rho = 1$; $m = 1/\tau$, on aboutit à :

$$R_0 = E_T(R_T)\exp\left(-\frac{\sigma_R^2 R_0 T\tau}{1 + R_0\tau}\right)$$

ou encore :

$$E_T(R_T) = R_0\exp\left(\frac{\sigma_R^2 R_0 T\tau}{1 + R_0\tau}\right)$$

Le développement limité de l'exponentielle à l'ordre 1 donne l'approximation :

$$E_T(R_T) = R_0 + \frac{\sigma_R^2 R_0^2 T\tau}{1 + R_0\tau}$$

qui est le résultat de l'équation (27.2).

27.3 Les quantos

Un *quanto* est un actif dérivé fondé sur deux devises distinctes. La définition du payoff fait intervenir une variable mesurée dans une devise, mais le payoff lui-même est effectué dans une autre devise. L'exemple le plus frappant est sans doute le contrat sur le Nikkei 225 coté au CME (voir encadré 5.3). La variable sous-jacente au contrat est l'indice Nikkei 225, mesuré en JPY, mais les paiements du contrat sont réalisés en USD.

Considérons un contrat de ce type fournissant un payoff mesuré en devise X à la date T. Ce payoff dépend d'une variable V mesurée en devise Y à la même date T. Nous adoptons les notations suivantes :

$F(t)$: valeur forward de V, à la date t, mesurée en devise Y, dans un contrat d'échéance T

V_T : valeur de V en date T

$P_X(t,T)$: valeur à la date t d'un zéro-coupon d'échéance T payant une unité en devise X

$P_Y(t,T)$: valeur à la date t d'un zéro-coupon d'échéance T payant une unité en devise Y

E_X : espérance dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon en devise X

E_Y : espérance dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon en devise Y

$G(t)$: taux de change forward (en nombre d'unités de Y pour une unité de X) à la date t pour un contrat forward d'échéance T

σ_F : volatilité de F

σ_G : volatilité de G

ρ : corrélation instantanée de $F(t)$ et $G(t)$

S_T : taux de change spot en date T

Nous savons que $E_Y(V_T) = F(0)$ et nous sommes en fait intéressés par $E_X(V_T)$. Quand on opère un changement de numéraire pour passer de $P_Y(t, T)$ à $P_X(t, T)$, le ratio des numéraires est donné par :

$$\frac{P_X(t,T)}{P_Y(t,T)} S_t = G(t)$$

De l'équation (25.35) on déduit que le changement de numéraire induit une variation du taux de croissance espéré de $F(t)$ égale à :

$$\alpha = \rho\sigma_G\sigma_F \tag{27.5}$$

On a donc, approximativement :

$$E_X[F(T)] = E_Y[F(T)]\, e^{\rho\sigma_F\sigma_G T}$$

Puisque $V_T = F(T)$ et $E_Y[V_T] = F(0)$, l'équation précédente se réécrit :

$$E_X[V_T] = F(0)e^{\rho\sigma_F\sigma_G T}$$

Une approximation au premier ordre de cette relation s'écrit alors :

$$E_X[V_T] = F(0)(1 + \rho\sigma_F\sigma_G T) \tag{27.6}$$

■ **Exemple 27.4**

Supposons que l'indice Nikkei soit aujourd'hui à 15 000 JPY et que les taux sans risque en USD et en JPY soient respectivement 5 % et 2 %. Le rendement en dividende (en JPY) de l'indice est égal à 1 %. La valeur forward de l'indice pour un contrat de maturité 1 an, selon l'équation (5.8), s'écrit :

$$15\ 000e^{(0{,}02-0{,}01)\times 1} = 15\ 150{,}75$$

Si la volatilité de cette valeur forward est 20 %, celle du taux de change forward 12 % et la corrélation entre les deux 0,3, la valeur espérée du Nikkei, dans un univers forward-neutre dont le numéraire est un zéro-coupon à 1 an libellé en USD, est donnée par l'équation (27.6).

$$15\ 150{,}75e^{0{,}3\times 0{,}2\times 0{,}12\times 1} = 15\ 260{,}23$$

C'est donc la valeur forward d'un contrat sur l'indice Nikkei qui engendre un paiement en USD plutôt qu'en JPY. On peut considérer de manière approximative qu'il s'agit aussi du prix futures.

L'utilisation des probabilités risque-neutre classiques

Les probabilités forward-neutre, utilisées dans l'exemple précédent, fonctionnent bien quand l'actif engendre un seul payoff à une date future connue T. Dans d'autres situations, il peut être plus pratique de recourir à la probabilité risque-neutre classique. Soit V le processus de valeur de l'actif dans la devise Y et dans l'univers risque-neutre classique ; on cherche à estimer ce même processus dans l'univers risque-neutre pour la devise X. Notons :

S : taux de change spot en unités de Y par unité de X

σ_S : volatilité du taux de change spot

σ_V : volatilité de V

ρ : corrélation instantanée de S et V

Dans ce cas, le changement de numéraire consiste à passer du compte d'épargne dans la devise Y au compte d'épargne dans la devise X (les deux sont exprimés en devise X). Comme le montre l'équation (25.16), chaque compte d'épargne a une volatilité nulle dans l'univers risque-neutre correspondant. On peut montrer, en utilisant le lemme d'Itô, que la volatilité du ratio des numéraires est égale à σ_S. Le changement de numéraire induit donc un changement du taux de croissance égal à :

$$\rho\sigma_V\sigma_S \qquad (27.7)$$

Le prix de marché du risque passe donc d'une valeur nulle à $\rho\sigma_S$. Une application de ce résultat est donnée à l'encadré 27.1.

■ Exemple 27.5

Une option américaine d'échéance 2 ans engendre un paiement donné par $\max(S - K\,;0)$ en GBP, où S est le niveau de l'indice S&P500 à la date d'exercice et K est le prix d'exercice de l'option. L'indice est actuellement à 1200 points. Les taux sans risque en GBP et USD sont respectivement de 5 % et 3 %, et la corrélation entre les variations de l'indice et celles du taux de change est de 0,2. Les volatilités de l'indice et du taux de change sont respectivement 25 % et 12 %. L'indice procure un rendement en dividende de 1,5 %.

On peut alors évaluer l'option en construisant un arbre d'évolution du S&P500, en utilisant comme numéraire le compte d'épargne en GBP (c'est-à-dire dans l'univers risque-neutre classique, vu par un investisseur britannique). Comme nous l'avons démontré précédemment, le changement de numéraire entraîne une augmentation du taux de croissance espéré égale à :

$$0{,}2 \times 0{,}25 \times 0{,}12 = 0{,}006$$

soit 0,6 %. Le taux de croissance du S&P500 dans le numéraire US est 3 − 1,5 = 1,5 %. Celui-ci passe à 2,1 % dans le numéraire britannique, et le taux sans risque est de 5 % au Royaume-Uni. Par conséquent, le S&P500 se comporte comme un titre qui procure un dividende de 5 − 2,1 = 2,9 % dans le numéraire GBP. Si l'on estime avec DerivaGem la valeur de l'option, avec 100 pas de temps et un prix d'exercice K=1200, on obtient 179,83 £.

Encadré 27.1 Le paradoxe de Siegel

Une application intéressante des résultats des deux sections précédentes concerne ce qui est usuellement appelé *paradoxe de Siegel*. Considérons deux devises X et Y ; notons S le nombre d'unités de Y par unité de X. Comme nous l'avons illustré au chapitre 5, un taux de change se comporte comme une action payant un dividende égal au taux d'intérêt étranger ; par conséquent, le processus de taux de change dans l'univers risque-neutre traditionnel s'écrit :

$$dS = (r_Y - r_X)Sdt + \sigma_S S dz$$

où r_X et r_Y sont les taux d'intérêt, supposés constants, dans les deux devises.

Le lemme d'Itô permet d'écrire la dynamique du processus $1/S$ sous la forme :

$$d(1/S) = (r_X - r_Y + \sigma_S^2)(1/S)dt + \sigma_S(1/S)dz$$

On remarque alors, et c'est le paradoxe, que le drift de ce processus n'est pas l'opposé du drift de S. Pour bien interpréter ce résultat, il faut garder à l'esprit que la première équation donne le processus de taux de change dans l'univers risque-neutre de la devise Y. La seconde donne le processus de $(1/S)$ sous le même numéraire. Mais comme $(1/S)$ est le nombre d'unités de X pour une unité de Y, obtenir une symétrie dans les drifts nécessite de changer de numéraire pour passer à l'univers risque-neutre sous le numéraire de la devise X. Dans la section précédente, nous avons montré que, quand on passe d'un numéraire dans une devise Y à un numéraire dans une devise X, le taux de croissance espéré est modifié de $\rho\sigma_V\, \sigma_S$, avec $V = 1/S$ dans notre cas. Mais la corrélation est égale à -1 et les volatilités sont identiques. Il faut donc modifier le taux de croissance espéré de la seconde équation de $-\sigma_S^2$. Par conséquent, après ce changement de numéraire, le paradoxe est résolu puisque le processus s'écrit :

$$dS = (r_X - r_Y)(1/S)dt + \sigma_S\,(1/S)dz$$

On retrouve la symétrie attendue dans les drifts.

Résumé

Quand on évalue un actif dérivé qui engendre un flux à une date future, il est naturel de supposer que les valeurs futures du sous-jacent sont égales aux valeurs forward et d'actualiser au taux pertinent entre la date d'évaluation et la date de paiement. Ce chapitre a montré que ce n'est pas toujours la méthode adéquate. Quand un payoff d'actif dérivé dépend d'un taux actuariel y observé à une date T, l'espérance du taux devrait être supposée plus élevée que le taux actuariel forward, comme indiqué dans l'équation (27.1). Ce résultat peut être adapté aux situations dans lesquelles le flux de l'actif dérivé dépend d'un taux de swap.

Quand une variable est observée à la date T mais que le paiement survient à une date ultérieure T^*, la valeur forward de la variable doit être ajustée comme indiqué dans l'équation (27.4). Quand une variable est observée dans une devise donnée mais que le paiement est réalisé dans une autre devise, la valeur forward de la variable doit aussi être ajustée. Dans ce cas, la formule d'ajustement est donnée à l'équation (27.6).

Nous utiliserons ces différents résultats au chapitre 30 pour analyser les swaps non standard.

Références complémentaires

Brotherton-Ratcliffe R. et B. Iben, « Yield Curve Applications of Swap Products », *Advanced Strategies in Financial Risk Management*, éd. E. Schwartz et C. Smith, New York Institute of Finance, 1991.

Jamshidian F., « Corralling Quantos », *RISK*, mars 1994, 71-75.

Reiner E., « Quanto Mechanics », *RISK*, mars 1992, 59-63.

Problèmes et exercices

27.1 Expliquez comment évaluer un actif qui paye 100R dans cinq ans si R est le taux un an (en composition annuelle) qui sera observé dans 4 ans. Quelle différence cela fait-il si le paiement est effectif dans quatre ans ? dans six ans ?

27.2 Expliquez si un ajustement de convexité est nécessaire quand on veut évaluer :

a. Une option qui paie chaque trimestre la différence (si elle est positive) entre le taux de swap cinq ans et le LIBOR 3 mois, appliquée à un nominal de 100 €. Le payoff survient 90 jours après l'observation des taux.

b. Un actif qui paie chaque trimestre la différence (si elle est positive) entre le taux LIBOR 3 mois et le taux des bons du Trésor à 3 mois. Le payoff survient 90 jours après l'observation des taux.

27.3 Supposez que, dans l'exemple 26.3 de la section 26.3, le payoff survienne au bout d'un an au lieu de 15 mois, c'est-à-dire dès que le taux est observé. Quelle différence cela fait-il dans l'application du modèle de Black ?

27.4 On suppose que la courbe des taux actuariels (composés annuellement) est plate au niveau de 10 %. Évaluez un actif financier qui dans 5 ans recevra le taux de swap 2 ans (composé annuellement) et paiera un taux fixe de 10 %. Les deux taux sont appliqués à un principal de 100 €. La volatilité du taux de swap est 20 % par an. Pourquoi la valeur de cet actif est-elle non nulle ?

27.5 Quelle différence y a-t-il, dans le problème précédent, si le taux de swap est observé dans cinq ans mais que les échanges de flux ont lieu dans (a)

six ans, et (b) sept ans ? Vous supposerez que la volatilité de tous les taux forward est de 20 %, que la corrélation entre le taux de swap forward entre les années 5 et 7 et le taux forward entre les années 5 et 6 est de 0,8, et celle avec le taux forward entre les années 5 et 7 est de 0,95.

27.6 Le prix d'une obligation à la date T est noté $G(y_T)$, où y_T est le taux actuariel. Le taux actuariel forward, y, est supposé suivre un mouvement brownien géométrique dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon de maturité T. Le taux de croissance espéré du taux actuariel forward est α et sa volatilité est σ_y.

a. Utilisez le lemme d'Itô pour déterminer le processus de prix forward de l'obligation en fonction de α, y, σ_y et $G(y)$.

b. Le processus de prix forward devrait être une martingale dans cet univers. Déterminez la valeur de α dans ce cas.

c. Montrez que la valeur obtenue pour α est cohérente (du moins en première approximation) avec l'équation (27.1).

27.7 La variable S est le prix d'un actif d'investissement qui procure un dividende au taux q dans la devise A. Elle suit le processus :

$$dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dz$$

dans l'univers réel. Écrivez le processus suivi par S et le prix de marché du risque correspondant, en définissant de nouvelles variables si nécessaire, dans :

a. L'univers risque-neutre traditionnel dans la devise A.

b. L'univers risque-neutre traditionnel dans la devise B.

c. L'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T dans la devise A.

d. L'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T dans la devise B.

27.8 Un call engendre un paiement $\max(S_T - K; 0)$ en JPY, où S_T est le prix en USD de l'or à la date T et K est le prix d'exercice. En supposant que les coûts de stockage de l'or sont nuls et en définissant d'autres variables si nécessaire, calculez la valeur de cette option en date 0.

27.9 Considérons un indice français d'actions qui cote 400. L'euro vaut aujourd'hui 1,1 USD. Les taux sans risque en France et aux USA sont respectivement de 6 % et 4 %. Le taux de dividende sur l'indice est de 3 %. Notons Q le nombre d'euros par USD et S la valeur de l'indice. La volatilité de S est de 20 %, celle de Q est de 6 % et la corrélation entre les deux est égale à 0,4. Utilisez DerivaGem pour évaluer un call américain sur l'indice si :

a. Cette option paie en euros l'excès de la valeur de l'indice par rapport à 400.

b. Cette option paie en USD l'excès de la valeur de l'indice par rapport à 400.

Questions complémentaires

27.10 On considère un actif dérivé payant S USD dans deux ans, S désignant la valeur de l'indice Nikkei. L'indice vaut actuellement 20 000 points (un point = un JPY). Le taux de change est aujourd'hui de 100 JPY/USD. La corrélation entre taux de change et rentabilité de l'indice est 0,3 et le rendement en dividende de l'indice est de 1 % par an. La volatilité de l'indice est de 20 % et celle du taux de change est de 12 %. Les taux sans risque sont supposés constants, égaux à 4 % aux États-Unis et 2 % au Japon.

a. Quelle est la valeur de cet actif dérivé ?

b. Notons Q le taux de change à une date donnée pendant la vie du contrat et S la valeur de l'indice à cette même date. Montrez qu'un investisseur américain peut construire un portefeuille dont la valeur change approximativement de ΔS USD quand l'indice change de ΔS JPY en investissant S USD dans l'indice et en vendant SQ JPY.

c. Vérifiez le résultat précédent en considérant une augmentation de l'indice de 50 points et une variation du taux de change de –0,3 JPY/USD.

d. Comment pourriez-vous couvrir en delta l'actif dérivé en question ?

27.11 Supposons que la courbe LIBOR (en taux continu) soit plate à 8 % ; le flux d'un actif dérivé surviendra dans quatre ans. Il sera égal à la différence entre les taux à cinq ans et à deux ans à cette date, appliquée à un principal de 100 €, les deux taux étant évalués en continu (le flux peut être positif ou négatif). Calculez la valeur de cet actif dérivé en supposant que la volatilité de tous les taux est de 25 %. Quelle différence cela fait-il si le flux survient dans cinq ans au lieu de quatre ? Vous supposerez que tous les taux sont parfaitement corrélés.

27.12 Supposons que le paiement engendré par un actif dérivé survienne dans 10 ans et soit égal au taux de swap à trois ans observé à cette date (pour un swap à paiements semestriels) sur un principal donné. Les courbes zéro-coupon en euros et en yens sont plates aux niveaux de 8 % et 3 % (en composition semestrielle). La volatilité du taux de swap forward est 18 % et celle du taux de change forward à 10 ans « yen par euro » est 12 %, alors que la corrélation entre ce taux de change et le taux d'intérêt en euros est 0,25.

a. Quelle est la valeur de cet actif dérivé si le taux de swap est appliqué à un principal de 100 millions d'euros de telle façon que le paiement soit en euros ?

b. Quelle est la valeur de cet actif dérivé si le taux de swap est appliqué à un principal de 100 millions de yens de telle façon que le paiement soit en yens ?

27.13 Un actif dérivé engendrera un payoff dans huit ans. Il sera égal à la moyenne du taux à un an observé au début des années 5 à 8 appliqué à un principal de 1 000 €. La courbe zéro-coupon est plate à 6 % en composition annuelle ; les taux ont tous une volatilité de 16 % et sont parfaitement corrélés entre eux. Quelle est la valeur de cet actif dérivé ?

Annexe

Démonstration de la formule d'ajustement de convexité

Dans cette annexe, nous démontrons la formule d'ajustement de convexité pour les taux actuariels forward. Supposons pour cela que le paiement de date T d'un actif dérivé dépende du taux actuariel d'une obligation, observé à cette date. Notons :

y_0 : taux actuariel forward de l'obligation, observé aujourd'hui, pour un contrat forward de maturité T ;

y_T : taux actuariel de l'obligation à la date T ;

B_T : prix de l'obligation en T ;

σ_y : Volatilité du taux actuariel forward de l'obligation.

On suppose que B_T s'écrit :

$$B_T = G(y_T)$$

En développant $G(y_T)$ en série de Taylor au voisinage de y_0, on obtient :

$$B_T = G(y_0) + (y_T - y_0)G'(y_0) + 0{,}5(y_T - y_0)^2 G''(y_0)$$

où G' et G'' désignent les deux premières dérivées de G. On prend alors l'espérance des deux membres de cette équation, dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T. Ceci conduit à :

$$E_T\left(B_T\right) = G(y_0) + E_T\left[(y_T - y_0)\right]G'(y_0) + 0{,}5E_T\left[(y_T - y_0)^2\right]G''(y_0)$$

où E_T est l'opérateur d'espérance dans l'univers considéré. Par définition, $G(y_0)$ est le prix forward de l'obligation. De plus, on a ici $E_T\left(B_T\right)= G(y_0)$ ce qui permet d'écrire :

$$E_T\left[(y_T - y_0)\right]G'(y_0) + 0{,}5E_T\left[(y_T - y_0)^2\right]G''(y_0) = 0$$

L'expression $E_T\left[(y_T - y_0)^2\right]$ est approximativement égale à $\sigma_y^2 y_0^2 T$. On peut donc en déduire :

$$E_T\left[y_T\right] = y_0 - \frac{1}{2}\sigma_y^2 y_0^2 T \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

Cette relation montre que pour obtenir le taux actuariel espéré dans un univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T, il faut ajouter :

$$-\frac{1}{2}\sigma_y^2 y_0^2 T \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

au taux actuariel forward de l'obligation. C'est bien le résultat de l'équation (27.1). (Voir aussi le problème 27.6 pour une approche alternative.)

Chapitre 28

Les dérivés de taux : la modélisation du taux court

Les modèles d'évaluation d'options de taux présentés jusqu'ici sont fondés sur l'hypothèse de log-normalité du sous-jacent (taux d'intérêt ou prix d'obligation) à une date future donnée. Ils sont couramment utilisés pour l'évaluation des caps, des options européennes sur obligations et des swaptions. Leur intérêt est cependant limité car ils ne fournissent aucune description de l'évolution des taux au cours du temps. Ils ne peuvent donc être employés pour évaluer des actifs dérivés comme les swaptions américaines, les obligations remboursables au gré de l'émetteur ou du souscripteur, ou encore certains produits structurés.

Au cours de ce chapitre et du suivant, nous analysons les approches alternatives qui permettent de s'affranchir de ces limites. Elles s'appuient sur la modélisation de la structure par termes des taux zéro-coupon[1]. Il s'agit de décrire l'évolution temporelle de la courbe des taux zéro-coupon. Le présent chapitre est consacré aux modèles fondés sur la spécification du processus de taux court.

28.1 Rappels

Le taux court, r, à une date t est le taux qui s'applique à cette date pour une période de longueur infinitésimale. Il est parfois appelé « taux court instantané ». C'est surtout le processus suivi par r dans l'univers risque-neutre qui importe pour l'évaluation des obligations ou des options de taux. Tous les processus présentés dans la suite, décrivant l'évolution de r, sont supposés définis dans cet univers risque-neutre.

---

1. Notez que l'utilisation d'un modèle de la structure par termes des taux évite de devoir opérer les ajustements temporels, de convexité ou les quantos décrits dans le chapitre 27.

Nous savons, par l'équation (25.19), que la valeur en date t d'un actif dérivé qui engendre un payoff f_T en date T est donnée par :

$$\hat{E}\left(e^{-\bar{r}(T-t)}f_T\right) \tag{28.1}$$

où $\bar{r}$ est la valeur moyenne de r entre t et T, et $\hat{E}$ désigne l'opérateur d'espérance dans l'univers risque-neutre.

Nous notons toujours $P(t,T)$ le prix en date t d'un zéro-coupon qui paye 1 € en date T. L'équation (28.1) implique alors :

$$P\left(t,T\right) = \hat{E}\left(e^{-\bar{r}(T-t)}\right) \tag{28.2}$$

Si $R(t,T)$ désigne le taux d'intérêt composé en continu qui prévaut en date t pour une durée $T-t$, on peut écrire :

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \tag{28.3}$$

ou encore :

$$R\left(t,T\right) = -\frac{1}{T-t}\ln\left(P\left(t,T\right)\right) \tag{28.4}$$

De manière équivalente, par l'équation (28.2), on a :

$$R\left(t,T\right) = -\frac{1}{T-t}\ln\left(\hat{E}\left(e^{-\bar{r}(T-t)}\right)\right) \tag{28.5}$$

Cette équation permet d'obtenir, à toute date t, la structure par termes des taux à partir de la valeur de r à cette date et du processus stochastique suivi par r. Plus généralement, cette équation montre que, dès que la dynamique de r est définie, celle de la courbe des taux ZC l'est aussi.

28.2 Les modèles d'équilibre

Les modèles d'équilibre s'appuient sur un ensemble d'hypothèses concernant certaines variables économiques pour en déduire le comportement du taux court, noté r. Cette démarche permet ensuite de tirer des conclusions sur le comportement des prix d'obligations et d'options.

Dans un modèle à un facteur, le taux court dépend d'une seule source d'incertitude. Le processus risque-neutre du taux court est alors décrit par un processus d'Itô de la forme :

$$dr = m(r)dt + s(r)dz$$

Le drift du processus, noté m, et l'écart-type instantané, noté s, sont des fonctions de r mais ne dépendent pas du temps. L'hypothèse d'une unique source d'incertitude est moins contraignante qu'il n'y paraît. Elle impose que tous les taux évoluent dans la même direction, mais les variations peuvent être d'amplitudes différentes. La forme de la courbe des taux ZC peut donc changer au cours du temps.

Les trois prochaines sections traitent les modèles suivants :

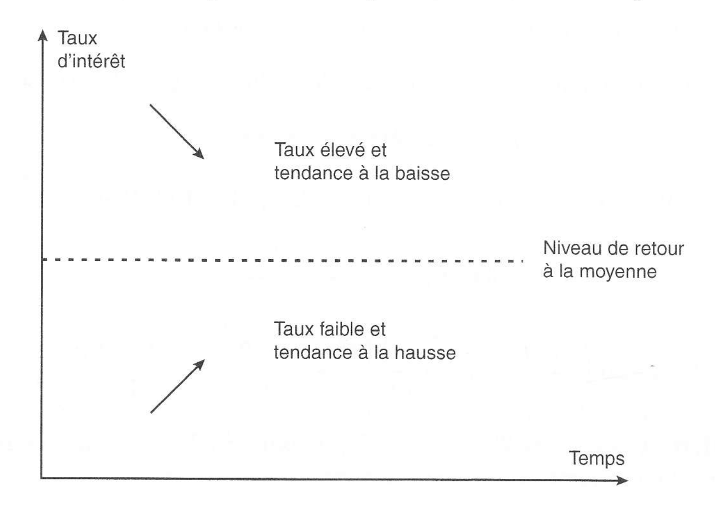
$m(r) = \mu r$, $s(r) = \sigma r$ (modèle de Rendleman et Bartter)
$m(r) = a(b - r)$, $s(r) = \sigma$ (modèle de Vasicek)
$m(r) = a(b - r)$,$s(r) = \sigma\sqrt{r}$ (modèle de Cox-Ingersoll-Ross)

Le modèle de Rendleman et Bartter

Dans ce modèle, le processus suivi par r est donc[2] :

$$dr = \mu r dt + \sigma r dz$$

où μ et σ sont des constantes. Cette formulation implique que r suit un mouvement brownien géométrique. Il s'agit du même type de processus que celui supposé pour le cours des actions au chapitre 13. Il peut aussi être représenté en temps discret par un arbre binomial comme celui qui est utilisé pour les actions au chapitre 11[3].



Graphique 28.1 : Le phénomène de retour à la moyenne.

L'hypothèse d'un taux court se comportant comme un prix d'action est un bon point de départ mais pose certains problèmes. Une différence essentielle entre un taux d'intérêt et un cours d'action est qu'un taux semble poussé, au cours du temps, à revenir vers une moyenne de long terme lorsqu'il s'en éloigne. C'est le phénomène de retour à la moyenne (*mean reversion*). Quand r est élevé, la tendance est à la baisse, alors que le drift devient positif lorsque le taux r est faible. Le graphique 28.1 illustre cette remarque. Le modèle de Rendleman et Bartter ne prend pas en compte cet effet de retour à la moyenne.

---

2. Voir R. Rendleman et B. Bartter, « The Pricing of Options on Debt Securities », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15 (mars 1980), 11-24.
3. L'utilisation de l'arbre est expliquée plus loin dans ce chapitre.

Il y a des arguments macroéconomiques en faveur de ce comportement. Quand les taux sont élevés, l'économie tend à ralentir et la demande de fonds de la part des emprunteurs est faible.

Par conséquent, les taux diminuent. Quand les taux sont peu élevés, les emprunteurs seront plus nombreux, ce qui aura tendance à faire remonter les taux.

Le modèle de Vasicek

Le processus de taux est dans ce cas :

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz$$

où a et b sont des constantes[4]. Ce modèle prend en compte le retour à la moyenne puisque le taux court est poussé vers b à un rythme défini par a. De plus, le terme stochastique σdz implique des variations de taux gaussiennes.

Vasicek montre que l'équation (28.2) permet de déduire le prix des ZC sous la forme :

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)} \tag{28.6}$$

où $r(t)$ est la valeur du taux court à la date t. De plus, A et B sont définis par :

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a\,(T-t)}}{a} \tag{28.7}$$

$$A(t,T) = \exp\left(\frac{(B(t,T) - T + t)\,(a^2b - \sigma^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4a}\right) \tag{28.8}$$

Quand $a = 0$, on a $B(t,T) = T - t$ et $A(t,T) = \exp(\sigma^2\,(T-t)^3/6)$. L'équation (28.4) implique par ailleurs que :

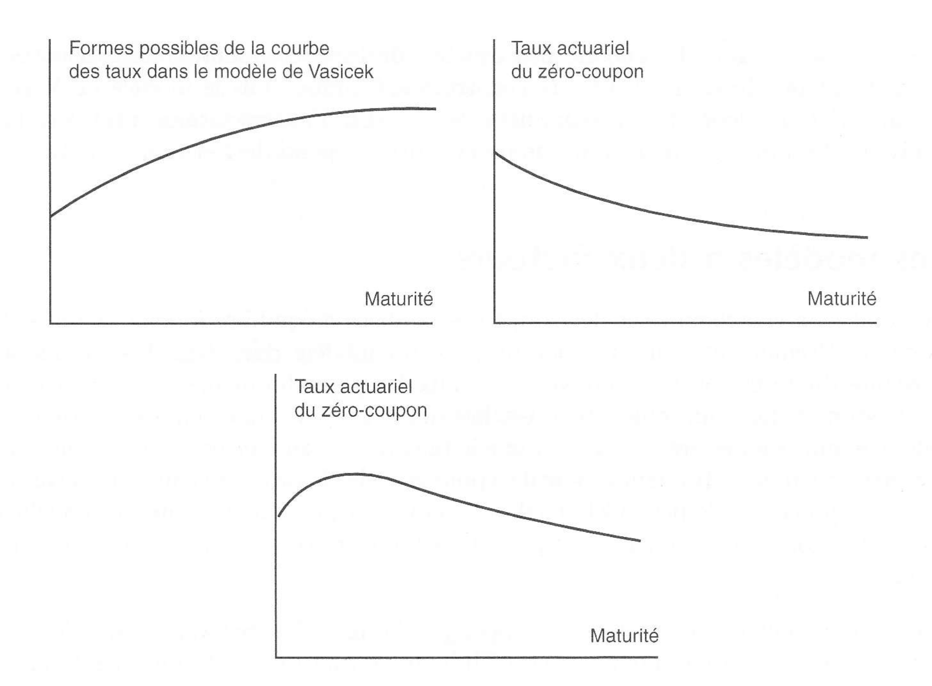
$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln(A(t,T)) + \frac{1}{T-t}B(t,T)\,r(t) \tag{28.9}$$

Cette relation montre que la courbe des taux à la date t s'écrit comme une fonction de $r(t)$ dès que les paramètres a, b, σ sont choisis. Elle peut être croissante, décroissante ou présenter une légère « bosse » (voir graphique 28.2).

Le modèle de Cox-Ingersoll et Ross

Dans le modèle de Vasicek, le taux court r peut devenir négatif car l'écart-type instantané ne dépend pas du niveau atteint par r. Cox, Ingersoll et Ross ont proposé

4. Voir O. A. Vasicek, « An Equilibrium Characterization of the Term Structure », *Journal of Financial Economics*, 5 (1977), 177-88.



Graphique 28.2 : Formes possibles de la courbe des taux dans le modèle de Vasicek.

une alternative dans laquelle le taux court est toujours positif[5]. Le processus suivi par r est donné par :

$$dr = a\,(b - r)\,dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

Le drift est identique à celui du modèle de Vasicek, mais l'écart-type instantané est proportionnel à $\sqrt{r}$. Par conséquent, lorsque le taux court diminue, l'écart-type fait de même. À la limite, lorsque ce taux est nul, il reste un drift positif égal à $abdt$, sans terme stochastique, et le taux repart vers des valeurs positives.

Cox, Ingersoll et Ross montrent que les prix des ZC ont une écriture analogue à celle du modèle de Vasicek, c'est-à-dire :

$$P(t,T) = A(t,T)\ e^{-B(t;T)r}$$

mais évidemment avec des fonctions A et B différentes.

$$B\,(t{,}T) = \frac{2\left(e^{\gamma\,(T-t)} - 1\right)}{(\gamma + a)\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right) + 2\gamma}$$

$$A\,(t{,}T) = \left(\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + a)\left(e^{\gamma\,(T-t)} - 1\right) + 2\gamma}\right)^{2ab/\sigma^2}$$

5. Voir J. C. Cox, J. E. Ingersoll et S. A. Ross, « A Theory of the Term Structure of Interest Rates », *Econometrica*, 53 (1985), 385-407.

avec $\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$. Ici encore, des courbes de taux croissantes, décroissantes ou comportant une bosse peuvent être construites. Comme dans le modèle de Vasicek, les taux $R(t, T)$ dépendent linéairement de $r(t)$. En d'autres termes, $r(t)$ détermine le niveau des taux ZC, mais la forme de la courbe dépend de t et non de $r(t)$.

Les modèles à deux facteurs

De nombreux chercheurs ont développé des modèles d'équilibre à deux facteurs. Par exemple, Brennan et Schwartz ont proposé un modèle dans lequel le retour à la moyenne du taux court se fait vers un taux long qui lui-même suit un processus stochastique[6]. Le taux long retenu est le taux actuariel d'une rente perpétuelle qui paie une unité monétaire par an. Comme le taux d'une rente de ce type est l'inverse de son prix, le lemme d'Itô peut être utilisé pour calculer le processus du taux actuariel à partir du processus de prix. Cela facilite l'analyse car, comme la rente perpétuelle est un actif négocié, son rendement espéré dans l'univers risque-neutre est le taux sans risque.

Un autre modèle à deux facteurs, proposé par Longstaff et Schwartz[7], développe un équilibre général de l'économie et en déduit une structure par termes des taux avec une volatilité stochastique. Ce modèle a l'avantage d'être relativement maniable.

28.3 Les modèles fondés sur l'absence d'arbitrage

L'inconvénient des modèles d'équilibre présentés dans les sections précédentes est qu'ils ne s'ajustent pas automatiquement à la structure par termes observée sur le marché aujourd'hui. Par un calibrage judicieux, ils permettent de retrouver la plupart des structures observées en pratique. Cependant, l'ajustement aux observations n'est pas exact et, dans certains cas, des erreurs significatives apparaissent. La plupart des traders ne sont donc pas satisfaits par ces modèles. Assez logiquement, ils disent qu'ils ne peuvent avoir confiance dans un modèle d'évaluation d'options sur obligations qui ne peut évaluer correctement l'obligation elle-même ! Une erreur de 1 % sur le prix du sous-jacent peut entraîner une erreur de 25 % sur le prix de l'option.

Un modèle fondé sur l'absence d'opportunités d'arbitrage (nous dirons « modèle sans arbitrage » dans la suite) est construit de façon à être cohérent avec la structure par termes observée aujourd'hui. En quelque sorte, la différence essentielle entre les deux approches est qu'un modèle d'équilibre donne la structure initiale comme un output, alors qu'un modèle sans arbitrage prend la structure initiale comme input.

6. Voir M. J. Brennan et E. S. Schwartz, « A Continuous-Time Approach to Pricing Bonds », *Journal of Banking and Finance*, 3 (juillet 1979), 133-55 ; M. J. Brennan et E. S. Schwartz, « An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21, n° 3 (septembre 1982), 301-29.

7. Voir F. A. Longstaff et E. S. Schwartz, « Interest Rate Volatility and the Term Structure : A Two Factor General Equilibrium Model », *Journal of Finance*, 47, n° 4, (septembre 1992), 1259-82.

Dans un modèle d'équilibre, le drift du taux court n'est pas, en général, une fonction du temps, alors qu'il l'est le plus souvent dans un modèle sans arbitrage. Cela s'explique par le fait que la structure des taux initiale détermine la trajectoire moyenne qui sera prise par le taux court dans le futur. Si la courbe des taux est fortement croissante entre deux maturités t_1 et t_2, r aura un drift positif entre ces deux dates. À l'inverse, si la courbe est fortement décroissante entre ces deux maturités, le drift de r sera négatif entre ces deux dates.

Le modèle de Ho et Lee

Le premier modèle sans arbitrage de la structure des taux a été proposé par Ho et Lee en 1986[8]. Dans leur article, le modèle est en temps discret avec une évolution binomiale de la fonction d'actualisation, c'est-à-dire la fonction qui, à une maturité T, fait correspondre $P(t,T)$.

Deux paramètres sont ici essentiels : l'écart-type du taux court et le prix de marché du risque pour ce taux. La version en temps continu de ce modèle s'écrit :

$$dr = \theta(t)\, dt + \sigma\, dz \tag{28.10}$$

avec σ constant et $\theta(t)$ une fonction du temps, calibrée pour que le modèle s'ajuste parfaitement à la courbe ZC initiale. $\theta(t)$ définit donc la variation moyenne du taux court à la date t et ne dépend pas du niveau atteint par r à cette date. Il est intéressant de constater que le prix de marché du risque n'intervient plus dans le modèle de Ho et Lee quand il s'agit d'évaluer des actifs dérivés. C'est le phénomène déjà observé dans le modèle de Black et Scholes quand l'espérance de rentabilité de l'action n'intervient pas dans l'évaluation d'une option.

$\theta(t)$ possède la formulation analytique suivante (voir problème 28.13) :

$$\theta(t) = F_t(0,t) + \sigma^2 t \tag{28.11}$$

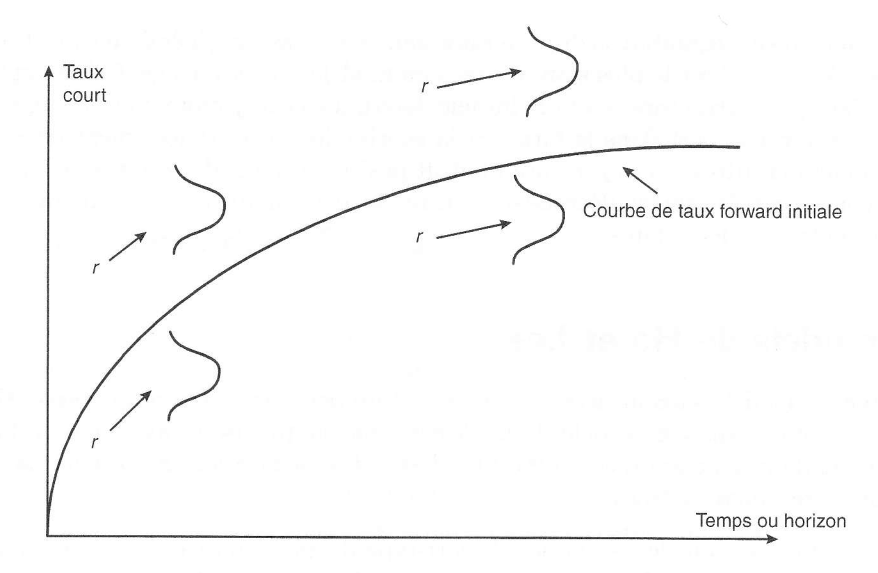
où $F(0,t)$ est le taux forward instantané pour l'horizon t, vu de la date 0. L'indice t désigne la dérivée partielle de F par rapport à t. Une approximation de $\theta(t)$ consiste à négliger $\sigma^2 t$; dans ce cas, la variation espérée du taux court à la date t est égale à la pente de la fonction de taux forward instantané à cette date, vu de la date 0.

Le modèle de Ho et Lee est illustré dans le graphique 28.3 ; la pente de la courbe des taux forward définit la variation moyenne du taux court, et un aléa normal vient s'ajouter à ce terme de tendance.

Les obligations ZC et les options sur ces obligations possèdent une expression analytique dans cette approche. Dans ces relations, l'instant 0 est la date d'aujourd'hui, alors que t et T désignent des dates futures quelconques telles que $T \geqslant t$.

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-r(t)(T-t)} \tag{28.12}$$

8. Voir T. S. Y. Ho et S. B. Lee, « Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims », *Journal of Finance*, 41 (décembre 1986), 1011-29.



Graphique 28.3 : Le modèle de Ho et Lee.

avec :

$$\ln\left(A\left(t,T\right)\right) = \ln\left(\frac{P\left(0,T\right)}{P\left(0,t\right)}\right) - \left(T-t\right)F(0,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\left(T-t\right)^2$$

Dans ces équations la date actuelle est la date 0. Les dates t et T sont des dates futures quelconques vérifiant $T \geqslant t$. Ces équations définissent donc le prix d'un zéro-coupon à une date t en fonction du taux court à cette date et des prix de zéro-coupon aujourd'hui. Ces derniers sont évalués à l'aide de la structure par termes des taux d'aujourd'hui.

Le modèle de Hull et White à un facteur

Dans un article publié en 1990, Hull et White analysent des extensions du modèle de Vasicek permettant de respecter la structure initiale[9]. Une des versions considérées, appelée modèle de Hull et White, s'appuie sur le processus :

$$dr = \left[\theta(t) - ar\right]dt + \sigma\,dz \tag{28.13}$$

qui s'écrit encore :

$$dr = a\left[\frac{\theta\left(t\right)}{a} - r\right]dt + \sigma dz$$

où a et σ sont des constantes. C'est en fait une extension du modèle de Ho et Lee incorporant un retour à la moyenne au rythme a, ou encore un modèle de Vasicek

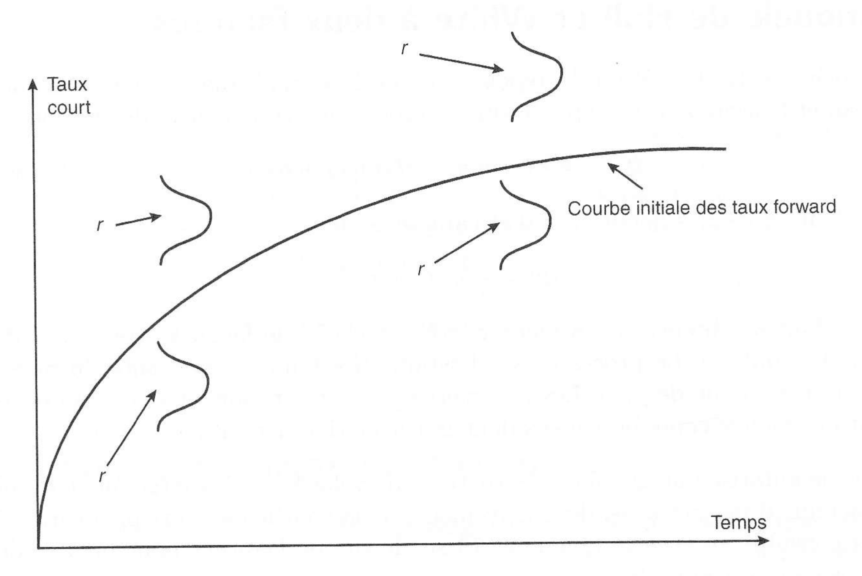
9. Voir J. Hull et A. White, « Pricing Interest Rate Derivative Securities », *Review of Financial Studies*, 3, n° 4 (1990), 573-92.

avec un niveau de retour à la moyenne variable en fonction du temps, puisque à la date t le taux court est attiré vers $\frac{\theta(t)}{a}$ au rythme a. Lorsque $a = 0$, on retrouve le modèle de Ho et Lee.

Ce modèle est aussi aisément utilisable. La fonction $\theta(t)$ se déduit de la structure initiale sous la forme (voir problème 28.14) :

$$\theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \qquad (28.14)$$

Le dernier terme de cette équation est en général petit ; si on le néglige, le drift du processus de taux court s'écrit $F_t\,(0,t) + a\,[F\,(0,t) - r]$, ce qui indique qu'en moyenne le taux court suit la pente de la courbe initiale des taux forward instantanés. Ce modèle est illustré dans le graphique 28.4.



Graphique 28.4 : Le modèle de Hull et White.

Les prix des ZC dans ce modèle sont donnés par :

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)} \qquad (28.15)$$

où A et B sont définis par :

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \qquad (28.16)$$

et

$$\ln A(t,T) = \ln \frac{P(0,T)}{P(0,t)} + B(t,T)F(0,t) - \frac{1}{4a^3}\sigma^2(e^{-aT} - e^{-at})^2(e^{2at} - 1) \qquad (28.17)$$

Les équations (28.15) à (28.17) définissent le prix d'un ZC à une date future t en fonction du taux court à cette date et de la fonction d'actualisation initiale.

Le modèle de Black et Karasinski

Les modèles de Ho et Lee et de Hull et White présentent l'inconvénient de permettre l'occurrence d'un taux court négatif. Black et Karasinski[10] ont proposé une formulation n'autorisant pas cette négativité du taux court sous la forme suivante :

$$d\ln r = [\theta(t) - a(t)\ln(r)]\,dt + \sigma(t)\,dz \tag{28.18}$$

La variable $\ln(r)$ suit la loi gaussienne suivie par le taux r lui-même dans les deux modèles précédents. La contrepartie est que ce modèle est moins maniable ; en particulier, on ne peut obtenir de formules analytiques d'évaluation des obligations en fonction de r.

Le modèle de Hull et White à deux facteurs

L'approche de Hull et White[11] repose sur une idée analogue à celle du modèle de Brennan et Schwartz. Elle s'appuie sur un processus risque-neutre de ce type :

$$df(r) = [\theta(t) + u - af(r)]\,dt + \sigma_1\,dz_1 \tag{28.19}$$

où u est un processus débutant à 0 et caractérisé par :

$$du = -bu\,dt + \sigma_2\,dz_2$$

Comme dans les modèles à un facteur, $\theta(t)$ est choisi de façon à être cohérent avec la structure initiale. Le processus stochastique u est une composante du niveau de retour à la moyenne de $f(r)$. Les paramètres a, b, σ_1, σ_2 sont des constantes, et z_1, z_2 sont des mouvements browniens dont la corrélation instantanée est ρ.

Ce modèle autorise une gamme de structures de volatilités plus large que les modèles à un facteur. Il permet aussi des mouvements de la courbe des taux plus variés. Vous pouvez consulter la note technique n° 14 sur le site de l'éditeur pour plus de détails (www.pearsoneducation.fr).

28.4 Les options sur obligations

Certains des modèles présentés dans la section précédente permettent d'obtenir une formule analytique d'évaluation des options sur obligations. Pour les modèles de Vasicek, Ho et Lee et Hull et White, le prix en date 0 d'un call d'échéance T et de prix d'exercice K, sur un ZC d'échéance s et de nominal L, s'écrit :

$$LP(0,s)N(h) - KP(0,T)N(h - \sigma_P) \tag{28.20}$$

10. Voir F. Black et P. Karasinski, « Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal », *Financial Analysts Journal*, juillet/août 1991, 52-59.

11. Voir J. Hull et A. White, « Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II : Two-Factor Models », *Journal of Derivatives*, 2, n° 2, (hiver 1994), 37-48.

avec :

$$h = \frac{1}{\sigma_P} \ln\left(\frac{LP(0,s)}{KP(0,T)}\right) + \frac{\sigma_P}{2}$$

et

$$\sigma_P = \frac{\sigma}{a}\left[1 - e^{-a(s-T)}\right]\sqrt{\frac{1-e^{-2aT}}{2a}}$$

De même, le prix du put équivalent est donné par :

$$KP(0,T)N(-h+\sigma_P) - LP(0,s)\,N(-h)$$

Dans les modèles de Vasicek et de Hull et White, on a :

$$\sigma_P = \frac{\sigma}{a}\left[1 - e^{-a(s-T)}\right]\sqrt{\frac{1-e^{-2aT}}{2a}}$$

et dans celui de Ho et Lee :

$$\sigma_P = \sigma(s-T)\sqrt{T}$$

L'équation (28.20) est équivalente à celles déduites du modèle de Black à la section 26.2. La volatilité du logarithme du prix de l'obligation en date T est σ_P et la volatilité du prix de l'obligation dans le modèle de Black est $\sigma_P/\sqrt{T}$. Comme nous l'avons détaillé à la section 26.3, un cap ou un floor peuvent être analysés comme des portefeuilles d'options sur ZC. Ils peuvent donc être évalués à l'aide de ces équations. Il existe aussi des formules d'évaluation des options sur ZC dans le cadre du modèle de Cox-Ingersoll-Ross qui a été présenté à la section 28.2. Toutefois, elles font intervenir des intégrales de lois de chi-2 décentrées.

Les options sur obligations à coupons

Dans un modèle à un facteur, tous les prix réagissent dans le même sens à une variation du taux r. En conséquence, une option sur une obligation à coupons peut être analysée comme un portefeuille d'options sur ZC (voir exemple 28.1). Cette section montre que cette technique s'applique aussi bien dans le modèle de Ho et Lee que dans celui de Hull et White. On procède de la manière suivante :

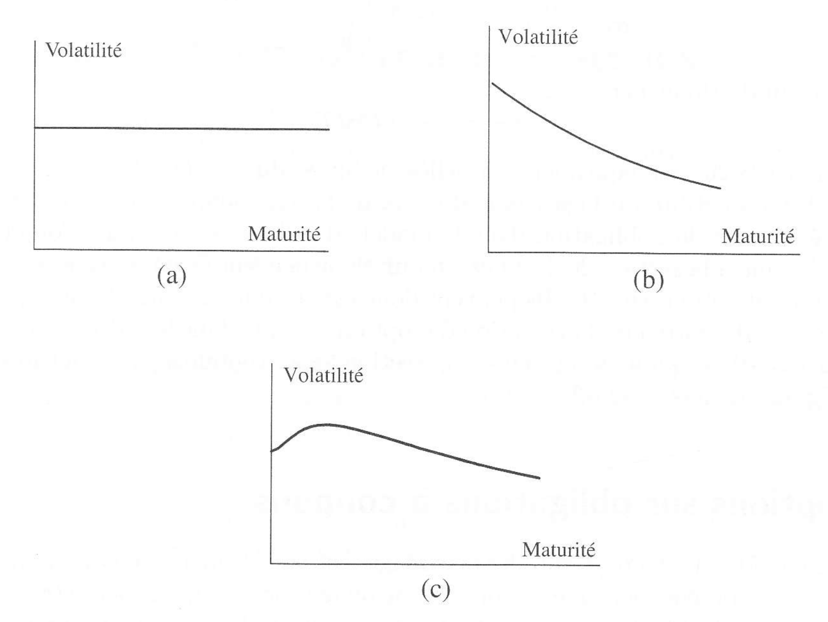
1. On calcule la valeur du taux r, notée r_K, pour laquelle le prix de l'obligation à coupons était égal au prix d'exercice.
2. On détermine les prix des options sur ZC dont les prix d'exercice sont les prix des ZC lorsque $r = r_K$.
3. Le prix de l'option sur l'obligation à coupons est alors défini comme la somme des prix des options sur ZC calculés précédemment.

Comme nous l'avons montré dans l'encadré 26.2, une swaption européenne peut être considérée comme une option sur une obligation à coupons. Ces instruments peuvent ainsi être évalués par le modèle de Ho et Lee, ou celui de Hull et White (voir la note technique n° 15 sur le site de l'éditeur : www.pearsoneducation.fr).

28.5 Les structures de volatilité

Les modèles que nous avons examinés conduisent à diverses structures de volatilité. Le graphique 28.5 montre la volatilité d'un taux forward à 3 mois en fonction de la maturité pour le modèle de Ho et Lee et ceux de Hull et White à un et deux facteurs. La structure par termes est supposée plate.

Pour le modèle de Ho et Lee, la volatilité est identique pour toutes les maturités ; pour celui de Hull et White à un facteur, la volatilité est décroissante par l'effet de retour à la moyenne. Dans le cas du modèle à deux facteurs avec des paramètres convenablement choisis, la volatilité présente une « bosse ». Cette forme est cohérente avec les volatilités implicites déduites des cotations de caps données dans la section 26.3.



Graphique 28.5 : Volatilité du taux forward à 3 mois en fonction de la maturité pour (a) le modèle de Ho et Lee, (b) le modèle de Hull et White à un facteur et (c) le modèle de Hull et White à deux facteurs (avec des paramètres choisis convenablement).

28.6 Les arbres de taux

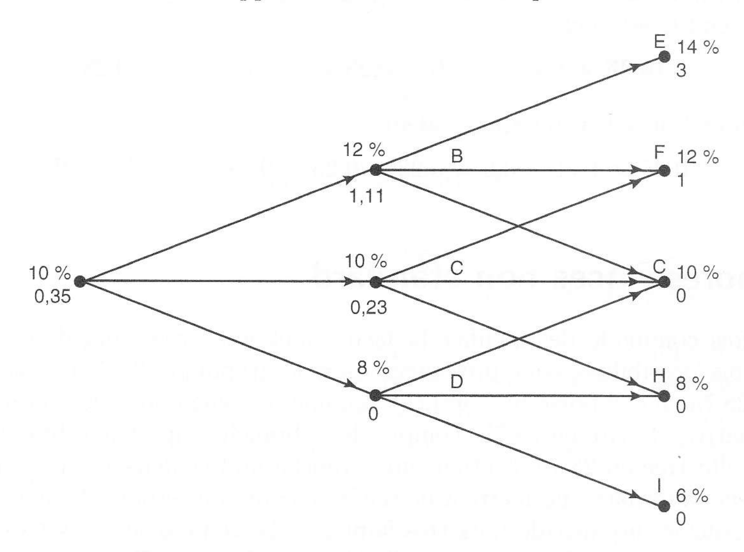
Un arbre de taux d'intérêt consiste en une représentation en temps discret du processus stochastique du taux court, de la même façon qu'un arbre de cours d'action est une représentation en temps discret du processus suivi par le cours de l'action. Si le pas de temps est noté Δt, les taux apparaissant sur l'arbre sont les taux (composés en continu) pour un horizon Δt. Dans ce cas, il est d'usage d'identifier le taux court r du modèle en temps continu et le taux zéro-coupon R d'horizon Δt. La différence essentielle entre un arbre de taux et un arbre de cours d'action se situe au niveau de

l'actualisation. Pour les cours d'action, on suppose que le taux d'actualisation est le même en chaque nœud de l'arbre, alors qu'il varie d'un nœud à l'autre dans un arbre de taux.

Il est en général plus pratique d'utiliser, pour les taux, un arbre trinomial plutôt qu'un arbre binomial. Cette description accorde un degré de liberté supplémentaire permettant de rendre compte de certaines caractéristiques des processus de taux, comme le phénomène de retour à la moyenne. Utiliser un arbre trinomial revient en fait, comme nous l'avions précisé à la section 17.8, à recourir à un schéma explicite aux différences finies.

Exemple d'utilisation d'un arbre de taux

Pour montrer comment les arbres trinomiaux peuvent servir à l'évaluation des actifs dérivés, considérons l'exemple présenté dans le graphique 28.6. C'est un arbre à deux périodes d'un an (Δt = un an). Les probabilités des états up et down sont égales à chaque nœud à 0,25, alors que l'état milieu (appelé aussi état mid) a une probabilité de 0,5. Le taux d'horizon Δt apparaît au-dessus de chaque nœud[12].



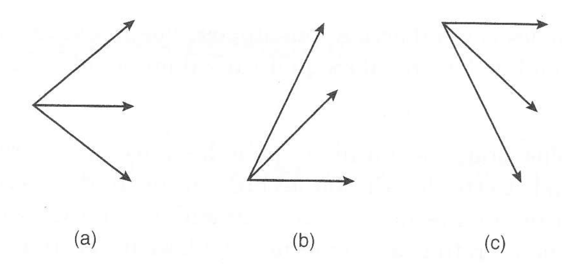
Graphique 28.6 : Exemple d'utilisation d'un arbre trinomial : le taux apparaît au-dessus de chaque nœud, et la valeur de l'actif dérivé sous chaque nœud.

Considérons un actif dérivé qui engendre un payoff égal à :

$$\max[100(R - 0,11) ; 0]$$

où R est le taux à un an (correspondant ici à Δt). La valeur de l'actif dérivé apparaît sous chaque nœud. Aux nœuds terminaux, la valeur de l'actif dérivé est égale au

12. Nous expliquons plus loin comment sont déterminés les taux et les probabilités.



Graphique 28.7 : Alternatives pour les branchements de l'arbre trinomial.

payoff. Par exemple, au nœud E, la valeur est max[100(0,14 − 0,11) ; 0] = 3. Aux dates précédentes, la valeur de l'actif dérivé est calculée par induction arrière, comme nous l'avons expliqué aux chapitres 11 et 17. Au nœud B, par exemple, le taux à un an est 12 % ; ce taux est utilisé pour évaluer l'actif au nœud B, en actualisant les valeurs aux nœuds successeurs E, F et G, c'est-à-dire :

$$(0{,}25 \times 3 + 0{,}5 \times 1 + 0{,}25 \times 0) \times e^{-0{,}12\times 1} = 1{,}11$$

Au nœud C, le taux à un an est 10 %. En procédant comme ci-dessus, la valeur de l'actif au nœud C est égale à :

$$(0{,}25 \times 1 + 0{,}5 \times 0 + 0{,}25 \times 0)\times e^{-0{,}1\times 1} = 0{,}23$$

Enfin, au nœud initial A, on a une valeur :

$$(0{,}25 \times 1{,}11 + 0{,}5 \times 0{,}23 + 0{,}25 \times 0) \times e^{-0{,}1\times 1} = 0{,}35$$

Les arborescences non standard

Il est parfois commode de modifier la façon dont les successeurs d'un nœud sont définis. Trois possibilités sont présentées dans le graphique 28.7. Le cas usuel apparaît en 28.7a ; il comporte une branche up, une branche mid et une branche down. Une alternative, décrite en 28.7b, compte deux branches up et une branche mid, et une autre, illustrée en 28.7c, contient une branche mid et deux branches down. Ces branchements alternatifs permettent de rendre compte du retour à la moyenne. 28.7b est utilisé pour les niveaux de taux très faibles, et 28.7c pour les taux très élevés. La section suivante permet de comprendre l'utilisation de ces différentes formes.

28.7 Une méthode générale de construction des arbres

Hull et White ont proposé une technique en deux étapes pour construire des arbres trinomiaux destinés à représenter une large gamme de processus de taux courts[13].

13. Voir J. Hull et A. White, « Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I : Single Factor Models », *Journal of Derivatives*, 2, n° 1 (1994), 7-16, et aussi J. Hull et A. White, « Using Hull-White Interest Rate Trees », *Journal of Derivatives*, 4, (printemps 1996), 26-36.

Dans cette section, nous montrons comment cette approche peut être adaptée au modèle de Hull et White de l'équation (28.13), et nous exposons ensuite les extensions à d'autres modèles.

Première étape

Le processus de taux court du modèle de Hull et White est caractérisé par :

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz$$

Nous supposons pour le moment que le pas de temps est constant, égal à Δt[14].

Le taux ZC d'horizon Δt, noté R, est supposé suivre le même processus.

$$dR = [\theta(t) - aR]dt + \sigma dz$$

Cette hypothèse est raisonnable quand le pas de temps tend vers zéro. La première étape consiste à construire un arbre pour la variable R^* qui débute à 0 et suit le processus :

$$dR^* = -aR^* dt + \sigma dz$$

Ce processus est symétrique par rapport à $R^* = 0$. La variable $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$ suit une loi normale, et si les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt sont ignorés, l'espérance en date t de $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$ est $-aR^*(t)\Delta t$, et la variance est égale à $\sigma^2\Delta t$.

Notons ΔR la différence, à une date donnée, entre deux taux voisins sur l'arbre. On retient :

$$\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$$

qui se révèle un bon choix pour minimiser les erreurs d'approximation.

Notre objectif est de construire, pour R^*, un arbre semblable à celui qui est présenté dans le graphique 28.8. Pour cela, il est nécessaire de choisir, pour chaque nœud, le type de successeurs parmi les possibilités proposées dans le graphique 28.7. Ces choix vont déterminer l'allure générale de l'arbre. Il faut alors calculer les probabilités affectées à chacune des branches.

Notons (i,j) un nœud où $t = i\Delta t$ et $R^* = j\Delta R$ (i est un entier naturel et j un entier relatif). Le choix du type de branchement à un nœud donné doit laisser les probabilités de transition positives sur les trois branches. Dans la plupart des cas, le choix 28.7a conviendra. Quand $a > 0$, il faut passer d'un branchement 28.7a à 28.7c lorsque j est suffisamment grand. De même, quand j est négatif et suffisamment grand en valeur absolue, il faut passer de 28.7a à 28.7b. Soit $j_{\max}(j_{\min})$ la valeur de j au-delà (en deçà) de laquelle on passe de 28.7a à 28.7c (28.7b). Hull et White montrent que les probabilités restent toujours positives si $j_{\max}$ est le plus petit entier supérieur à

14. Voir la note technique n° 16 sur le site de l'éditeur pour une discussion sur les modèles à pas de temps non constants (www.pearsoneducation.fr).

0,184/$(a\Delta t)$ et si $j_{\min} = -j_{\max}$[15]. Notons p_u, p_m et p_d les probabilités des transitions up, mid et down à chaque nœud. Les probabilités sont choisies de façon à retrouver les espérance et variance de $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$.

Si le branchement est de type 28.7a, les probabilités à un nœud (i,j) doivent vérifier :

$$p_u \Delta R - p_d \Delta R = -aj\Delta R \Delta t$$

$$p_u \Delta R^2 + p_d \Delta R^2 = \sigma^2 \Delta t + a^2 j^2 \Delta R^2 \Delta t^2$$

$$p_u + p_m + p_d = 1$$

Comme nous avons posé $\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$, la solution de ce système est donnée par :

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{a^2j^2\Delta t^2 - aj\Delta t}{2}$$

$$p_m = \frac{2}{3} - a^2j^2\Delta t^2$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{a^2j^2\Delta t^2 + aj\Delta t}{2}$$

Pour un branchement de type 28.7b, on a :

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{a^2j^2\Delta t^2 + aj\Delta t}{2}$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2j^2\Delta t^2 - 2aj\Delta t$$

$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{a^2j^2\Delta t^2 + 3aj\Delta t}{2}$$

Enfin, pour un branchement de type 28.7c, les probabilités sont définies par :

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{a^2j^2\Delta t^2 - 3aj\Delta t}{2}$$

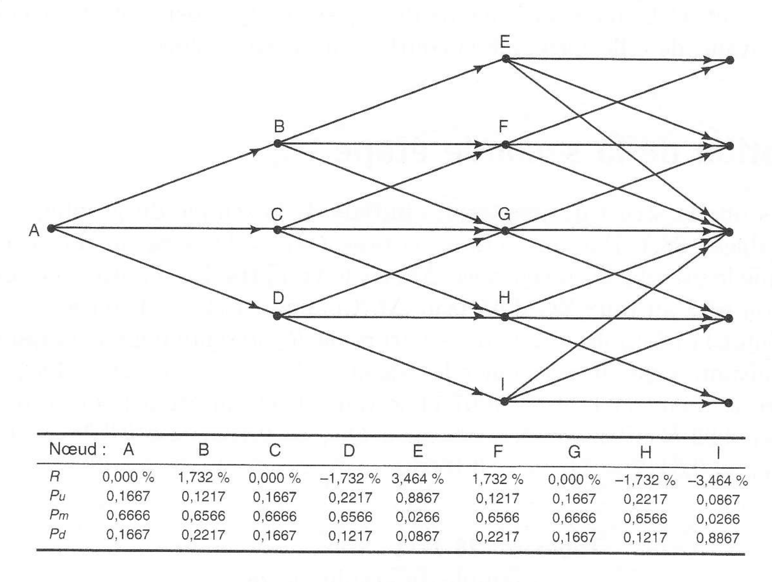
$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2j^2\Delta t^2 + 2aj\Delta t$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{a^2j^2\Delta t^2 - aj\Delta t}{2}$$

Pour illustrer cette première étape, supposons que $\sigma = 0{,}01$, $a = 0{,}1$ et $\Delta t = 1$ an. On a alors $\Delta R = 0{,}01\sqrt{3} = 0{,}0173$, $j_{\max}$ est le plus petit entier supérieur à 0,184/0,1,

15. Les probabilités sont positives pour toute valeur de $j_{\max}$ comprise entre $0{,}184/aj\Delta t$ et $0{,}816/aj\Delta t$ et pour toute valeur de $j_{\min}$ comprise entre $-0{,}816/aj\Delta t$ et $-0{,}184/aj\Delta t$. Il est plus efficace d'un point de vue numérique de modifier le type de branchement dès que la valeur de j convient.

c'est-à-dire 2, et $j_{\min} = -j_{\max}$. Le graphique 28.8 montre l'arbre obtenu, et les probabilités des branches partant de chaque nœud sont données sous l'arbre. Ces probabilités ne dépendent que de j. Par exemple, elles sont identiques aux nœuds B et F. De plus, l'arbre est symétrique ; les probabilités au nœud D sont symétriques à celles au nœud B.



Nœud :	A	B	C	D	E	F	G	H	I
R	0,000 %	1,732 %	0,000 %	–1,732 %	3,464 %	1,732 %	0,000 %	–1,732 %	–3,464 %
p_u	0,1667	0,1217	0,1667	0,2217	0,8867	0,1217	0,1667	0,2217	0,0867
p_m	0,6666	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266
p_d	0,1667	0,2217	0,1667	0,1217	0,0867	0,2217	0,1667	0,1217	0,8867

Graphique 28.8 : Arbre de R^* pour le modèle de Hull et White (première étape).

Seconde étape

Il s'agit ici de convertir l'arbre de R^* en un arbre pour R. Pour atteindre cet objectif, nous allons déplacer les nœuds de R^* de façon à respecter la structure initiale des taux d'intérêt.

Posons :

$$\alpha(t) = R(t) - R^*(t)$$

On calcule les coefficients α de manière itérative de façon à respecter exactement la structure initiale[16].

16. Comme :

$$dR = [\theta\ (t) - aR]dt + \sigma dz$$

et :

$$dR^* = -aR^* dt + \sigma dz$$

il vient alors :

$$d\alpha = [\theta\ (t) - a\alpha(t)]dt$$

Si nous ignorons la différence entre r et R, la solution de cette équation est :

$$\alpha(t) = F\,(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - e^{-at}\right)^2$$

Il s'agit de valeurs « instantanées » de α et l'arbre ainsi construit ne restitue pas exactement la structure par termes initiale.

Il suffit de définir les taux d'intérêt sur l'arbre de R, à la date $i\Delta t$, comme ceux de l'arbre de R^* auxquels on ajoute la valeur de α à la date $i\Delta t$. Les probabilités sont identiques sur les deux arbres.

Posons $\alpha_i = \alpha(i\Delta t)$ et $Q_{i,j}$ la valeur actuelle d'un actif qui paye 1 € si le nœud (i,j) est atteint, et 0 sinon. Les valeurs des α_i et des $Q_{i,j}$ peuvent être calculées par induction avant, de telle sorte que la courbe initiale soit respectée.

Illustration de la seconde étape

Supposons que la structure par termes initiale de l'exemple du graphique 28.8 soit celle du tableau 28.1. Par convention, on pose $Q_{0,0} = 1$; la valeur α_0 est choisie de manière que le prix du ZC d'échéance Δt soit le vrai prix. En d'autres termes, il suffit de poser α_0 égal au taux ZC d'horizon Δt. Comme ici $\Delta t = 1$, on a $\alpha_0 = 0{,}03824$ et cela définit la position initiale dans l'arbre de R, présenté dans le graphique 28.9. L'étape suivante consiste à calculer les valeurs $Q_{1,-1}$, $Q_{1,0}$ et $Q_{1,1}$. La probabilité d'atteindre le nœud (1,1) est 0,1667 et le taux d'actualisation pour cette première période est 3,82 %. Par conséquent, on a $Q_{1,1} = 0{,}1667 \times e^{-0{,}0382} = 0{,}1604$. De même, $Q_{1,0} = 0{,}6417$ et $Q_{1,-1} = 0{,}1604$.

Tableau 28.1 : Taux ZC pour l'exemple du graphique 28.8

Maturité	Taux (en %)
0,5	3,430
1,0	3,824
1,5	4,183
2,0	4,512
2,5	4,812
3,0	5,086

Nous pouvons maintenant déterminer α_1 de façon à retrouver le prix du zéro-coupon d'échéance $2\Delta t$. Comme $\Delta R = 0{,}01732$, le prix de ce ZC au nœud B est $e^{-(\alpha_1+0{,}01732)}$, au nœud C il est égal à $e^{-\alpha_1}$ et au nœud D à $e^{-(\alpha_1-0{,}01732)}$. Au nœud initial A, ce prix vaut donc :

$$Q_{1,1}e^{-(\alpha_1+0{,}01732)} + Q_{1,0}e^{-\alpha_1} + Q_{1,-1}e^{-(\alpha_1-0{,}01732)} \quad (28.21)$$

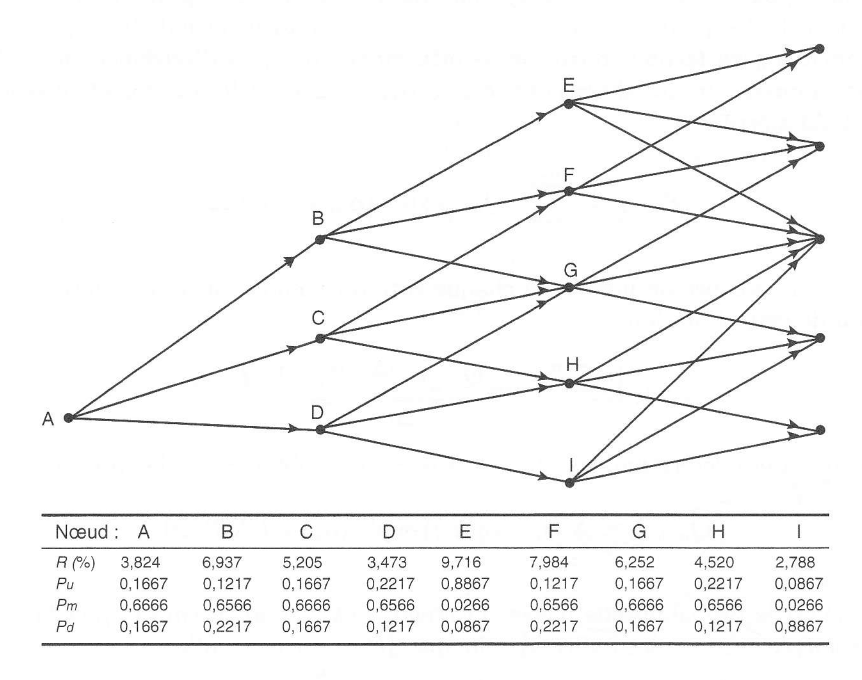
Selon la structure par termes initiale, ce prix est $e^{-0{,}04512\times 2} = 0{,}9137$. En remplaçant les $Q_{i,j}$ par leurs valeurs dans l'équation (28.21), on aboutit à :

$$0{,}1604e^{-(\alpha_1+0{,}01732)} + 0{,}6417e^{-\alpha_1} + 0{,}1604e^{-(\alpha_1-0{,}01732)} = 0{,}9137$$

et donc :

$$\alpha_1 = \ln\left[\frac{0{,}1604e^{-0{,}01732} + 0{,}6417 + 0{,}1604e^{0{,}01732}}{0{,}9137}\right] = 0{,}05205$$

Cela signifie que le taux d'intérêt au nœud central à la date Δt est 5,205 % (voir graphique 28.9).



Nœud :	A	B	C	D	E	F	G	H	I
R (%)	3,824	6,937	5,205	3,473	9,716	7,984	6,252	4,520	2,788
Pu	0,1667	0,1217	0,1667	0,2217	0,8867	0,1217	0,1667	0,2217	0,0867
Pm	0,6666	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266
Pd	0,1667	0,2217	0,1667	0,1217	0,0867	0,2217	0,1667	0,1217	0,8867

Graphique 28.9 : Arbre de R dans le modèle de Hull et White (seconde étape).

L'étape suivante consiste à déterminer $Q_{2,-2}$, $Q_{2,-1}$, $Q_{2,0}$ $Q_{2,1}$ et $Q_{2,2}$. Les calculs peuvent être simplifiés en utilisant les résultats précédents. Considérons par exemple $Q_{2,1}$; c'est la valeur d'un titre qui paie 1 € en date 2 si le nœud F est atteint, et rien sinon. Le nœud F peut être atteint à partir de B et C, et les taux à ces nœuds sont 6,937 % et 5,205 %. Les probabilités des branches B-F et C-F sont respectivement 0,6566 et 0,1667. La valeur au nœud B d'un titre qui paie 1 € au nœud F est donc $0{,}6566 \times e^{-0{,}06937}$; de même au nœud C la valeur de cet actif est $0{,}1667 \times e^{-0{,}05205}$. $Q_{2,1}$ est donc égal à $0{,}6566 \times e^{-0{,}06937}$ fois la valeur actuelle de 1 € reçu en B, plus $0{,}1667 \times e^{-0{,}05205}$ fois la valeur actuelle de 1 € reçu en C. On peut donc écrire :

$$Q_{2,1} = 0{,}6566 \times e^{-0{,}06937} \times 0{,}1604 + 0{,}1667 \times e^{-0{,}05205} \times 0{,}6417 = 0{,}1998$$

Par des calculs analogues, on trouve $Q_{2,2} = 0{,}0182$; $Q_{2,0} = 0{,}4736$; $Q_{2,-1} = 0{,}2033$ et $Q_{2,-2} = 0{,}0189$.

L'étape suivante conduit à déterminer α_2 et les coefficients $Q_{3,j}$, et ainsi de suite.

Formules générales pour les coefficients α et Q

La formulation générale est obtenue par induction avant. Supposons que les $Q_{i,j}$ aient été calculés pour $i \leqslant m$ $(m \geqslant 0)$, où m est positif ou nul. Il s'agit alors de déterminer α_m de façon à retrouver le prix du zéro-coupon d'échéance $(m+1)\Delta t$. Le taux d'intérêt au nœud (m,j) est égal à $\alpha_m + j\Delta R$, et le prix du ZC d'échéance $(m+1)\Delta t$ s'écrit :

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-(\alpha_m + j\Delta R)\Delta t] \qquad (28.22)$$

où n_m est le nombre de nœuds de chaque côté du nœud central à la date $m\Delta t$. La solution de cette équation est :

$$\alpha_m = \frac{\ln(\sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-j\Delta R\Delta t}) - \ln(P_{m+1})}{\Delta t}$$

Quand α_m a été déterminé, les $Q_{m+1,j}$ peuvent être obtenus par l'expression :

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k,j) \exp[-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t]$$

où $q(k,j)$ est la probabilité de passer du nœud (m,k) au nœud $(m+1,j)$, et la somme est considérée sur tous les indices k telle que $q(k,j)$ est non nulle.

Extension à d'autres modèles

La méthode présentée précédemment peut être étendue à des modèles plus généraux de la forme :

$$df(r) = [\theta(t) - af(r)]\,dt + \sigma\,dz \qquad (28.23)$$

On peut montrer que cette famille de modèles permet d'ajuster n'importe quelle structure initiale[17].

Comme précédemment, nous supposons que R, taux pertinent sur les périodes de longueur Δt, suit le même processus que r :

$$df(R) = [\theta(t) - af(R)]dt + \sigma dz$$

On pose tout d'abord $x = f(R)$ de façon que :

$$dx = [\theta(t) - ax]dt + \sigma dz$$

17. Tous les modèles sans arbitrage n'ont pas cette propriété. Par exemple, l'extension du modèle de Cox-Ingersoll-Ross présentée dans Cox-Ingersoll-Ross (1985) et Hull et White (1990), de la forme :
$dr = [\theta(t) - ar]\,dt + \sigma\sqrt{r}dz$
ne peut ajuster une courbe de taux dans laquelle les taux forward sont fortement décroissants. En fait, ce processus ne peut être défini de manière cohérente quand $\theta(t)$ est négatif.

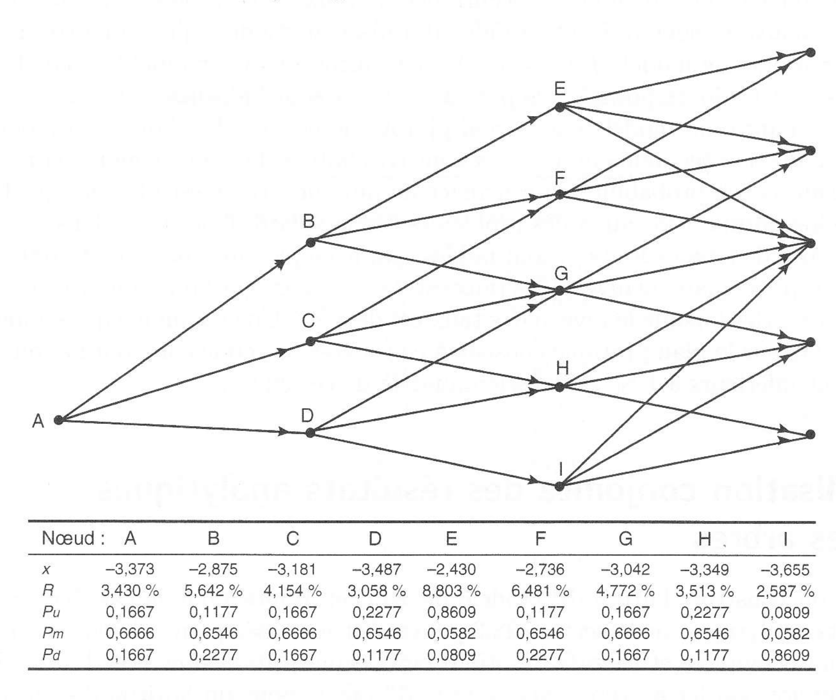
La première étape consiste à construire l'arbre de x^* qui suit le même processus que x, à ceci près que $\theta(t) = 0$ et que la valeur initiale est nulle. La procédure est identique à celle qui a été décrite précédemment pour construire l'arbre du graphique 28.8.

Comme dans le graphique 28.9, on déplace ensuite les nœuds de date $i\Delta t$ de α_i de façon à ajuster parfaitement la structure initiale. Les équations permettant de trouver α_i et les $Q_{i,j}$ diffèrent légèrement de celles obtenues dans le cas $f(R) = R$. Lorsque les $Q_{i,j}$ ont été déterminés pour $i \leqslant m$ $(m \geqslant 0)$, on calcule α_m de manière à correctement évaluer le prix du ZC d'échéance $(m + 1)\Delta t$. Soit g la fonction réciproque de f telle que le taux d'horizon Δt au j-ième nœud à la date $m\Delta t$ soit :

$$g(\alpha_m + j\Delta x)$$

Le prix d'un ZC d'échéance $(m + 1)\Delta t$ s'écrit alors :

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-g(\alpha_m + j\Delta x)\Delta t] \tag{28.24}$$



Nœud :	A	B	C	D	E	F	G	H	I
x	−3,373	−2,875	−3,181	−3,487	−2,430	−2,736	−3,042	−3,349	−3,655
R	3,430 %	5,642 %	4,154 %	3,058 %	8,803 %	6,481 %	4,772 %	3,513 %	2,587 %
P_u	0,1667	0,1177	0,1667	0,2277	0,8609	0,1177	0,1667	0,2277	0,0809
P_m	0,6666	0,6546	0,6666	0,6546	0,0582	0,6546	0,6666	0,6546	0,0582
P_d	0,1667	0,2277	0,1667	0,1177	0,0809	0,2277	0,1667	0,1177	0,8609

Graphique 28.10 : Arbre du modèle log-normal.

Cette équation est résolue par une méthode numérique du type Newton-Raphson. On a $\alpha_0 = f(R(0))$ et les autres coefficients sont obtenus par induction avant. Si α_m a été calculé, les $Q_{m+1,j}$ sont déduits de l'équation :

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k,j) \exp[-g(\alpha_m + k\Delta x)\Delta t]$$

où $q(k,j)$ est la probabilité de passer du nœud (m,k) au nœud $(m+1,j)$, et la somme est considérée sur tous les indices k telle que $q(k,j)$ est non nulle.

Le graphique 28.10 montre le résultat obtenu pour le processus

$$d\ln(r) = [\theta(t) - a\ln(r)]dt + \sigma dz$$

quand $a = 0{,}22$, $\alpha = 0{,}25$ et $\Delta t = 0{,}5$. La courbe initiale est toujours donnée par le tableau 28.1.

Le choix de $f(r)$

Les deux possibilités fondamentales sont $f(r) = r$ (modèle de Hull et White de l'équation (28.13)) et $f(r) = \ln(r)$ (modèle de Black et Karasinski de l'équation (28.18)). Dans la plupart des cas, ces deux modèles présentent des performances voisines dans l'ajustement des données de marché à partir d'instruments liquides tels que des caps ou des swaptions européennes. L'avantage du modèle $f(r) = r$ est bien sûr sa simplicité analytique ; la contrepartie est la possibilité d'avoir des taux négatifs. Le plus souvent, la probabilité d'occurrence de taux de ce type est très faible, mais certains analystes sont réticents à l'idée d'utiliser un modèle qui comporte une telle caractéristique. Le modèle $f(r) = \ln(r)$ est beaucoup moins maniable, mais les taux obtenus sont toujours positifs. De plus, les traders sont habitués à traiter des volatilités provenant d'un modèle log-normal plutôt que normal. Le choix d'un modèle est difficile dans une économie où les taux sont très faibles. Le modèle gaussien n'est pas satisfaisant car la probabilité d'occurrence de taux négatifs n'est plus négligeable. Le modèle log-normal pose aussi des problèmes car la volatilité des taux dans ce modèle est plus grande lorsque les taux sont faibles (par exemple, une volatilité de 100 % peut être appropriée quand le niveau des taux est de 1 %, alors que 20 % constitue une volatilité appropriée lorsque le niveau des taux est de 4 %). Une technique qui semble bien fonctionner sur le plan pratique consiste à considérer un modèle log-normal quand les taux sont inférieurs à 1 %, et gaussien au-delà de ce seuil[18].

L'utilisation conjointe des résultats analytiques et des arbres

Quand on construit l'arbre du modèle de Hull et White pour le cas $f(r) = r$, les résultats analytiques de la section 28.3 peuvent être utilisés pour calculer la structure par termes complète et les prix d'options européennes sur chaque nœud de l'arbre. Il faut toutefois garder à l'esprit que le taux d'intérêt, pour un horizon distant de Δt, est R et non le taux instantané r. Des équations 28.15 à 28.17 on peut déduire (voir problème 28.21) que :

$$P(t,T) = \hat{A}(t,T)e^{-\hat{B}(t,T)R} \tag{28.25}$$

avec :

$$\ln \hat{A}(t,T) = \ln \frac{P(0,T)}{P(0,t)} - \frac{B(t,T)}{B(t,t+\Delta t)} \ln \frac{P(0,t+\Delta t)}{P(0,t)}$$

18. Voir J. Hull et A. White, « Taking Rates to the Limits », *RISK*, décembre 1997, 168-9.

$$-\frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t,T)[B(t,T) - B(t,t + \Delta t)] \quad (28.26)$$

et :

$$\hat{B}(t,T) = \frac{B(t,T)}{B(t,t + \Delta t)}\Delta t \quad (28.27)$$

Dans le modèle de Ho et Lee on remplace $\hat{B}(t,T)$ par $T - t$ dans ces équations. On devrait alors calculer les prix d'obligations à partir de l'équation (28.25) plutôt qu'à partir de l'équation (28.15).

■ **Exemple 28.1**

On utilise les taux ZC du tableau 28.2 pour illustrer l'utilisation des résultats analytiques. Pour les maturités intermédiaires, une interpolation linéaire est retenue. Nous cherchons à évaluer une option européenne de vente à 3 ans (1 095 jours) sur une obligation de maturité 9 ans (3 285 jours) et de nominal 100 €. Les taux sont supposés suivre le modèle de Hull et White dans la version $f(r) = r$. Le prix d'exercice est 63 €, $a = 0{,}1$ et $\sigma = 0{,}01$.

Tableau 28.2 : Taux zéro-coupon composés en continu

Maturité	Jours	Taux (en %)
3 jours	3	5,01772
1 mois	31	4,98284
2 mois	62	4,97234
3 mois	94	4,96157
6 mois	185	4,99058
1 an	367	5,09389
2 ans	731	5,79733
3 ans	1 096	6,30595
4 ans	1 461	6,73464
5 ans	1 826	6,94816
6 ans	2 194	7,08807
7 ans	2 558	7,27527
8 ans	2 922	7,30852
9 ans	3 287	7,39790
10 ans	3 653	7,49015

Nous avons construit un arbre à trois ans et calculé les prix de ZC aux nœuds terminaux par les formules données précédemment. La comparaison entre les deux méthodes est donnée dans le tableau 28.3. On constate que pour un pas de temps suffisamment faible, les résultats sont identiques.

Cet exemple est un bon test de robustesse de la méthode car le gradient de la courbe ZC change brutalement, juste après la date d'échéance de l'option. Des erreurs minimes dans la construction de l'arbre sont susceptibles de provoquer

Tableau 28.3 : Valeur d'une option à 3 ans sur un ZC à 9 ans avec $K = 63$, $a = 0{,}1$ et $\sigma = 0{,}01$. La courbe ZC est donnée par le tableau 23.2

Nombre de pas	Valeur arbre	Valeur analytique
10	1,8658	1,8093
30	1,8234	1,8093
50	1,8193	1,8093
100	1,8144	1,8093
200	1,8097	1,8093
500	1,8093	1,8093

des erreurs importantes sur la valeur des options (cet exemple correspond à l'application G de la partie « Application Builder » du logiciel DerivaGem).

Arbre pour l'évaluation des options américaines sur obligations

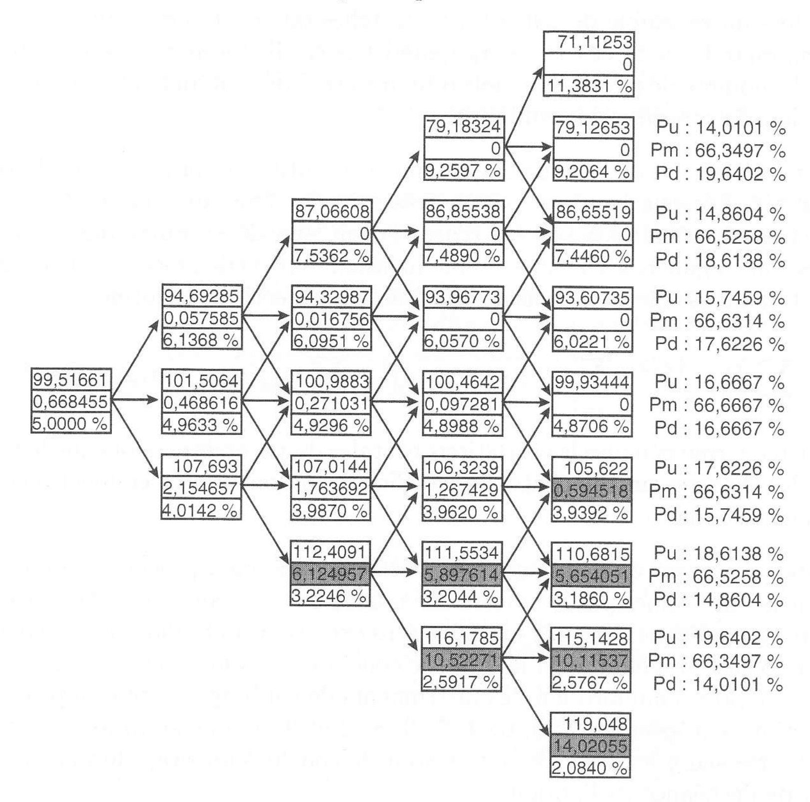
Le logiciel DerivaGem accompagnant cet ouvrage propose les modèles gaussien et log-normal aussi bien que le modèle de Black pour l'évaluation des options européennes, des caps/floors et des swaptions européennes. De plus, les options américaines sur obligations peuvent aussi être traitées. Le graphique 28.11 montre l'arbre fourni par le logiciel pour une option d'achat américaine à 1,5 an sur une obligation à 10 ans avec 4 pas de temps et un modèle log-normal. Les paramètres retenus sont $a = 5$ % et $\sigma = 20$ %. Le taux de coupon est 5 %, les coupons sont semestriels et le nominal de l'obligation est 100. La courbe initiale des taux ZC est supposée plate au niveau de 5 % et le prix d'exercice de l'option est 105.

Comme nous l'avons mentionné à la section 26.2, le prix d'exercice peut être exprimé coupon couru ou pied de coupon. Dans cet exemple, il s'agit d'un prix pied de coupon. Par contre, les prix d'obligation apparaissant sur l'arbre sont des prix coupon couru. Le montant de coupon couru apparaît sous l'arbre. Le prix d'exercice coupon couru se déduit donc en ajoutant au prix pied de coupon le montant de ce coupon couru. Le paiement de l'option est donc la différence entre le prix de l'obligation et le prix d'exercice, ces deux prix étant exprimés coupon couru.

L'arbre donne un prix de l'option de 0,668 avec 4 pas de temps. Avec 100 pas, le prix obtenu est 0,699. Concernant le graphique 28.11, deux points méritent d'être notés :

1. Le logiciel mesure la durée de vie de l'option en jours ; par conséquent, lorsque la durée est 1,5 an, ce sont en fait un an et 183 jours qui sont considérés, soit 1,5014 année.

2. Le prix d'une obligation 10 ans ne peut être évalué analytiquement dans le modèle log-normal. Il est calculé numériquement par induction arrière sur un arbre beaucoup plus important que celui qui est présenté ici.



Graphique 28.11 : Arbre d'évaluation d'une option américaine sur obligation (tel qu'il est construit par DerivaGem).

28.8 Le calibrage du modèle

Nous avons jusqu'à présent supposé que a et σ, constants ou non, étaient connus. Nous étudions maintenant leur détermination, qu'on appelle calibrage du modèle.

Les paramètres de volatilité sont estimés à partir des données de marché sur des options liquides (voir les évaluations des brokers sur les caps et les swaptions aux tableaux 26.1 et 26.2). La première étape consiste à chercher des paramètres qui minimisent :

$$\sum_{i=1}^{n}(U_i - V_i)^2$$

où U_i est le prix de marché de l'instrument i et V_i le prix calculé par le modèle. On suppose ici que n actifs liquides sont utilisés pour le calibrage.

Quand a et σ sont constants, il n'y a que deux paramètres à estimer. Lorsque, par exemple, on veut garder a constant et faire dépendre σ du temps, une façon pratique d'estimer cette fonction consiste à la modéliser comme une fonction en escalier. On choisit alors un ensemble de dates $t_1, \ldots, t_n$ telles que $\sigma(t) = \sigma_i$ pour $t_i < t \leqslant t_{i+1}$, $\sigma(t) = \sigma_0$ quand $t \leqslant t_1$ et $\sigma(t) = \sigma_n$ quand $t > t_n$. Il y a alors $n + 2$ paramètres à estimer. Le nombre de paramètres doit toujours être inférieur au nombre d'instruments entrant dans la procédure de calibrage.

Pour la minimisation de l'erreur d'ajustement, on utilise la procédure de Levenberg-Marquardt[19]. Lorsque les deux paramètres sont des fonctions du temps, on ajoute une fonction de pénalité à l'erreur d'ajustement afin de s'assurer que les fonctions obtenues sont régulières. Dans l'exemple mentionné précédemment, dans lequel σ est une fonction en escalier, on choisira une fonction objectif de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n}(U_i - V_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} w_{1,i}(\sigma_i - \sigma_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^{n-1} w_{2,i}(\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1} - 2\sigma_i)^2$$

Le deuxième terme pénalise les variations brutales du paramètre, alors que le troisième pénalise les changements de pente. Les coefficients w sont choisis en fonction du degré de régularité souhaité.

Les actifs qui servent au calibrage doivent être choisis aussi proches que possible des actifs qui seront évalués par le modèle. En admettant que vous souhaitiez évaluer une swaption bermudienne à 10 ans qui peut être exercée à toute date de paiement entre les années 5 et 9, donnant ainsi le droit de conclure un swap dont l'échéance est dans 10 ans à compter d'aujourd'hui, les instruments de calibrage les plus appropriés sont des swaptions européennes 5×5, 6×4, 7×3, 8×2 et 9×1 (une swaption $n \times m$ est une option d'échéance n années donnant le droit de conclure un swap durant m années à compter de l'échéance de l'option).

Considérer que a et/ou σ dépendent du temps a pour avantage de permettre un meilleur ajustement des prix des actifs liquides échangés sur le marché. La contrepartie est que la structure de volatilité n'est plus stationnaire. La volatilité future est donc susceptible d'être très différente de la volatilité actuelle[20].

Une approche alternative consiste à considérer tous les instruments de calibrage possibles de façon à déterminer les meilleures valeurs (constantes) de a et σ. a est ensuite maintenu à la valeur ainsi trouvée. On procède ensuite comme dans le modèle de Black et Scholes. Chaque option permet de déduire une volatilité implicite σ. Le modèle peut donc être utilisé pour convertir des données comme celles des tableaux 26.1 et 26.2 en paramètres σ[21].

19. Pour une description détaillée de cette méthode, voir W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky et W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1988.

20. Pour la mise en œuvre de cette démarche, voir la note technique n° 16 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr).

21. Les paramètres σ obtenus dans un modèle de la structure par termes des taux ne sont pas les volatilités implicites calculées dans le modèle de Black (tableaux 26.1 et 26.2). Les volatilités de

28.9 La couverture dans un modèle à un facteur

À la section 26.6, nous avons présenté quelques éléments sur la couverture d'un portefeuille de dérivés de taux. Ils peuvent servir dans le cadre des modèles développés dans ce chapitre. Le calcul des coefficients delta, gamma et vega peut être réalisé en introduisant de légères modifications dans la courbe des taux ZC ou dans la structure de volatilité, et en recalculant la valeur du portefeuille après l'introduction de ces perturbations.

Il est important de remarquer que, même si nous supposons l'existence d'une seule source d'incertitude dans l'évaluation, nous ne supposons pas l'existence d'un seul facteur dans la couverture. Par exemple, des deltas peuvent être calculés en envisageant des perturbations non autorisées par le modèle ; c'est une pratique courante chez les traders[22]. De manière schématique, on peut dire que les modèles à un facteur, maniés avec précaution, donnent des résultats raisonnables en ce qui concerne l'évaluation, mais qu'une bonne stratégie de couverture nécessite la prise en compte de plusieurs facteurs.

Résumé

Les modèles traditionnels de la structure par termes des taux utilisés en finance sont des modèles d'équilibre. Ils sont utiles à la compréhension des relations liant diverses variables économiques, mais la structure par termes initiale intervient comme un output de ces modèles plutôt que comme un input. Pour l'évaluation des actifs dérivés, il est important que le modèle retenu soit cohérent avec cette structure initiale observée sur les données de marché. Les modèles sans arbitrage sont conçus pour avoir cette propriété. Ils considèrent la structure initiale comme une donnée et définissent son évolution dans le temps.

Ce chapitre a décrit plusieurs modèles d'évolution du taux court à un facteur. Ils sont très robustes et peuvent être utilisés avec n'importe quelle structure initiale. Le plus simple est le modèle de Ho et Lee. Son avantage essentiel réside dans sa facilité d'utilisation. En contrepartie, tous les taux présentent la même variabilité à chaque date. Le modèle de Hull et White est une extension du modèle de Ho et Lee intégrant le phénomène de retour à la moyenne. Tout en restant très maniable, il autorise une plus large gamme de structures de volatilité. Les modèles log-normaux à un facteur évitent l'occurrence de taux négatifs, mais ne sont par contre pas très simples à mettre en œuvre.

Black sont en bijection avec les prix de marché. Ces prix sont ensuite utilisés dans le modèle de structure par termes pour estimer les σ par une procédure itérative.

22. L'exemple le plus simple d'une pratique de cette nature est le calcul du vega dans un modèle de Black-Scholes qui suppose la volatilité constante et l'utilisation de ce coefficient pour couvrir des positions contre les variations de volatilité.

Références complémentaires

Les modèles d'équilibre de la structure par termes

COX J. C., J. E. INGERSOLL et S. A. ROSS, « A Theory of the Term Structure of Interest Rates », *Econometrica*, 53 (1985), 385-407.

LONGSTAFF F. A. et E. S. SCHWARTZ, « Interest Rate Volatility and the Term Structure : A Two Factor General Equilibrium Model », *Journal of Finance*, 47, n° 4, (septembre 1992), 1259-82.

VASICEK O. A., « An Equilibrium Characterization of the Term Structure », *Journal of Financial Economics*, 5 (1977), 177-88.

Les modèles sans arbitrage

BLACK F. et P. KARASINSKI, « Bond and Option Pricing when Short Rates Are Lognormal », *Financial Analysts Journal*, juillet/août 1991, 52-59.

HO T. S. Y. et S. B. LEE, « Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims », *Journal of Finance*, 41 (décembre 1986), 1011-29.

HULL J. et A. WHITE, « Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices », *Advances in Futures and Options Research*, 6 (1993), 1-13.

HULL J. et A. WHITE, « Pricing Interest Rate Derivative Securities », *Review of Financial Studies*, 3, n° 4 (1990), 573-92.

HULL J. et A. WHITE, « Using Hull-White Interest Rate Trees », *Journal of Derivatives*, printemps 1996, 26-36.

KIJIMA M. et I. NAGAYAMA, « Efficient Numerical Procedures for the Hull-White Extended Vasicek Model », *Journal of Financial Engineering*, 3 (septembre/décembre 1994), 275-92.

KIJIMA M. et I. NAGAYAMA, « A Numerical Procedure for the General One-Factor Interest Rate Model », *Journal of Financial Engineering*, 5 (décembre 1996), 317-37.

LI A., P. RITCHKEN et L. SANKARASUBRAMANIAN, « Lattice Models for Pricing American Interest Rate Claims », *Journal of Finance*, 50, n° 2, juin 1995, 719-37.

REBONATO R., *Interest Rate Option Models*, Wiley, Chichester, 1996.

Problèmes et exercices

28.1 Quelle est la différence entre un modèle d'équilibre et un modèle sans arbitrage ?

28.2 Supposons que le taux court soit aujourd'hui à 4 % avec un écart-type de 1 % par an. Que devient la volatilité quand le taux passe à 8 % dans (a) le modèle de Vasicek, (b) le modèle de Rendleman et Bartter, et (c) le modèle de Cox-Ingersoll et Ross ?

28.3 Si un prix d'action suivait un processus avec retour à la moyenne ou, plus généralement, dépendant du chemin suivi, le marché ne serait pas efficient.

Pourquoi n'est-ce pas le cas quand c'est le taux court qui suit un tel processus ?

28.4 Quelle est la différence entre un modèle à un facteur et un modèle à deux facteurs ?

28.5 L'approche exposée à la section 28.4, consistant à exprimer une option sur une obligation à coupons comme un portefeuille d'options sur obligations ZC, peut-elle être utilisée dans un modèle à deux facteurs ? Justifiez votre réponse.

28.6 Supposons que $a = 0{,}1$ et $b = 0{,}1$ dans les modèles de Vasicek et de Cox-Ingersoll-Ross. Dans les deux cas, le taux court initial est 10 % et l'écart-type initial dans un intervalle Δt est $0{,}02\sqrt{\Delta t}$. Comparez les prix donnés par ces deux modèles pour un ZC de maturité 10 ans.

28.7 Supposons que $a = 0{,}1$ et $b = 0{,}08$ dans le modèle de Vasicek avec un taux initial à 5 %. Calculez le prix d'un call européen à 1 an, de prix d'exercice 87 €, sur une obligation ZC de nominal 100 € et d'échéance 3 ans.

28.8 Refaites l'exercice 28.7 avec un put européen de mêmes caractéristiques. Quelle est la relation de parité Call-Put liant les prix des options européennes ? Montrez qu'elle est satisfaite dans ce cas.

28.9 Supposons que $a = 0{,}05$, $b = 0{,}08$ et $\sigma = 0{,}015$ dans le modèle de Vasicek avec un taux initial à 6 %. Calculez le prix d'un call européen à 2,1 ans sur une obligation de maturité 3 ans. Le taux de coupon est 5 % et les coupons semestriels. Le nominal de l'obligation est 100 € alors que le prix d'exercice (coupon couru) de l'option est 99 €.

28.10 Utilisez la réponse du problème 28.9 et la relation de parité Call-Put pour calculer le prix du put de mêmes caractéristiques que le call du problème 28.9.

28.11 Dans le modèle de Hull et White, on suppose que $a = 0{,}08$ et $\sigma = 0{,}01$. Calculez le prix d'un call européen à 1 an, de prix d'exercice 68 €, sur un ZC de maturité 5 ans, de nominal 100 €, sachant que la structure initiale est plate à 10 %.

28.12 Dans le modèle de Hull et White, on suppose que $a = 0{,}05$ et $\sigma = 0{,}015$. Calculez le prix d'un call européen à 2,1 ans, de prix d'exercice coupon couru égal à 99 €, sur une obligation de maturité 3 ans, de nominal 100 €, de taux de coupon 5 %, le coupon étant payé semestriellement. La structure initiale est plate à 6 % avec une composition semestrielle des intérêts.

28.13 Utilisez un changement de numéraire pour montrer que la relation entre le taux futures et le taux forward pour le modèle de Ho et Lee correspond à celle décrite dans la section 6.4. Utilisez cette relation pour vérifier l'expression de $\theta(t)$ donnée par le modèle de Ho et Lee dans l'équation (28.11). (Indication : le prix futures est une martingale quand le prix de marché du risque est nul. Le prix forward est une martingale quand le numéraire est un zéro-coupon dont la maturité est celle du contrat forward.)

28.14 Utilisez la démarche de l'exercice 28.13 pour établir la relation entre le taux futures et le taux forward dans le modèle de Hull et White. Utilisez cette

relation pour vérifier l'expression de $\theta(t)$ donnée par le modèle de Ho et Lee dans l'équation (28.14).

28.15 Supposons que $a = 0{,}05$ et $\sigma = 0{,}015$ avec une structure par termes plate à 10 %. Construisez un arbre trinomial à deux périodes d'un an pour le modèle de Hull et White.

28.16 Calculez le prix d'un ZC à deux ans à partir de l'arbre du graphique 28.6.

28.17 Calculez le prix d'un ZC à deux ans à partir de l'arbre du graphique 28.9 et vérifiez qu'il est cohérent avec la structure initiale.

28.18 Calculez le prix d'un ZC à 18 mois à partir de l'arbre du graphique 28.10 et vérifiez qu'il est cohérent avec la structure initiale.

28.19 Que suppose le calibrage d'un modèle de la structure des taux à un facteur ?

28.20 Utilisez DerivaGem pour évaluer des swaptions européennes 1×4, 2×3, 3×2 et 4×1 donnant le droit de recevoir le taux fixe et de payer le taux variable. Supposez que les taux ZC de 1 à 5 ans de maturité sont respectivement 6 %, 5,5 %, 6 % ; 6,5 % et 7 %. Le swap engendre des paiements semestriels, et le taux fixe est 6 % en composition semestrielle. Utilisez le modèle de Hull et White avec $a = 0{,}03$ et $\sigma = 0{,}01$. Calculez, pour chaque option, la volatilité implicite du modèle de Black.

28.21 Démontrez les équations (28.25), (28.26) et (28.27).

Questions complémentaires

28.22 Construisez un arbre trinomial du modèle de Ho et Lee avec $\sigma = 0{,}02$. Supposez que les taux ZC initiaux pour les maturités 0,5, 1 et 1,5 an sont 7,5 %, 8 % et 8,5 %. Utilisez deux périodes de six mois. Calculez le prix d'un ZC de nominal 100 € de durée de vie résiduelle 6 mois à la fin de l'arbre. Utilisez l'arbre pour évaluer un put européen à un an, de prix d'exercice 95 € sur cette obligation. Comparez votre résultat avec celui donné analytiquement par DerivaGem.

28.23 Un trader cherche à calculer le prix d'un call américain à un an sur une obligation de nominal 100 € et de maturité 5 ans. Cette obligation a un taux de coupon de 6 %, avec un coupon semestriel. Le prix d'exercice pied de coupon de l'option est 100 €. Les taux ZC (composés en continu) pour les maturités 6 mois et 1 à 5 ans sont respectivement 4,5 %, 5 %, 5,5 %, 5,8 %, 6,1 % et 6,3 %. L'estimation du taux de retour à la moyenne est de 5 % dans le modèle gaussien comme dans le modèle log-normal.

Une option d'achat de prix d'exercice (coupon couru) 100 € est très liquide sur le marché et cote 0,5 €. Le trader décide d'employer cette option pour calibrer le modèle. Utilisez DerivaGem avec 10 pas de temps pour répondre aux questions suivantes.

a. Dans l'hypothèse d'un modèle gaussien, quel est le paramètre σ implicite dans le prix de l'option ?

b. Utilisez σ pour calculer le prix de l'option si celle-ci est américaine.

c. Refaites (a) et (b) dans le cas log-normal. Montrez que le choix du modèle n'entraîne pas d'écarts importants tant que le modèle est calibré avec l'option européenne.

d. À partir de l'arbre du modèle gaussien, calculez la probabilité d'occurrence de taux négatifs.

e. À partir de l'arbre du modèle log-normal, vérifiez que le prix de l'option est correct au nœud (9,–1) selon la notation de la section 28.7.

28.24 Utilisez DerivaGem pour évaluer des swaptions européennes 1×4, 2×3, 3×2 et 4×1 donnant le droit de recevoir le taux variable et de payer le taux fixe. Supposez que les taux ZC de 1 à 5 ans de maturité sont respectivement 3 %, 3,5 %, 3,8 %, 4 % et 4,1 %. Le swap engendre des paiements semestriels et le taux fixe est 4 % en composition semestrielle. Utilisez le modèle log-normal avec $a = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}15$ et 50 pas de temps. Calculez, pour chaque option, la volatilité implicite du modèle de Black.

28.25 Vérifiez que vous obtenez bien le graphique 28.11 avec DerivaGem pour l'exemple considéré. Utilisez le logiciel pour évaluer une option américaine sur obligation dans les modèles gaussien et log-normal pour des prix d'exercice 95, 100 et 105. Pour le modèle normal, supposez que $a = 0{,}05$ et $\sigma = 0{,}01$. Commentez les résultats obtenus dans le contexte de distributions de probabilité à queues épaisses évoquées au chapitre 16.

28.26 Modifiez l'exemple G du DerivaGem Application Builder pour tester la convergence, sur l'arbre trinomial, du prix d'un call à 2 ans sur une obligation à 5 ans de nominal 100 €. Le prix d'exercice, pied de coupon, de l'option est 100, le taux de coupon 7 % avec des coupons semestriels. La courbe des taux ZC est celle du tableau 28.2.

Comparez les résultats obtenus pour les cas suivants :

a. Option européenne, modèle gaussien avec $\sigma = 0{,}01$ et $a = 0{,}05$.

b. Option européenne, modèle log-normal avec $\sigma = 0{,}15$ et $a = 0{,}05$.

c. Option américaine, modèle gaussien avec $\sigma = 0{,}01$ et $a = 0{,}05$.

d. Option américaine, modèle log-normal avec $\sigma = 0{,}15$ et $a = 0{,}05$.

Chapitre 29

Les dérivés de taux : les modèles HJM et LMM

Les modèles de taux présentés au chapitre 28 sont utilisés pour évaluer des instruments financiers trop complexes pour entrer dans le cadre d'hypothèses des modèles du chapitre 26. Ils sont néanmoins faciles à mettre en œuvre et, s'ils sont exploités de manière adéquate, assurent que l'évaluation de la plupart des instruments non standard sera compatible avec celle des contrats activement échangés, comme les caps de taux, les swaptions et les options européennes sur obligation. Ces modèles présentent cependant deux limites :

1. La plupart n'intègrent qu'un seul facteur de risque.
2. Ils ne laissent qu'une marge de manœuvre limitée concernant la structure de volatilité.

En rendant dépendants du temps les paramètres a et σ, un analyste peut calibrer les modèles de sorte qu'ils s'ajustent aux volatilités observées sur les marchés, mais, dans ce cas, la structure par termes des volatilités n'est plus stationnaire. La structure future peut alors être très différente de celle observée aujourd'hui.

Ce chapitre traite d'approches générales de construction de la structure par termes des taux qui autorisent une grande souplesse, à la fois dans la spécification de la volatilité et dans le nombre de facteurs de risque pris en compte. En contrepartie, ils requièrent des temps de calcul plus importants que ceux décrits au chapitre 28. De ce fait, ils sont plus souvent utilisés pour les activités de recherche et développement que pour l'évaluation quotidienne de contrats.

Nous abordons aussi, à titre d'illustration, le marché américain des créances hypothécaires. Cela permet en particulier de montrer comment s'appliquent les idées et méthodes développées dans ce chapitre.

29.1 Le modèle de Heath, Jarrow et Morton

En 1990, David Heath, Bob Jarrow et Andy Morton (HJM dans la suite) ont publié un article important décrivant les conditions d'arbitrage que doit satisfaire un modèle de courbe des taux[1]. Pour la présentation de ce modèle, nous utiliserons les notations suivantes :

$P(t,T)$: prix de date t d'un ZC payant 1 € en date T

Ω_t : vecteur des valeurs passées et présentes (en date t) des prix d'obligations et des taux d'intérêt pertinents pour déterminer les volatilités des prix en date t

$v(t,T,\Omega_t)$: volatilité de $P(t,T)$

$f(t,T_1,T_2)$: taux forward pour la période allant de T_1 à T_2, vu de la date t

$F(t,T)$: taux forward instantané, vu de la date t, d'un contrat de maturité T

$r(t)$: taux court instantané en date t

z : processus de Wiener qui régit les mouvements de la courbe des taux

Prix des zéro-coupon et taux forward

Nous considérons pour débuter un modèle à un facteur dans lequel nous appliquons la procédure d'évaluation risque-neutre standard. Le processus de prix d'un zéro-coupon s'écrit, dans ce contexte :

$$dP(t,T) = r(t)\,P(t,T)\,dt + v(t,T,\Omega_t)\,P(t,T)\,dz(t) \tag{29.1}$$

Le taux de rentabilité espéré est $r(t)$ car un ZC est un titre négocié qui n'engendre pas de flux intermédiaires ; sa rentabilité est donc le taux sans risque dans l'univers risque-neutre. La volatilité v peut être une fonction quelconque (mais suffisamment régulière) des taux et prix présents et passés, comme le montre la présence de l'argument Ω_t dans la fonction v. La volatilité du prix est nulle à l'échéance, v doit donc vérifier $v(t,t,\Omega_t) = 0$ pour tout t[2].

L'équation (4.5) nous permet de relier taux forward et prix des ZC sous la forme :

$$f(t,T_1,T_2) = \frac{\ln(P(t,T_1)) - \ln(P(t,T_2))}{T_2 - T_1} \tag{29.2}$$

L'équation (29.1) et l'application du lemme d'Itô conduisent à :

$$d\ln[P(t,T_1)] = \left(r(t) - \frac{v(t,T_1,\Omega_t)^2}{2}\right)dt + v(t,T_1,\Omega_t)\,dz(t)$$

1. D. Heath, R. Jarrow et A. Morton, « Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology », *Econometrica*, 60, n° 1, 1992, 77-105.

2. La condition $v(t,t,\Omega_t) = 0$ est équivalente à l'hypothèse selon laquelle les processus de prix des ZC ont des drifts finis à toute date. Si la volatilité ne tend pas vers zéro à l'approche de l'échéance, un drift infini devient nécessaire pour vérifier la condition d'un prix terminal égal au nominal de l'obligation.

et :

$$d\ln[P(t,T_2)] = \left[r(t) - \frac{v(t,T_2,\Omega_t)^2}{2}\right] dt + v(t,T_2,\Omega_t)\, dz(t)$$

Cela amène au processus de taux forward suivant :

$$df\,(t,T_1,T_2) = \left(\frac{v\,(t,T_2,\Omega_t)^2 - v\,(t,T_1,\Omega_t)^2}{2\,(T_2 - T_1)}\right) dt + \frac{v\,(t,T_1,\Omega_t) - v\,(t,T_2,\Omega_t)}{(T_2 - T_1)} dz(t) \tag{29.3}$$

Cette équation met en évidence un processus risque-neutre de f qui dépend seulement des volatilités. Sa dépendance par rapport à r et aux prix P apparaît seulement indirectement du fait de la dépendance de v par rapport à ces variables. Quand on pose $T_1 = T$ et $T_2 = T + \Delta T$ dans l'équation (29.3) et qu'on considère la limite quand ΔT tend vers 0, $f(t,T_1,T_2)$ tend vers $F(t,T)$, le coefficient de $dz(t)$ devient $v_T\,(t,T,\Omega_T)$, et le coefficient de dt s'écrit :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial v\,(t,T,\Omega_t)^2}{\partial T} = v\,(t,T,\Omega_t)\, v_T\,(t,T,\Omega_t)$$

où l'indice T identifie une dérivée partielle par rapport à T. On peut alors écrire :

$$dF\,(t,T) = v\,(t,T,\Omega_t)\, v_T\,(t,T,\Omega_t)\, dt - v_T\,(t,T,\Omega_t)\, dz(t) \tag{29.4}$$

Les processus $F(t,T)$ (un processus par maturité T) sont connus dès que la fonction $v\,(t,T,\Omega_t)$ a été spécifiée.

L'équation (29.4) met par ailleurs en évidence l'existence d'un lien entre le drift et l'écart-type du taux forward instantané. C'est le résultat clé de HJM.

L'intégration de $v_t\,(t,T,\Omega_t)$ entre $\tau = t$ et $\tau = T$ donne :

$$v\,(t,T,\Omega_t) - v\,(t,t,\Omega_t) = \int_t^T v_\tau\,(t,\tau,\Omega_t) d\tau$$

Mais comme $v\,(t,t,\Omega_t) = 0$, on peut écrire :

$$v\,(t,T,\Omega_t) = \int_t^T v_\tau\,(t,\tau,\Omega_t) d\tau$$

Si on note $m\,(t,T,\Omega_t)$ et $s\,(t,T,\Omega_t)$ le drift et l'écart-type du processus de taux forward instantané, c'est-à-dire si :

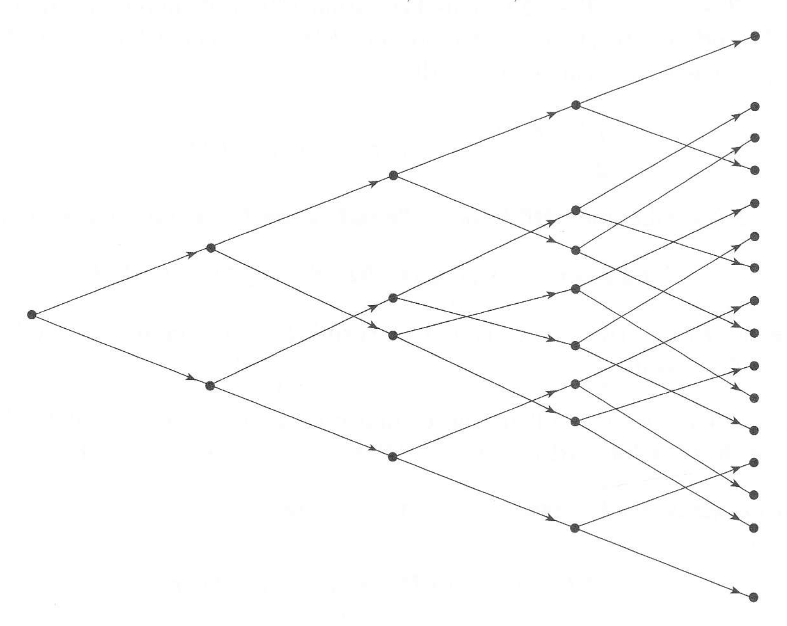
$$dF(t,T) = m\,(t,T,\Omega_t)\, dt + s\,(t,T,\Omega_t)\, dz(t)$$

on obtient, par l'équation (29.4), la relation :

$$m\,(t,T,\Omega_t) = s\,(t,T,\Omega_t) \int_t^T s\,(t,\tau,\Omega_t) d\tau \tag{29.5}$$

C'est le résultat obtenu par HJM.

Le processus de taux court dans ce modèle est en général non markovien. Pour comprendre ce que cela signifie, supposons que nous souhaitions calculer la loi de r à une date future t. Nous trouverions que cette loi est susceptible de dépendre de la trajectoire suivie par z dans l'équation (29.1) entre 0 et t[3]. Cette remarque met en évidence la principale difficulté de mise en œuvre du modèle HJM. Il faut utiliser une méthode de Monte Carlo. En effet, si on construit des arbres représentant l'évolution de la structure par termes des taux, ils ne seront pas recombinants : une séquence *up-down* n'est pas équivalente à une séquence *down-up*. En considérant un modèle à un facteur et un arbre binomial comme celui du graphique 29.1, on a 2^n nœuds après n pas de temps. S'il s'agit d'un modèle à deux facteurs, l'arbre doit être construit en trois dimensions et il y a 4^n nœuds après n pas de temps. Avec simplement $n = 30$, cela conduit à 10^9 nœuds avec un facteur et, bien sûr, 10^{18} nœuds avec deux facteurs.



Graphique 29.1 : Exemple d'arbre non recombinant obtenu dans le modèle général HJM.

L'extension à plusieurs facteurs

Le résultat de HJM peut être étendu au cas de plusieurs facteurs indépendants sous la forme :

$$dF(t,T) = m(t,T,\Omega_t)\, dt + \sum_k s_k(t,T,\Omega_t)\, dz_k$$

3. Pour plus de détails, voir la note technique n° 17 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr).

En suivant la démarche précédente (voir problème 29.2), on obtient la relation :

$$m(t,T,\Omega_t) = \sum_k s_k(t,T,\Omega_t) \int_t^T s_k(t,\tau,\Omega_t)d\tau \qquad (29.6)$$

29.2 Le modèle de marché LIBOR

Le modèle de HJM présente, comme nous l'avons mis en évidence, deux inconvénients. Il est fondé sur les taux forward instantanés qui ne sont pas observables directement, et son calibrage est délicat. Ces remarques ont conduit Brace, Gatarek et Musiela ainsi que Miltersen, Sandmann et Sondermann à proposer une alternative, connue sous le nom de modèle de marché LIBOR (ou modèle BGM)[4]. Ce modèle est exprimé en termes de taux forward accessibles aux traders.

Le modèle

Soit $t_0 = 0$ et $t_1,\ldots,t_n$ les dates de réajustement des taux des caps négociés sur le marché aujourd'hui. Les caps les plus échangés ont des réajustements trimestriels, on peut choisir $t_1 = 0{,}25$; $t_2 = 0{,}5$, etc. Notons $\delta_k = t_{k+1} - t_k$, et :

$F_k(\mathrm{t})$: le taux forward entre les dates t_k et t_{k+1} vu de la date t, avec une composition des intérêts déterminée par δ_k sur une base Exact/Exact

$m(t)$: l'indice de la prochaine date de réajustement ; $m(t)$ est donc le plus petit entier tel que $t \leqslant t_{m(t)}$

$\zeta_k(t)$: la volatilité de $F_k(\mathrm{t})$ à la date t

$v_k(\mathrm{t})$: la volatilité à la date t du prix du ZC d'échéance t_k, noté $P(t,t_k)$

Nous supposons dans un premier temps qu'il n'existe qu'un facteur ; comme nous l'avons montré à la section 25.4, dans l'univers forward-neutre de numéraire $P(t,t_{k+1})$, $F_k(t)$ est une martingale caractérisée par :

$$dF_k(t) = \zeta_k(t)F_k(t)dz \qquad (29.7)$$

où z est un processus de Wiener.

Il est souvent plus pratique d'évaluer les actifs dérivés dans un univers forward-neutre par rapport au ZC dont l'échéance est la prochaine date de réajustement des taux.

4. Voir A. Brace, D. Gatarek et M. Musiela, « The Market Model of Interest Rate Dynamics », *Mathematical Finance*, 7, n° 2, 1997, 127-55. F. Jamshidian, « LIBOR and Swap Market Models and Measures », *Finance and Stochastics*, 1 (1997), 293-330 ; K. Miltersen, K. Sandmann et D. Sondermann, « Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with LogNormal Interest Rate », *Journal of Finance*, 52, n° 1 (mars 1997), 409-30.

Nous emploierons l'expression *univers forward-neutre glissant*[5]. Dans cet univers, on actualise entre les dates t_k et t_{k+1} en multipliant par $P(t_k,t_{k+1})$. On ne se préoccupe pas de l'évolution des taux entre ces deux dates.

L'univers forward-neutre glissant est, à la date t, forward-neutre par rapport au ZC d'échéance $t_{m(t)}$. L'équation (29.7) donne le processus suivi par $F_k(t)$ dans l'univers forward-neutre relatif au ZC d'échéance t_{k+1}. Les résultats de la section 25.7 nous permettent de déduire le processus suivi par ce même taux dans l'univers forward-neutre glissant.

$$dF_k(t) = \zeta_k(t)[v_{m(t)}(t) - v_{k+1}(t)]F_k(t)dt + \zeta_k(t)F_k(t)dz \tag{29.8}$$

La relation entre taux forward et prix des ZC s'écrit :

$$\frac{P(t,t_i)}{P(t,t_{i+1})} = 1 + \delta_i F_i(t)$$

ou encore :

$$\ln P(t,t_i) - \ln P(t,t_{i+1}) = \ln[1 + \delta_i F_i(t)]$$

Le lemme d'Itô permet de calculer le processus suivi par les deux membres de cette équation. En égalisant les coefficients de dz obtenus, on aboutit à :

$$v_i(t) - v_{i+1}(t) = \frac{\delta_i F_i(t)\zeta_i(t)}{1 + \delta_i F_i(t)} \tag{29.9}$$

ce qui permet de réécrire le processus suivi par $F_k(t)$ sous la forme :

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^{k} \frac{\delta_i F_i(t)\zeta_i(t)\zeta_k(t)}{1 + \delta_i F_i(t)}\, dt + \zeta_k(t)\, dz \tag{29.10}$$

Le résultat de HJM de l'équation (29.4) est obtenu par passage à la limite quand δ_i tend vers zéro (voir problème 29.7).

La volatilité des taux forward

Nous simplifions maintenant le modèle en supposant que $\zeta_k(t)$ est uniquement fonction du nombre de périodes entières d'accumulation d'intérêts entre la prochaine date de réajustement et la date t_k. Notons Λ_i la valeur de $\zeta_k(t)$ quand le nombre de périodes en question est i. De ce fait, la fonction $\zeta_k(t) = \Lambda_{k-m(t)}$ est une fonction en escalier.

Les Λ_i peuvent (du moins en théorie) être estimés à partir des volatilités utilisées pour évaluer des caplets dans le modèle de Black (c'est-à-dire les volatilités spot du graphique 26.3)[6]. Supposons que σ_k soit la volatilité de Black pour le caplet

5. Dans la terminologie de la section 25.4, cela équivaut à prendre un « certificat de dépôt glissant » comme numéraire. Cela revient à débuter avec 1 €, à acheter le ZC de maturité t_1, à réinvestir à cette date le montant obtenu dans un ZC de maturité t_2, et ainsi de suite. *Stricto sensu*, les arbres de taux conçus au chapitre 28 sont construits dans un tel univers plutôt que dans l'univers risque-neutre classique.

6. En pratique, cette estimation se fait par une méthode de moindres carrés exposée plus loin.

correspondant à la période allant de t_k à t_{k+1} ; l'égalisation des variances entraîne :

$$\sigma_k^2 t_k = \sum_{i=1}^{k} \Lambda_{k-i}^2 \delta_{i-1} \tag{29.11}$$

Cette équation peut servir à déterminer les Λ_i de manière itérative.

■ **Exemple 29.1**

Supposons que les δ_i soient tous égaux et que les volatilités spot pour les trois premiers caplets soient respectivement 24 %, 22 % et 20 %. On a donc $\Lambda_0 = 24\,\%$; comme :

$$\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 = 2 \times 0{,}22^2$$

on en déduit que $\Lambda_1 = 19{,}80\%$. De la même façon :

$$\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 = 3 \times 0{,}20^2$$

d'où $\Lambda_2 = 15{,}23\%$.

■ **Exemple 29.2**

Considérons les données du tableau 29.1 indiquant des volatilités de caplets ; on constate la bosse décrite à la section 26.3. Les Λ_k apparaissent dans la deuxième ligne ; on remarque que la bosse est plus prononcée sur les Λ_k que sur les σ_k.

Tableau 29.1 : Données de volatilité ; durée des sous-périodes : 1 an

	Année k									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
σ_k (en %)	15,50	18,25	17,91	17,74	17,27	16,79	16,30	16,01	15,76	15,54
Λ_{k-1}(en %)	15,50	20,64	17,21	17,22	15,25	14,15	12,98	13,81	13,60	13,40

La mise en œuvre du modèle

Le modèle de marché LIBOR peut être implémenté par simulation de Monte Carlo. L'équation (29.10) s'écrit :

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^{k} \frac{\delta_i F_i(t) \Lambda_{i-m(t)} \Lambda_{k-m(t)}}{1 + \delta_i F_i(t)} dt + \Lambda_{k-m(t)}\, dz \tag{29.12}$$

ou :

$$d \ln F_k(t) = \left[\sum_{i=m(t)}^{k} \frac{\delta_i F_i(t) \Lambda_{i-m(t)} \Lambda_{k-m(t)}}{1 + \delta_i F_i(t)} - \frac{(\Lambda_{k-m(t)})^2}{2} \right] dt + \Lambda_{k-m(t)}\, dz \tag{29.13}$$

Si on suppose, à titre d'approximation dans le calcul du drift présenté ci-dessus, que $F_i(t) = F_i(t_j)$ quand $t_j<t<t_{j+1}$, on obtient :

$$F_k(t_{j+1}) = F_k(t_j)\exp\left[\left(\sum_{i=j+1}^{k}\frac{\delta_i F_i(t_j)\Lambda_{i-j-1}\Lambda_{k-j-1}}{1+\delta_i F_i(t_j)} - \frac{\Lambda_{k-j-1}^2}{2}\right)\delta_j + \Lambda_{k-j-1}\epsilon\sqrt{\delta_j}\right] \tag{29.14}$$

où ε suit une loi normale centrée-réduite.

L'extension à plusieurs facteurs

Le modèle BGM peut incorporer plusieurs facteurs indépendants. Par exemple, s'il y a p facteurs et si $\zeta_{k,q}$ est la composante de la volatilité attribuable au q-ième facteur, l'équation (29.10) devient (voir problème 29.11) :

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^{k}\frac{\delta_i F_i(t)\sum_{q=1}^{p}\zeta_{i,q}(t)\zeta_{k,q}(t)}{1+\delta_i F_i(t)}\,dt + \sum_{q=1}^{p}\zeta_{k,q}(t)\,dz_q \tag{29.15}$$

Soit $\lambda_{i,q}$ la q-ième composante de la volatilité quand il y a i périodes entières entre la prochaine date de réajustement et l'échéance du contrat forward. L'équation (29.14) s'écrit alors :

$$F_k(t_{j+1}) = F_k(t_j)\exp\left[\left(\sum_{i=j+1}^{k}\frac{\delta_i F_i(t_j)\sum_{q=1}^{p}\lambda_{i-j-1,q}\lambda_{k-j-1,q}}{1+\delta_i F_i(t_j)} - \frac{\sum_{q=1}^{p}\lambda_{k-j-1,q}^2}{2}\right)\delta_j + \sum_{q=1}^{p}\lambda_{k-j-1,q}\epsilon_q\sqrt{\delta_j}\right] \tag{29.16}$$

où les ε_q suivent des lois normales centrées-réduites.

L'hypothèse selon laquelle le drift du processus de taux forward reste constant à l'intérieur de chaque sous-période d'accumulation des intérêts permet de passer directement d'une date de réajustement à la suivante dans la simulation. C'est pratique puisque l'univers forward-neutre autorise à actualiser d'une date à la date précédente. Supposons que nous souhaitions simuler une courbe de taux zéro-coupon avec N sous-périodes. À chaque simulation, on part avec les taux forward de la date zéro qui sont notés $F_0(0)$, $F_1(0)$, ..., $F_{N-1}(0)$ et calculés à partir de la courbe initiale. On utilise l'équation (29.16) pour déduire $F_1(t_1)$, $F_2(t_1)$, ..., $F_{N-1}(t_1)$;. On l'applique à nouveau pour obtenir $F_2(t_2)$,$F_3(t_2)$,...,$F_{N-1}(t_2)$, et ainsi de suite jusqu'à arriver à $F_{N-1}(t_{N-1})$. Remarquez qu'au fur et à mesure de la progression, la courbe zéro-coupon est de plus en plus courte. Par exemple, avec des sous-périodes de trois mois et $N = 40$, on débute avec une courbe allant jusqu'à une échéance de dix ans. À la date t_{24} la simulation ne donne plus d'informations au-delà d'un horizon de 4 ans.

On peut tester la qualité de l'approximation du drift en évaluant des caplets à l'aide de l'équation (29.16) et en comparant avec ceux que donne le modèle de Black. La valeur de $F_k(t_k)$ est le taux réalisé pour la période séparant les dates t_k et t_{k+1}. Elle permet d'évaluer le paiement du caplet en t_{k+1}. Ce payoff est ensuite actualisé jusqu'à la date 0, sous-période par sous-période. La valeur du caplet est alors la moyenne des montants actualisés obtenus dans les différentes simulations. Cette démarche permet de montrer qu'il y a peu d'écart entre les prix obtenus par simulation et ceux provenant de l'application du modèle de Black. C'est vrai même si les sous-périodes durent un an et si les simulations sont nombreuses[7]. Cela suggère que l'hypothèse sur le drift n'est pas contraignante dans la plupart des situations.

Les caps non standard

Le modèle BGM peut aussi être utilisé pour l'évaluation de caps non standard, comme les caps à cliquet (*ratchet caps*). Ces actifs définissent des règles particulières pour la fixation du taux plafond à chaque date de réajustement. Le taux plafond est défini comme le LIBOR de la date précédente, plus un spread. Dans le cas des *sticky caps*, le taux plafond à la $j+1$-ième date est défini comme le minimum du LIBOR de la date j et du taux plafond de la date j, plus un spread. Les tableaux 29.2 et 29.3 donnent des exemples d'évaluation de caps à cliquet et de sticky caps en utilisant le modèle BGM à un, deux et trois facteurs. Le principal est fixé à 100 € et la structure des taux est plate à 5 %, avec des volatilités de caplets définies dans le tableau 29.1. Le taux est réajusté chaque année et le spread est fixé à 25 points de base. Les tableaux 29.4 et 29.5 montrent la décomposition de la volatilité dans les modèles à 2 et 3 facteurs. Les résultats sont fondés sur 100 000 simulations de Monte Carlo avec la méthode antithétique de réduction de variance décrite à la section 17.7. L'écart-type de chaque prix est de l'ordre de 0,001.

Le troisième type de cap non standard est le cap flexible ou *flexi cap*. Il se présente comme un cap classique, mais le nombre de caplets qui peuvent être exercés est limité. Considérons, par exemple, un flexi cap à paiements annuels portant sur un principal de 100 € ; la structure par termes des taux est plate à 5 % et les volatilités des caps sont données dans les tableaux 29.1, 29.4 et 29.5. Supposons que tous les caplets dans la monnaie doivent être exercés jusqu'à un nombre maximal de cinq. Dans le cadre de modèles à un, deux et trois facteurs, les prix de cet instrument sont respectivement 3,43, 3,58 et 3,61.

Le prix d'un cap vanille dépend seulement de la volatilité totale, mais il est indépendant du nombre de facteurs. Ceci s'explique car le prix d'un caplet vanille ne dépend que d'un seul taux forward. Les prix des caplets dans les instruments non standard que nous venons d'évoquer sont différents car ils dépendent de la distribution jointe d'un vecteur de taux forward. Par conséquent, leurs prix reposent sur plusieurs facteurs.

7. Voir J. C. Hull et A. White, « Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities and the Implementation of the LIBOR Market Model », *Journal of Fixed Income*, 10, n° 2, (septembre 2000), 46-62.

Tableau 29.2 : Évaluation des caplets à cliquet

Date de départ du caplet	Un facteur	Deux facteurs	Trois facteurs
1	0,196	0,194	0,195
2	0,207	0,207	0,209
3	0,201	0,205	0,210
4	0,194	0,198	0,205
5	0,187	0,193	0,201
6	0,180	0,189	0,193
7	0,172	0,180	0,188
8	0,167	0,174	0,182
9	0,160	0,168	0,175
10	0,153	0,162	0,169

Tableau 29.3 : Évaluation des sticky caplets

Date de départ du caplet	Un facteur	Deux facteurs	Trois facteurs
1	0,196	0,194	0,195
2	0,336	0,334	0,336
3	0,412	0,413	0,418
4	0,458	0,462	0,472
5	0,484	0,492	0,506
6	0,498	0,512	0,524
7	0,502	0,520	0,533
8	0,501	0,523	0,537
9	0,497	0,523	0,537
10	0,488	0,519	0,534

Tableau 29.4 : Composantes de la volatilité dans un modèle à deux facteurs

	Année k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_{k-1,1}$ (en %)	14,10	19,52	16,78	17,11	15,25	14,06	12,65	13,06	12,36	11,63
$\lambda_{k-1,2}$ (en %)	−6,45	−6,70	−3,84	−1,96	0,00	1,61	2,89	4,48	5,65	6,65
Vol. totale (en %)	15,50	20,64	17,21	17,22	15,25	14,15	12,98	13,81	13,60	13,40

Tableau 29.5 : Composantes de la volatilité dans un modèle à trois facteurs

	Année k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_{k-1,1}$ (en %)	13,65	19,28	16,72	16,98	14,85	13,95	12,61	12,90	11,97	10,97
$\lambda_{k-1,2}$ (en %)	-6,62	-7,02	-4,06	-2,06	0,00	1,69	3,06	4,70	5,81	6,66
$\lambda_{k-1,3}$ (en %)	3,19	2,25	0,00	-1,98	-3,47	-1,63	0,00	1,51	2,80	3,84
Vol. totale (en %)	15,50	20,64	17,21	17,22	15,25	14,15	12,98	13,81	13,60	13,40

L'évaluation des swaptions européennes

Comme l'ont montré Hull et White, on peut trouver une approximation analytique pour l'évaluation des swaptions européennes dans le modèle BGM[8]. Notons $P(t,T_i)$ la maturité de l'option de swap, $T_1,\ldots,T_N$ les dates de paiement du swap et $\tau_i = T_{i+1} - T_i$; de l'équation (25.23), on déduit le taux de swap en t sous la forme :

$$s(t) = \frac{P(t,T_0) - P(t,T_N)}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i P(t,T_{i+1})}$$

On sait aussi que :

$$\frac{P(t,T_i)}{P(t,T_0)} = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{1+\tau_j G_j(t)}$$

pour $1 \leqslant i \leqslant N$ où $G_j(t)$ est le taux forward en date t pour la période (T_j, T_{j+1}). Ces deux équations définissent une relation entre $s(t)$ et les $G_j(t)$. Lorsque le lemme d'Itô est appliqué (voir problème 29.12), la variance du taux de swap, $s(t)$, est donnée par :

$$V(t) = \sum_{q=1}^{p} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tau_k \beta_{k,q}(t) G_k(t) \gamma_k(t)}{1+\tau_k G_k(t)} \right]^2 \tag{29.17}$$

où :

$$\gamma_k(t) = \frac{\prod_{j=0}^{N-1}[1+\tau_j G_j(t)]}{\prod_{j=0}^{N-1}[1+\tau_j G_j(t)] - 1} - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{N-1}[1+\tau_j G_j(t)]}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{N}[1+\tau_j G_j(t)]}$$

8. Voir J. C. Hull et A. White, « Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities and the Implementation of the LIBOR Market Model », *Journal of Fixed Income*, 10, n° 2, (septembre 2000), 46-62. D'autres approximations analytiques ont été proposées par A. Brace, D. Gatarek et M. Musiela, « The Market Model of Interest Rate Dynamics », *Mathematical Finance*, 7, 2 (1997), 127-55 et L. Andersen et J. Andreasen, « Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model », *Applied Mathematical Finance*, 7, 1 (mars 2000), 1-32.

et $\beta_{j,q}(t)$ est la q-ième composante de la volatilité de $G_j(t)$. Nous approximons $V(t)$ en posant $G_j(t) = G_j(0)$ pour tout j et tout t. La volatilité du swap substituée dans le modèle BGM s'écrit alors :

$$\sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{t=0}^{T_0} V(t)\,dt}$$

ou encore :

$$\sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{t=0}^{T_0}\sum_{q=1}^{p}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\tau_k\beta_{k,q}(t)G_k(0)\gamma_k(0)}{1+\tau_k G_k(0)}\right]^2 dt} \tag{29.18}$$

Dans le cas où la longueur des périodes pour le swap sous-jacent à l'option est la même que celle du cap, $\beta_{k,q}(t)$ est la q-ième composante de la volatilité d'un taux de cap forward quand la durée jusqu'à maturité est $T_k - t$. Cela peut être déduit de données comme celles du tableau 29.5.

Les durées des intervalles entre deux paiements ne sont pas toujours les mêmes pour les swaps sous-jacents des swaptions et les caps/floors qui sont utilisés pour calculer les volatilités. Les résultats précédents peuvent cependant être étendus pour prendre ce problème en considération. Supposons que la durée entre deux paiements sur le swap contienne M durées de caplets. Notons $\tau_{j,m}$ la durée de la m-ième sous-période de la j-ième période, de façon que :

$$\tau_j = \sum_{m=1}^{M}\tau_{j,m}$$

Notons $G_{j,m}(t)$ le taux forward observé à la date t pour la période $\tau_{j,m}$. Nous pouvons écrire :

$$1+\tau_j G_j(t) = \prod_{m=1}^{M}\left(1+\tau_{j,m}G_{j,m}(t)\right)$$

Il est ainsi possible de modifier l'analyse qui conduit à l'équation (29.18), de manière que la volatilité de $s(t)$ soit exprimée à partir des volatilités des $G_{j,m}(t)$ plutôt qu'à partir des $G_j(t)$. La volatilité du swap à utiliser dans le modèle de marché standard d'évaluation des swaptions est alors (voir problème 29.13) :

$$\sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{t=0}^{T_0}\sum_{q=1}^{p}\left[\sum_{k=n}^{N-1}\sum_{m=1}^{M}\frac{\tau_{k,m}\beta_{k,m,q}(t)G_{k,m}(0)\gamma_k(0)}{1+\tau_{k,m}G_{k,m}(0)}\right]^2 dt} \tag{29.19}$$

où $\beta_{j,m,q}(t)$ est la q-ième composante de la volatilité de $G_{j,m}(t)$. C'est en fait la q-ième composante de la volatilité d'un taux de cap forward quand la durée de vie va de la date t jusqu'au début de la m-ième sous-période de la période (T_j, T_{j+1}) de capitalisation du swap.

Les expressions (29.18) et (29.19) de la volatilité du swap font intervenir les approximations $G_j(t) = G_j(0)$ et $G_{j,m}(t) = G_{j,m}(0)$. Hull et White ont comparé les prix de

swaptions européennes obtenues en utilisant ces expressions avec ceux qui découlent d'une simulation de Monte Carlo. Les résultats sont très proches. Dès que le modèle de marché LIBOR a été calibré, ces deux équations permettent d'obtenir très rapidement des prix de swaptions européennes. Les analystes peuvent alors déterminer si ces produits sont sur ou sous-évalués par rapport aux caps. Ils peuvent utiliser ces résultats pour calibrer le modèle à partir des prix de swaptions.

Le calibrage du modèle

Pour calibrer le modèle de marché LIBOR, il faut déterminer les Λ_i et la façon dont ces coefficients sont répartis dans les $\lambda_{i,q}$. La première étape consiste à faire une analyse en composantes principales (ACP) comme cela a déjà été fait à la section 18.9. L'ACP s'écrit :

$$\Delta F_j = \sum_{q=1}^{M} \alpha_{j,q} x_q$$

où M est le nombre de facteurs, ΔF_j est la variation du taux forward pour un contrat forward dont l'échéance est à j périodes de capitalisation de la date actuelle, $\alpha_{j,q}$ est le poids du j-ième taux sur le q-ième facteur et x_q est le score factoriel du q-ième facteur. On a de plus :

$$\sum_{j=1}^{M} \alpha_{j,q_1} \alpha_{j,q_2}$$

égal à 1 si $q_1 = q_2$ et égal à 0 sinon. Notons s_q l'écart-type du q-ième score factoriel. Si le nombre de facteurs du modèle de marché LIBOR, noté p, est égal au nombre total de facteurs, M, on peut écrire :

$$\lambda_{j,q} = \alpha_{j,q} s_q$$

pour $1 \leqslant j,\ q \leqslant M$. Quand $p < M$, les $\lambda_{j,q}$ doivent être normalisés par :

$$\Lambda_j = \sqrt{\sum_{q=1}^{p} \lambda_{j,q}^2}$$

Cela revient à poser :

$$\lambda_{j,q} = \frac{\Lambda_j s_q \alpha_{j,q}}{\sqrt{\sum_{q=1}^{p} s_q^2 \alpha_{j,q}^2}} \qquad (29.20)$$

L'équation (29.11) donne une façon de déterminer les Λ_j de sorte qu'ils soient cohérents avec le prix des caplets. Dans la pratique, cette méthode est rarement utilisée car on observe des choses « curieuses »[9]. En conséquence, bien que le modèle de marché LIBOR soit construit pour assurer la cohérence avec les prix de caplets, les analystes préfèrent parfois le calibrer à partir de swaptions européennes.

9. Parfois il n'existe pas d'ensemble de coefficients Λ_j cohérents avec ces prix.

La méthode la plus couramment utilisée est similaire à celle décrite à la section 28.8. Notons U_i le prix de marché du i-ième instrument servant au calibrage et V_i le prix donné par le modèle. On choisit les Λ_j de façon à minimiser :

$$\sum_i (U_i - V_i)^2 + P$$

où P est une fonction de pénalité choisie de façon à assurer que les coefficients λ_j aient un comportement régulier. Comme à la section 28.8, P s'écrit :

$$P = \sum_i w_{1,i}(\Lambda_{i+1} - \Lambda_i)^2 + \sum_i w_{2,i}(\Lambda_{i+1} + \Lambda_{i-1} - 2\Lambda_i)^2$$

Quand certains des instruments servant au calibrage sont des swaptions européennes, la minimisation est possible en utilisant la procédure de Levenberg-Marquardt. L'équation (29.20) sert alors à déterminer les $\lambda_{j,q}$ à partir des Λ_j.

Les asymétries de volatilité

Les brokers fournissent des volatilités sur des caps qui ne sont pas forcément à la monnaie. Sur certains marchés, on observe une volatilité (de Black) décroissante par rapport au prix d'exercice. Ceci peut être abordé par un modèle à élasticité constante de la variance (voir une application de ce modèle à la section 24.1). Le modèle s'écrit ici :

$$dF_i(t) = \ldots + \sum_{q=1}^{p} \zeta_{i,q}(t) F_i^{\alpha}(t) dz_q \tag{29.21}$$

où α $(0 < \alpha < 1)$ est une constante. Ce modèle peut être traité de la même manière que le modèle log-normal. Les caps et les floors peuvent être évalués en utilisant la fonction de répartition de la loi de λ_i décentrée. Il existe alors des approximations analytiques analogues à celles qui ont été données ci-dessus pour évaluer les swaptions européennes[10].

Les swaptions bermudiennes

Une swaption bermudienne est une swaption qui peut être exercée à certaines dates de paiement du swap sous-jacent. Elles sont difficiles à évaluer dans le modèle BGM car la mise en œuvre de celui-ci est fondée sur des simulations de Monte Carlo avec lesquelles il est délicat de prendre en compte l'exercice prématuré. Cependant, les techniques décrites à la section 24.7 peuvent être employées. Longstaff et Schwartz utilisent une approche de moindres carrés quand le nombre de facteurs est important.

10. Pour plus de détails, voir L. Andersen et J. Andersen, « Volatility Skews and Extension of the LIBOR Market Model », *Applied Mathematical Finance*, 7, n° 1 (2000), 1-32 ; J. Hull et A. White, « Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities and the Implementation of the LIBOR Market Model », *Journal of Fixed Income*, 10, n° 2 (septembre 2000), 46-62.

La valeur de non-exercice à une date de paiement donnée est modélisée comme une fonction polynomiale de la valeur des facteurs[11]. Andersen montre que la méthode de la frontière d'exercice prématuré optimal est utilisable dans ce cadre. Des résultats corrects sont obtenus quand on suppose que la décision d'exercice prématuré dépend uniquement de la valeur intrinsèque de l'option[12]. La plupart des traders utilisent en fait un des modèles à un facteur présentés au chapitre 28. Cependant, l'efficacité de ces modèles dans l'évaluation de ces options particulières est remise en cause[13].

29.3 Les créances hypothécaires

Les modèles présentés dans ce chapitre peuvent être appliqués au marché américain des créances hypothécaires (*mortgage backed security market*). Les institutions financières peuvent décider de vendre une part de leurs prêts immobiliers à des investisseurs. Ces prêts sont regroupés dans un fonds et les investisseurs achètent des parts de ce fonds. Celles-ci sont appelées *mortgage backed securities* (MBS). Il existe un marché secondaire pour ces MBS. Par exemple, un investisseur qui possède X % d'un fonds reçoit la part correspondante des intérêts et des principaux des prêts regroupés dans le fonds.

Ces MBS sont généralement garanties par une agence gouvernementale comme la *Government National Mortgage Association* (GNMA, qu'on prononce Ginnie Mae) ou la *Federal National Mortgage Association* (FNMA, qu'on prononce Fannie Mae) de sorte que les investisseurs sont protégés contre le risque de défaut. De ce point de vue, ces actifs financiers ressemblent à des titres de créance classiques à taux fixe. Il y a cependant une différence cruciale par rapport à un produit standard. Il s'agit de la possibilité de remboursement anticipé associée à un prêt immobilier. Le plus souvent, l'emprunt a une durée longue, 20 ans ou plus, et l'emprunteur peut rembourser par anticipation à n'importe quel moment. Cela signifie que chaque emprunteur dispose d'une option américaine de remboursement à la valeur faciale de l'emprunt.

La décision de remboursement par anticipation peut avoir plusieurs causes. La plus courante est une baisse des taux et le souhait, de la part de l'emprunteur, de se refinancer à moindre coût. En conséquence, pour évaluer les MBS, la question cruciale est la détermination de la fonction de remboursement anticipé, c'est-à-dire l'estimation, à partir des informations détenues à une date t (notamment la courbe des taux), du rythme des remboursements futurs. Bien sûr, une telle fonction n'est pas très fiable si on cherche à prévoir le comportement individuel des emprunteurs ; en revanche, elle est plus efficace si on s'intéresse à un pool d'emprunteurs. L'analyse des données

11. Voir F. A. Longstaff et E. S. Schwartz, « Valuing American Options by Simulation : A Simple Least Squares Approach », *Review of Financial Studies*, 14, n° 1 (2001), 113-47.

12. Voir L. Andersen, « A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model », *Journal of Computational Finance*, 3, n° 2, (hiver 2000), 1-32.

13. Pour des avis divergents, voir « Factor Dependence of Bermudan Swaptions : Fact or Fiction » par L. Andersen et J. Andersen, et « Throwing Away a Billion Dollars : The Cost of Suboptimal Exercise Strategies in the Swaption Market » par F. A. Longstaff et E. S. Schwartz. Ces deux articles ont été publiés dans le *Journal of Financial Economics*, 62, n° 1, octobre 2001.

historiques permet d'obtenir une meilleure estimation du rythme de remboursement potentiel. En effet, même si le niveau des taux n'est pas le seul déterminant pour un emprunteur donné, c'est le paramètre clé au niveau du pool. La conséquence est que les investisseurs exigeront un rendement espéré plus élevé sur les MBS que sur des titres classiques afin de compenser l'option de remboursement anticipé cédée à l'emprunteur.

La décomposition des MBS

Les MBS décrites jusqu'à présent mettent tous les investisseurs sur un pied d'égalité puisqu'ils obtiennent tous le même rendement et supportent le même risque de remboursement anticipé (de telles MBS sont qualifiées de *pass-throughs*). Mais ce n'est pas le cas pour toutes les MBS ; il arrive que les investisseurs soient divisés en classes avec des règles de paiement différentes selon les classes. On parle alors de CMO (*collateralized mortgage obligation*) . Supposons qu'il existe trois classes d'investisseurs notées A, B et C auxquels on affecte une part du fonds avec les règles de paiement suivantes. Les remboursements survenant en premier sont affectés à la classe A, que ceux-ci soient prévus ou anticipés, pour un montant de principal donné. Quand celui-ci est atteint, la classe B commence à être payée pour le montant prévu, mais toujours au rythme aléatoire des remboursements, puis la classe C est payée en dernier. Dans cette situation, les investisseurs de la classe A supportent le risque de remboursement anticipé le plus important, avec un horizon plus proche que ceux de la classe B et de la classe C. L'objet de ces décompositions est de créer, pour les investisseurs institutionnels, des titres plus attractifs que les MBS classiques. Bien sûr, la part de risque supportée par chaque classe dépend de la clé de répartition de la valeur faciale du fonds. Par exemple, si on affecte aux classes A, B et C les montants 400, 300 et 100, la classe C supporte un risque de remboursement anticipé très faible. La situation est très différente si la répartition est de la forme 100, 200, 500.

Les créateurs des MBS ont imaginé des structures de paiement bien plus exotiques que celle qui vient d'être présentée. L'encadré 29.1 en donne un exemple.

Encadré 29.1 La décomposition en intérêt et principal

Dans certains cas, les paiements distinguent le principal des intérêts. Tous les remboursements de principal sont affectés à une classe (appelée PO pour *principal only*) et tous les paiements d'intérêts à une autre (appelée IO pour *interest only*). Les deux sont des investissements risqués. En effet, quand le taux de remboursement anticipé est élevé, la valeur d'un PO augmente et celle d'un IO diminue. Quand ce taux faiblit, la relation inverse est vérifiée. En effet, dans le cas du PO, le détenteur reçoit un montant donné de principal mais à des dates aléatoires. Quand le taux de remboursement anticipé est élevé, la somme est récupérée plus rapidement, ce qui avantage le détenteur du PO. S'il est faible, le détenteur devra attendre plus longtemps. Pour le détenteur de l'IO, c'est le montant reçu qui est aléatoire. Plus le taux de remboursement anticipé est élevé, plus le montant reçu sera faible puisque les emprunteurs ne versent plus d'intérêts après le remboursement (anticipé ou non) de l'emprunt.

L'évaluation des MBS

On utilise le plus souvent la simulation de Monte Carlo pour évaluer les MBS. La dynamique des taux est simulée à l'aide du modèle HJM ou du modèle de marché LIBOR. Analysons le déroulement d'un tirage de la simulation. Chaque mois, les paiements anticipés sont calculés à l'aide de la courbe des taux actuelle et de l'historique des mouvements de celle-ci. Ces remboursements anticipés déterminent les cash-flows reçus par le détenteur du titre et sont actualisés. Cela donne une valeur de la MBS. Une estimation de la valeur de celle-ci est ensuite obtenue en faisant la moyenne des résultats obtenus sur un grand nombre de tirages.

Le spread d'ajustement

Les traders, au-delà du calcul des prix théoriques des MBS, cherchent à mesurer le spread entre le taux des obligations d'état et le taux actuariel des MBS (on le note OAS pour *option adjusted spread*), calculé en supposant l'absence de remboursement anticipé.

Dans un modèle de la dynamique de la structure par termes des taux, la courbe actuelle est un input classique. Toutefois, pour estimer les OAS, on commence par l'évaluer avec la courbe des taux zéro-coupon et on compare le prix obtenu au prix de marché. De manière itérative, on cherche ensuite les déplacements parallèles de la courbe zéro-coupon qui permettent de faire coïncider le prix théorique et le prix de marché. L'OAS est l'amplitude du déplacement nécessaire pour obtenir cette coïncidence.

Supposons que le prix de marché soit de 102 $ et que le prix théorique soit de 103,27 $. Il faut donc déplacer la courbe des taux vers le haut pour rapprocher prix théorique et prix de marché. En essayant un déplacement de 60 points de base, on obtient un prix théorique de 101,20 $. Le spread de 60 bp est donc trop important. On peut utiliser une interpolation linéaire de la forme :

$$60 \times \frac{103{,}27 - 102.00}{103{,}27 - 101{,}20} = 36{,}81$$

On utilise alors un spread de 36,81 bp à l'essai suivant, ce qui conduit à un prix de 101,95. Le spread est encore légèrement surévalué et on renouvelle l'interpolation linéaire sous la forme :

$$36{,}81 \times \frac{103{,}27 - 102{,}00}{103{,}27 - 101{,}95} = 35{,}41$$

On poursuit les itérations jusqu'à obtention du résultat souhaité.

Résumé

Les modèles HJM et BGM donnent complète liberté à l'utilisateur en ce qui concerne le choix des structures de volatilité. Le modèle BGM présente deux avantages par

rapport à celui de HJM. Le premier est qu'il est construit à partir des taux forward qui déterminent le prix des caps ; le second est qu'il est relativement facile à calibrer à partir de caps et de swaptions européennes. Les deux ont cependant un inconvénient commun : ils ne peuvent être représentés par des arbres recombinants. En pratique, cela signifie qu'une simulation de Monte Carlo est nécessaire à leur utilisation.

Le marché américain des MBS a donné naissance à des actifs dérivés de taux très exotiques : CMO, IO, PO, etc. Les flux engendrés par ces titres dépendent du rythme de remboursement anticipé sur un pool de prêts, qui dépendent eux-mêmes de l'évolution des taux d'intérêt. Ces titres sont donc fortement *path-dependent*. La simulation de Monte Carlo est de ce fait une méthode adaptée à leur évaluation et ce sont des supports très intéressants pour l'application du modèle HJM et du modèle de marché LIBOR.

Références complémentaires

AMIN K. et A. MORTON, « Implied Volatility Functions in Arbitrage-Free Term Structure Models », *Journal of Financial Economics*, 35 (1994), 141-80.

ANDERSEN L., « A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model », *Journal of Computational Finance*, 3, n° 2 (hiver 2000), 5-32.

ANDERSEN L. et J. ANDREASEN, « Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model », *Applied Mathematical Finance*, 7, 1 (mars 2000), 1-32.

BRACE A., D. GATAREK et M. MUSIELA, « The Market Model of Interest Rate Dynamics », *Mathematical Finance*, 7, n° 2 (1997), 127-55.

BUHLER W., M. ULRIG-HOMBERG, U. WALTER et T. WEBER, « An Empirical Comparison of Forward and Spot-Rate Models for Valuing Interest Rate Options », *Journal of Finance*, 54, n° 1 (1999), 269-305.

CAVERHILL A., « When is the Short Rate Markovian », *Mathematical Finance*, 4 (1994), 305-12.

CHEYETTE O., « Term Structure Dynamics and Mortgage Valuation », *Journal of Fixed Income*, mars 1992, 28-41.

DUFFIE D. et R. KAN, « A Yield Factor Model of Interest Rates », *Mathematical Finance*, 6, n° 4 (1996), 379-406.

HEATH D., R. JARROW et A. MORTON, « Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A Discrete-Time Approximation », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, n° 4 (1990), 77-105.

HEATH D., R. JARROW et A. MORTON, « Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology », *Econometrica*, 60, n° 1 (1992), 77-105.

HULL J. et A. WHITE, « Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities and the Implementation of the LIBOR Market Model », *Journal of Fixed Income*, 10, n° 2 (2000), 46-62.

INUI K. et M. KIJIMA, « A Markovian Framework in Multivariate Heath, Jarrow and Morton Models », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, n° 3 (1998), 423-40.

JAMSHIDIAN F., « LIBOR and Swap Market Models and Measures », *Finance and Stochastics*, 1 (1997), 293-330.

JARROW R., *Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*, Mc Graw Hill, New York, 1995.

JARROW R. et S. M. TURNBULL, « Delta, Gamma and Bucket Hedging of Interest Rates Derivatives », *Applied Mathematical Finance*, 1 (1994), 21-48.

JEFFREY A., « Single Factor Heath-Jarrow-Morton Term Structure Model Based on Markov Spot Interest Rate Dynamics », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30 (1995), 619-42.

MILTERSEN K., K. SANDMANN et D. SONDERMANN, « Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Lognormal Interest Rate », *Journal of Finance*, 52, n° 1 (mars 1997), 409-30.

REBONATO R., *Interest Rate Option Models*, 2e éd., Wiley, Chichester, 1998

RITCHKEN P. et L. SANKARASUBRAMANIAN, « Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure », *Mathematical Finance*, 5 (1995), 55-72.

Problèmes et exercices

29.1 Expliquez la différence entre un modèle markovien et un modèle non markovien du taux court.

29.2 Montrez la relation liant le drift et la volatilité du taux forward pour la version à plusieurs facteurs du modèle HJM de l'équation (29.6).

29.3 « Quand la volatilité du taux forward $s(t,T)$ est constante dans le modèle HJM, on obtient le modèle de Ho et Lee. » Vérifiez que cette affirmation est correcte en montrant que le modèle HJM conduit à un processus de prix des obligations cohérent avec celui obtenu avec le modèle de Ho et Lee dans la section 28.8.

29.4 « Quand la volatilité du taux forward $s(t,T)$ est égale à $\sigma e^{-a(T-t)}$ dans le modèle HJM, on obtient le modèle de Hull et White. » Vérifiez que cette affirmation est correcte en montrant que le modèle HJM conduit à un processus de prix des obligations cohérent avec celui obtenu avec le modèle de Hull et White dans la section 28.8.

29.5 Quel est l'avantage du modèle de marché LIBOR par rapport au modèle HJM ?

29.6 Donnez une explication intuitive à la croissance du prix d'un cap à cliquet en fonction du nombre de facteurs.

29.7 Montrez que l'équation (29.10) devient l'équation (29.4) quand δ_i tend vers zéro.

29.8 Expliquez pourquoi un sticky cap vaut plus qu'un cap à cliquet.

29.9 Expliquez pourquoi les IO et les PO ont une sensibilité opposée aux variations du taux de remboursement anticipé.

29.10 « Un OAS est similaire au taux actuariel d'une obligation. » Que pensez-vous de cette affirmation ?

29.11 Démontrez l'équation (29.15).

29.12 Démontrez la formule de $V(t)$ donnée dans l'équation (29.17).

29.13 Démontrez l'équation (29.19).

Questions complémentaires

29.14 Dans un cap à paiements annuels, les volatilités (de Black) des caplets de maturités 1, 2, 3 et 5 ans sont respectivement 18 %, 20 %, 22 % et 20 %. Estimez la volatilité d'un taux forward à 1 an dans le modèle BGM quand la période va de (a) 0 à 1 an, (b) de 1 à 2 ans, (c) de 2 à 3 ans, (d) de 3 à 5 ans. Supposez que la courbe ZC soit plate à 5 % par an en composition annuelle et utilisez DerivaGem pour estimer les volatilités plates pour des caps à 2, 3, 4, 5 et 6 ans.

29.15 Dans le cap flexible de la section 29.2, le détenteur est obligé d'exercer les N premiers caplets dans la monnaie. Il ne peut ensuite plus exercer (dans l'exemple $N = 5$). Deux autres possibilités de définition sont parfois rencontrées :

a. Le détenteur peut choisir si un quelconque caplet doit être exercé, mais le nombre total n'excède pas N.

b. Dès que le détenteur a décidé d'exercer un caplet, il doit exercer les suivants dans la monnaie jusqu'à un maximum de N.

Parmi les trois possibilités décrites ci-dessus, quelle est, à votre avis, celle qui a la plus grande valeur ? la moins grande ?

Chapitre 30

Retour sur les swaps

Les swaps ont largement contribué au succès des marchés OTC pendant les années 1980 et 1990. Ils se sont révélés des instruments très souples pour la gestion des risques. Fondés sur des supports variés, ils constituent une des innovations financières majeures des dernières décennies.

Au chapitre 7, nous avons abordé l'évaluation des swaps de taux vanille. L'approche classique consiste en une cristallisation des taux, c'est-à-dire en l'identification des taux forward observés aujourd'hui et des taux spot futurs. Cette évaluation compte deux étapes :

1. Calculer les cash-flows nets du swap en supposant que les taux LIBOR dans le futur sont les taux LIBOR forward aujourd'hui.
2. Définir la valeur du swap comme la valeur actuelle des flux futurs, l'actualisation étant réalisée à l'aide de la courbe des taux ZC LIBOR.

Dans ce chapitre, nous abordons la description et l'évaluation d'un certain nombre de swaps non standard. Certains peuvent être évalués selon l'approche classique, d'autres requièrent des ajustements de convexité, quanto ou la prise en compte de décalages temporels, tels que nous les avons décrits au chapitre 27. D'autres contiennent des options qui modifient leur valeur et qui doivent être évalués avec les méthodes des chapitres 26, 28 et 29.

30.1 Variations sur le swap vanille

De nombreux swaps présentent des modifications mineures par rapport au swap vanille du chapitre 7. Le principal peut évoluer dans le temps selon un mode déterministe. Les swaps dont le principal est une fonction croissante du temps sont qualifiés de *step-up* ; nous dirons swap croissant. Quand le principal est décroissant, on parle d'*amortizing swap*, nous dirons simplement swap décroissant. Par exemple, les swaps

croissants sont utiles pour une entreprise de construction, amenée à emprunter des montants croissants à taux variable dans le cadre de la réalisation d'un projet, et qui souhaite échanger ces emprunts contre des emprunts à taux fixe. Un swap décroissant intéressera une entreprise qui a des emprunts à taux fixe avec un certain rythme d'amortissement et qui souhaite transformer cette dette en une dette à taux variable.

Il peut arriver que le principal et/ou le rythme des paiements diffèrent pour les deux parties prenantes. Ce cas est illustré dans l'encadré 30.1 qui montre un swap hypothétique entre Microsoft et Intel, dans lequel le principal est de 120 millions pour la jambe variable et de 100 millions sur la jambe fixe. Par ailleurs, les paiements sont semestriels d'un côté et mensuels de l'autre. Ces variations sont toutefois mineures et n'affectent pas la méthodologie d'évaluation. On peut encore, ici, faire l'hypothèse de taux spot futurs égaux aux taux forward observés aujourd'hui.

Le taux variable de référence n'est pas toujours un taux LIBOR. Dans certains swaps, c'est le taux du *commercial paper* qui sert de référence. Un *basis swap* (swap de base) est un swap consistant à échanger des flux calculés avec deux taux variables différents. Par exemple, cela peut consister, sur un principal de 100 millions, à échanger le taux du *commercial paper* à 3 mois plus 10 points de base contre le LIBOR 3 mois. Ce type de swap est utile lorsqu'une institution financière a des actifs et des passifs dépendant de plusieurs taux variables.

Encadré 30.1 Extrait d'une confirmation pour un swap entre Microsoft et Intel quand les principaux et la périodicité des paiements sont différents

Date de transaction	27 février 2005
Date de départ	5 mars 2005
Convention jours ouvrés	Suivant
Calendrier jours ouvrés	US
Date de fin	5 mars 2008
Paiements fixes	
Payeur du taux fixe	Microsoft
Principal du fixe	100 millions USD
Taux fixe	6 %
Décompte des jours	Exact/365
Dates de paiement	5 mars et 5 septembre de chaque année, commençant le 5 septembre 2005 jusqu'au 5 mars 2008 inclus
Paiements variables	
Payeur du taux variable	Intel
Principal du variable	120 millions USD
Taux variable	LIBOR 1 mois sur USD
Décompte des jours	Exact/360
Dates de paiement	5 septembre 2005, puis le 5 de chaque mois jusqu'au 5 mars 2008 inclus

Lorsque le taux de référence variable n'est pas le LIBOR, on peut encore utiliser une méthode de cristallisation mais il faut choisir une autre courbe ZC que la courbe LIBOR pour calculer les flux. L'actualisation se fait cependant avec la courbe LIBOR.

30.2 Les swaps composés

L'encadré 30.2 donne un exemple de swap composé. Il y a une seule date de paiement sur chaque jambe, à la fin de la durée de vie du swap. Dans cet exemple, le LIBOR+20 est la référence variable pour le calcul des flux, mais ceux-ci, habituellement payés à des dates régulières, sont ici capitalisés jusqu'à la fin du swap au taux LIBOR+10. Pour la jambe fixe, le taux déterminant les cash-flows est 6 %, mais ils sont capitalisés à 6,3 %.

Ici encore, la méthodologie d'évaluation est inchangée. Pour la jambe fixe, il n'y a aucun problème puisque le flux terminal est connu avec certitude. On peut supposer les taux forward égaux aux taux spot futurs car le swap peut être décomposé en un portefeuille de FRA[1].

Encadré 30.2 Extrait d'une confirmation pour un swap composé entre Microsoft et Intel

Date de transaction	27 février 2005
Date de départ	5 mars 2005
Convention	jours ouvrés Suivant
Calendrier	jours ouvrés US
Date de fin	5 mars 2008
Paiements fixes	
Payeur du taux fixe	Microsoft
Principal du fixe	100 millions USD
Taux fixe	6 %
Décompte des jours	Exact/365
Dates de paiement	5 mars 2008
Taux de capitalisation	6,3 %
Paiements variables	
Payeur du taux variable	Intel
Principal du variable	100 millions USD
Taux variable	LIBOR 6 mois sur USD + 20 points de base
Décompte des jours	Exact/360
Dates de paiement	5 mars 2008
Taux de capitalisation	LIBOR 6 mois sur USD + 10 points de base

1. Voir la note technique n° 18 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr).

■ **Exemple 30.1**

Un swap composé durant trois ans a une périodicité annuelle de capitalisation des intérêts. Un taux fixe de 4 % est payé et le taux LIBOR 12 mois est reçu. La jambe fixe est capitalisée au taux de 3,9 % et la jambe variable à LIBOR–20. La courbe ZC LIBOR est plate à 5 % en composition annuelle et le principal est de 100 millions.

La jambe fixe reçoit 4 millions à la fin de chaque année, ce qui donne $4 \times 1{,}039 = 4{,}156$ à la fin de la première année. Cette somme est ajoutée aux 4 millions reçus à la fin de la seconde année et à nouveau capitalisée à 3,9 %, ce qui donne $8{,}156 \times 1{,}039 = 8{,}474$ millions. Quatre millions sont ajoutés une dernière fois à la fin de la vie du swap, ce qui donne un paiement total de 12,474 millions.

Pour la jambe variable, nous supposons que les taux forward aujourd'hui sont les taux spot futurs. La courbe ZC LIBOR étant plate, les taux forward sont égaux à 5 %. L'intérêt à la fin de la première année est de 5 millions. Il est capitalisé au taux de 4,8 % (LIBOR–20), ce qui donne $5 \times 1{,}048 = 5{,}24$ millions. On ajoute alors le nouvel intérêt de 5 millions, ce qui nous amène à 10,24 millions. Cette somme est à nouveau capitalisée à 4,8 % et on ajoute le dernier intérêt de 5 millions, ce qui donne $10{,}24 \times 1{,}048 + 5 = 15{,}731$ millions. Le swap peut être évalué comme la valeur actuelle de la différence des deux flux, à savoir les 15,731 millions encaissés sur la jambe variable et les 12,474 millions payés sur la jambe fixe. On a donc :

$$\frac{15{,}731 - 12{,}474}{1{,}05^3} = 2{,}814$$

Le swap vaut 2,814 millions (nous avons ici encore ignoré les conventions de décompte des jours).

30.3 Les swaps de devises

Les swaps de devises ont été introduits au chapitre 7. Ils permettent d'échanger une exposition à un risque de taux dans une devise contre une exposition à un risque de taux dans une autre devise. Un principal est spécifié pour chaque devise et ils sont échangés au début et à la fin de la durée de vie du swap (voir section 7.8).

Supposons que l'euro et le dollar US soient les deux devises d'un swap fixe-fixe (les taux sont des taux fixes dans les deux devises). Cela signifie que des intérêts en USD sont calculés sur le principal exprimé en USD et payés par l'une des parties alors que l'autre paie des intérêts en EUR sur le principal en EUR. La méthode d'évaluation d'un tel swap a été exposée à la section 7.9.

Un autre type de swap de devises assez courant est le swap variable-variable. Dans ce cas, les intérêts payés sont calculés au taux LIBOR d'une devise (éventuellement avec un spread) et les intérêts reçus au taux LIBOR de l'autre devise (éventuellement avec un spread). La troisième catégorie de swap est un swap croisé dans lequel un taux variable dans une devise est échangé contre un taux fixe dans l'autre.

Les swaps variable-variable peuvent être évalués selon la méthodologie habituelle supposant les taux forward égaux aux taux spot futurs dans chacune des deux devises. On peut ainsi évaluer les flux dans chaque devise ; ils sont ensuite actualisés aux taux ZC LIBOR dans la devise correspondante. Le taux de change d'aujourd'hui est ensuite utilisé pour comparer les valeurs actuelles des deux séries de flux et définir la valeur du swap.

Cette procédure doit souvent être amendée pour tenir compte des réalités du marché. En effet, un contrat variable-variable, par exemple USD-LIBOR contre EUR-LIBOR (ou Euribor), ne devrait pas comporter de spread. Cependant les conditions de marché font que, dans certains cas, on pourra avoir un nouveau swap échangeant le LIBOR en USD contre LIBOR–10 en EUR. Dans l'évaluation, l'institution financière actualisera les flux en euros à LIBOR–10[2].

30.4 Les swaps plus complexes

Nous abordons maintenant l'évaluation de swaps pour lesquels la règle consistant à identifier taux forward et taux spot futurs ne s'applique pas. Dans chaque cas, la technique consiste à ajuster les taux forward.

Les swaps à flux décalés

Dans un swap vanille, le taux variable observé à une date s'applique au flux qui sera payé à la date suivante. Certains swaps à arrérages (*LIBOR in arrears*) impliquent que le paiement effectivement réalisé à une date est calculé avec le taux variable observé à cette même date.

Notons t_i, $i = 0,\ldots,n$ les dates de paiement du swap et $\tau_i = t_{i+1} - t_i$; R_i est le LIBOR pertinent pour la maturité τ_i à la date t_i, F_i est le taux forward pour cette même période, vu de la date initiale, et σ_i désigne la volatilité de ce taux forward (σ_i peut être déduit des prix de caplets). Dans un swap à arrérages, le paiement de la jambe variable en date t_i est calculé à partir du taux R_i au lieu du taux R_{i-1}. Comme nous l'avons détaillé à la section 27.1, il est nécessaire de procéder à un ajustement de convexité sur le taux forward au moment de l'évaluation. L'évaluation du swap doit alors se faire avec les taux forward suivants :

$$F_i + \frac{F_i^2 \sigma_i^2 \tau_i t_i}{1 + F_i \tau_i} \tag{30.1}$$

au lieu des taux F_i.

2. Il s'agit d'un ajustement *ad hoc*, mais s'il n'était pas réalisé, les traders feraient des gains/pertes immédiats chaque fois qu'ils concluent un nouveau swap EUR-USD variable-variable.

■ **Exemple 30.2**

Considérons un principal de 100 millions d'euros sur un swap à arrérages ; un taux fixe de 5 % est reçu annuellement et le taux LIBOR est payé. Les paiements sont échangés à la fin des années 1 à 5. La courbe ZC LIBOR est supposée plate à 5 % (en composition annuelle) et la volatilité des taux forward, déduite des prix de caplets, est de 22 % par an. Le taux forward pour chaque paiement variable est de 5 %. S'il s'agissait d'un swap classique, sans décalage des flux, sa valeur serait nulle (en ignorant le problème de décompte des jours). Comme le calcul des flux se fait avec un taux décalé, l'ajustement de convexité doit être pris en compte. Dans l'équation (30.1), on a $F_i = 5$ %, $\sigma_i = 22$ % et $\tau_i = 1$ pour tout i. Le taux à prendre en compte en date t_i est donc :

$$0{,}05 + \frac{0{,}05^2 \times 0{,}22^2 \times 1 \times t_i}{1 + 0{,}05 \times 1} = 0{,}05 + 0{,}000115 t_i$$

Les taux variables pour le calcul des flux à la fin des années 1 à 5 sont donc respectivement 5,0115 %, 5,023 %, 5,0345 %, 5,0460 % et 5,0575 %. Le flux net à la première date est donc 0,0115 % de 100 millions, soit 11 500 €. Les autres cash-flows nets sont calculés de la même manière et la valeur du swap est alors :

$$-\frac{11\,500}{1{,}05} - \frac{23\,000}{1{,}05^2} - \frac{34\,500}{1{,}05^3} - \frac{46\,000}{1{,}05^4} - \frac{57\,500}{1{,}05^5} = -144\,514 \text{ €}$$

Les swaps à maturité constante

Un swap à maturité constante (connu sous le sigle CMS pour *Constant Maturity Swap*) est un swap dans lequel le taux variable est le taux de swap pour un swap d'une maturité donnée. Par exemple, les paiements de la jambe variable ont lieu tous les six mois sur la base du taux de swap à cinq ans constaté. En général, le taux de swap constaté à une date donnée sert à calculer le flux qui sera effectivement payé six mois plus tard. Notons encore t_i, $i = 0,\ldots,n$ les dates auxquelles sont observés les taux de swap servant à calculer les paiements. Le paiement de la jambe variable à la date t_{i+1} est égal à :

$$\tau_i L S_i$$

où $\tau_i = t_{i+1} - t_i$, L est le principal du swap, et S_i est le taux de swap pour la maturité convenue, observé en t_i.

Notons y_i la valeur forward du taux de swap S_i ; pour évaluer le flux de date t_{i+1}, on utilise l'ajustement de convexité appliqué à y_i, ce qui conduit à transformer le taux de swap forward en :

$$y_i - \frac{1}{2} y_i^2 \sigma_{y,i}^2 t_i \frac{G_i''(y_i)}{G_i'(y_i)} - \frac{y_i \tau_i F_i \rho_i \sigma_{y,i} \sigma_{F,i} t_i}{1 + F_i \tau_i} \qquad (30.2)$$

au lieu de y_i. Dans cette équation, $\sigma_{y,i}$ est la volatilité du taux de swap forward, F_i est le taux forward pour la période séparant t_i et t_{i+1}, $\sigma_{F,i}$ est la volatilité de F_i, ρ_i est le coefficient de corrélation entre y_i et F_i. $G_i(x)$ est le prix en date t_i d'une obligation

en fonction de son taux actuariel. Cette obligation paie ici un taux de coupon y_i, sa durée de vie et ses paiements sont ceux du swap à partir duquel le taux du CMS est calculé. Les volatilités $\sigma_{y,i}$ peuvent être déduites du prix de swaptions et les $\sigma_{F,i}$ du prix de caplets. La corrélation est estimée à partir d'historiques de données.

L'équation (30.2) est un ajustement à la fois temporel et de convexité. Le terme :

$$-\frac{1}{2}y_i^2\sigma_{y,i}^2 t_i \frac{G_i''(y_i)}{G_i'(y_i)}$$

correspond à l'ajustement utilisé dans l'exemple 27.2 de la section 27.1. Il est fondé sur l'hypothèse que le taux de swap S_i détermine le seul paiement de date t_i. Le terme :

$$-\frac{y_i \tau_i F_i \rho_i \sigma_{y,i} \sigma_{F,i} t_i}{1+F_i\tau_i}$$

est équivalent à celui calculé dans la section 27.2 et intègre le fait que le paiement déterminé par S_i est effectivement réalisé en t_{i+1}.

■ **Exemple 30.3**

Dans un swap CMS à six ans, le taux de swap 5 ans est reçu, et un taux fixe de 5 % est payé sur un principal de 100 millions d'euros. L'échange des flux est semestriel (à la fois sur le CMS et sur le swap de référence). Le paiement variable à une date donnée est calculé à partir du taux de swap 5 ans observé à la date de paiement précédente. La structure par termes des taux ZC est plate à 5 %. La volatilité implicite des swaptions est de 15 % pour toutes les maturités, et les caplets de tenor 6 mois ont une volatilité implicite de 20 %. La corrélation entre taux de swap et taux de cap est de 0,7.

On a donc ici $y_i = 0{,}05$; $\sigma_{y,i} = 0{,}15$; $\tau_i = 0{,}5$; $F_i = 0{,}05$; $\sigma_{F,i} = 0{,}20$ et $\rho_i = 0{,}7$ pour tout i. De plus on a :

$$G_i(x) = \sum_{i=1}^{10} \frac{2{,}5}{(1+x/2)^i} + \frac{100}{1+x/2)^{10}}$$

On en déduit $G_i'(y_i) = -437{,}603$ et $G_i''(y_i) = 2261{,}23$. L'équation (30.2) donne l'ajustement total à réaliser, égal à $0{,}0001197t_i$, ou encore 1,197 point de base par an. Par exemple, le taux de swap cinq ans dans quatre ans serait supposé égal à 5,0479 % au lieu de 5 %, et le cash-flow net reçu dans 4,5 ans serait $0{,}5 \times 0{,}000479 \times 100\,000\,000 = 23\,940$ €. En appliquant la même méthode aux autres dates, on aboutit à une valeur de swap de 159 811 €.

Les swaps à maturité constante sur taux d'État, connus sous le sigle CMT (*Constant Maturity Treasury swap*), fonctionnent comme les CMS, mais le taux variable est en fait le taux actuariel d'une obligation d'État avec une maturité spécifiée. Les CMT s'analysent donc comme les CMS sauf que S_i est le taux actuariel au pair d'une obligation du Trésor servant de référence (en termes de maturité).

Les swaps différentiels

Un swap différentiel, souvent appelé *diff swap*, est un swap dans lequel le taux variable observé dans une devise donnée est appliqué à un principal exprimé dans une autre devise. Supposons que le LIBOR observé en t_i dans une devise Y soit appliqué à un principal dans une devise X avec un paiement effectif en t_{i+1} ; notons V_i le taux forward dans la devise Y et W_i le taux de change forward pour un contrat de maturité t_{i+1} (exprimé en nombre d'unités de devise Y pour une unité de X). Si le LIBOR observé dans la devise Y était appliqué à un principal dans la devise Y, on utiliserait les taux F_i pour évaluer les paiements. Nous avons vu à la section 27.3 qu'il faut appliquer un ajustement quanto en supposant que le taux LIBOR est égal à :

$$V_i + V_i \rho_i \sigma_{W,i} \sigma_{V,i} t_i \tag{30.3}$$

où $\sigma_{V,i}$ est la volatilité de V_i, $\sigma_{W,i}$ la volatilité de W_i, et ρ_i est le coefficient de corrélation entre V_i et W_i.

- **Exemple 30.4**

Supposons que les taux aux États-Unis et en France soient de 5 % pour toutes les maturités, en composition annuelle ; dans un *diff swap* à trois ans avec paiements annuels, le LIBOR 12 mois sur USD est reçu et le LIBOR 12 mois sur EUR est payé, les deux étant appliqués à un principal de 10 millions d'euros. La volatilité des taux forward à 1 an aux États-Unis est estimée à 20 % et la volatilité du taux de change forward (en USD par EUR) est de 12 % pour toutes les maturités, avec une corrélation entre taux forward et taux de change forward égale à 0,4. On a alors $V_i = 0{,}05$; $\rho_i = 0{,}4$; $\sigma_{V,i} = 0{,}2$ et $\sigma_{W,i} = 0{,}12$.

Les cash-flows dépendant du taux LIBOR US doivent alors être calculés avec le taux ajusté suivant :

$$0{,}05 + 0{,}05 \times 0{,}4 \times 0{,}12 \times 0{,}2 \times t_i = 0{,}05 + 0{,}00048 t_i$$

Les cash-flows nets à la fin des trois années sont donc respectivement 0, 4 800 et 9 600 €. La valeur du diff swap est donc :

$$\frac{0}{1{,}05} + \frac{4800}{1{,}05^2} + \frac{9600}{1{,}05^3} = 12647 \text{ €}$$

30.5 Les swaps sur actions ou indices (equity swaps)

Dans un swap sur indices, une des parties s'engage à payer le rendement d'un indice alors que l'autre partie paye un taux d'intérêt fixe ou variable. Pour les gérants de fonds, c'est un moyen de modifier l'exposition au risque de marché d'un portefeuille sans changer la composition de celui-ci. Un swap sur indices est un moyen pratique de dupliquer une série de contrats forward sur indices.

L'indice sous-jacent est en général un indice de rendement global tenant compte du réinvestissement des dividendes dans l'indice. Un exemple de ce type de swap est donné dans l'encadré 30.3.

Encadré 30.3 Extrait d'une confirmation pour un swap sur indices entre Microsoft et Intel

Date de transaction	27 février 2005
Date de départ	5 mars 2005
Convention	jours ouvrés Suivant
Calendrier	jours ouvrés US
Date de fin	5 mars 2008
Paiements fixes	
Payeur de l'indice	Microsoft
Principal de l'indice	100 millions USD
Indice	Rendement global du S&P500
Paiement	$100(I_1 - I_0)/I_0$, où I_1 est le niveau de l'indice à la date de paiement et I_0 le niveau de l'indice à la date de paiement précédente. Pour le premier paiement, I_0 est le niveau de l'indice le 05 mars 2005
Dates de paiement	Chaque 5 septembre et 5 mars, commençant le 5 sept. 2005 jusqu'au 5 mars 2008
Paiements variables	
Payeur du taux variable	Intel
Principal du variable	100 millions USD
Taux variable	LIBOR 6 mois sur USD
Décompte des jours	Exact/360
Dates de paiement	Chaque 5 septembre et 5 mars, commençant le 5 sept. 2005 jusqu'au 5 mars 2008

Dans cet exemple, le taux de rentabilité à 6 mois du S&P500 est échangé contre le LIBOR. Le principal est de 100 millions pour chaque partie, et les paiements sont semestriels.

Au début de la vie d'un swap comme celui du tableau 30.3, sa valeur est nulle. C'est dû au fait que l'on peut toujours emprunter le principal au LIBOR pour investir dans l'indice jusqu'à la date de paiement suivante en réinvestissant dans l'indice les dividendes éventuels. Un raisonnement du même type montre que la valeur d'un swap de ce type est nulle immédiatement après chaque date de paiement.

Entre deux dates de paiement, il faut évaluer les cash-flows (indice et LIBOR) à la prochaine date de paiement. Le cash-flow LIBOR peut facilement être calculé puisqu'il a été fixé à la précédente date de réajustement. La valeur du cash-flow lié à l'indice

est LE/E_0 où L est le principal, E est la valeur de l'indice aujourd'hui, et E_0 est cette même valeur à la précédente date de réajustement[3].

30.6 Les swaps contenant des options

Certains swaps contiennent des options. Dans cette section, nous présentons quelques exemples parmi les plus courants.

Les swaps à capitalisation conditionnelle (accrual swaps)

Il s'agit de swaps dans lesquels l'intérêt d'une des deux parties n'est capitalisé que si la référence de taux variable se situe dans un certain intervalle. Cet intervalle peut être fixé pour toute la durée du swap ou modifié périodiquement. Cela peut être par exemple un swap dans lequel un taux fixe Q est échangé contre un LIBOR 3 mois. L'intérêt à taux fixe n'est payé que dans les périodes où le LIBOR 3 mois est inférieur à 5 %. Notons toujours L le principal ; dans un swap classique, le payeur du taux fixe verse QLn_1/n_2, où n_1 est le nombre de jours depuis le paiement précédent et n_2 le nombre de jours dans l'année (nous supposons ici une convention Exact/Exact). Dans un swap à capitalisation conditionnelle, le paiement sera QLn_3/n_2, où n_3 est le nombre de jours du trimestre qui vient de s'écouler pendant lequel le taux LIBOR 3 mois était inférieur à 5 %. Le payeur du taux fixe a de ce fait une position combinant un swap classique et un portefeuille d'options digitales, une pour chaque jour de la durée de vie du swap. Ces options ont un payoff égal à QL/n_2 quand le LIBOR est supérieur à 5 %.

Pour généraliser cet exemple, notons R_K le taux en deçà duquel le taux fixe cesse d'être payé et τ le délai entre deux paiements successifs (en années). i est un jour quelconque et t_i est le délai entre aujourd'hui et le jour i. R_i est le taux LIBOR de maturité τ observé au jour i, F_i est le taux forward et σ_i la volatilité de ce dernier, estimée à partir de volatilités spot de caplets. Sous l'hypothèse de log-normalité, la probabilité que le LIBOR soit plus grand que R_K sous la probabilité forward-neutre ayant pour numéraire le zéro-coupon d'échéance $t_i + \tau$ est $N(d_2)$ avec :

$$d_2 = \frac{\ln(F_i/R_K) - \sigma_i^2 t_i/2}{\sigma_i \sqrt{t_i}}$$

Le payoff de l'option digitale est réalisé à la première date de paiement du swap suivant le jour i. Notons s_i cette date ; $N(d_2^*)$ est la probabilité que le taux LIBOR soit plus grand que R_K, dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance s_i. Le coefficient d_2^* est calculé par la même formule que d_2, mais

3. Voir la note technique n° 19 sur le site de l'éditeur (www.pearsoneducation.fr) pour une analyse plus détaillée.

avec un ajustement temporel traduisant la différence entre $t_i + \tau$ et s_i. La valeur de l'option digitale correspondant au jour i est alors :

$$\frac{QL}{n_2} P(0,s_i) N(d_2^*)$$

La valeur totale des options digitales incluses dans le swap est obtenue en additionnant l'expression précédente pour tous les jours considérés. En pratique, l'ajustement temporel consistant à remplacer d_2 par d_2^* est si faible qu'il est le plus souvent ignoré.

Les swaps annulables

Un swap annulable (*cancelable swap*) est un swap de taux vanille dans lequel une des deux parties a la possibilité de terminer le swap à une ou plusieurs dates. Mettre fin au swap est bien sûr équivalent à prendre une position sur un swap exactement symétrique en termes de caractéristiques. Considérons à nouveau un swap entre Microsoft et Intel ; si Microsoft a la possibilité d'arrêter le swap à une date donnée, cela peut être interprété comme une position comportant un swap classique, plus une position longue sur une option de swap sur le swap symétrique. Si, par contre, c'est Intel qui a la possibilité de stopper, la position de Microsoft est composée d'un swap classique, auquel s'ajoute une position courte sur une swaption dont le sous-jacent est le swap symétrique.

Lorsque la possibilité d'arrêter le swap n'est offerte qu'à une seule date, la position est la combinaison d'un swap vanille avec une swaption européenne dont l'échéance est la date possible d'arrêt. Considérons par exemple un swap durant 10 ans entre Microsoft et Intel, dans lequel Microsoft reçoit 4 % et paie le LIBOR et a la possibilité d'arrêter le swap après six ans. Ce swap est la combinaison d'un swap vanille avec une swaption européenne d'échéance 6 ans donnant le droit de conclure un swap de 4 ans dans lequel Microsoft paiera 4 % et recevra le LIBOR (ce contrat est appelé option européenne 6×4). Les modèles de marché standard du chapitre 26 permettent d'évaluer ce type d'options.

Lorsque le swap peut être arrêté à plusieurs dates, l'option combinée avec le swap vanille est une swaption bermudienne. Elle peut être évaluée à l'aide des méthodes présentées aux chapitres 28 et 29.

Les swaps annulables composés

Parfois les swaps composés peuvent être annulés à certaines dates de paiement spécifiées à l'avance. Au moment de l'annulation, le payeur du taux variable règle la valeur capitalisée des montants à taux variable (jusqu'à la date d'arrêt) et le payeur du taux fixe règle la valeur capitalisée des paiements fixes jusqu'à cette même date.

Il faut utiliser quelques ruses pour évaluer ces contrats. Supposons, par exemple, que le taux variable soit le LIBOR, que ce même taux soit le taux de capitalisation et

que le principal soit payé, sur les deux jambes, à l'échéance du swap. Cela revient à passer du tableau 7.1 au tableau 7.2 pour un swap vanille. Cela ne change pas la valeur du swap mais a pour effet d'assurer que la jambe variable est toujours égale à la valeur notionnelle du principal à une date de paiement. La décision d'arrêt est prise en analysant uniquement la jambe fixe. On construit un arbre comme celui décrit au chapitre 28 et on évalue la jambe fixe par induction arrière. À chaque date possible d'annulation et à chaque nœud, on teste le caractère optimal de l'arrêt. L'annulation fixe en effet la valeur de la jambe fixe au pair ; si on est en position de recevoir le fixe et de payer le variable, l'objectif est alors de maximiser la valeur de la jambe fixe.

Quand le taux de référence de la jambe variable est LIBOR + spread avec un taux de capitalisation LIBOR, on peut soustraire de la jambe fixe les cash-flows correspondant au spread, plutôt que de les ajouter à la jambe variable. L'option peut alors être évaluée en faisant comme si le spread était nul. Lorsque le taux de capitalisation est LIBOR + spread, une méthode approchée doit être utilisée[4] :

1. On calcule la valeur de la jambe variable à chaque date d'annulation en identifiant taux forward et taux spot futurs.
2. On calcule la valeur de la jambe variable à chaque date d'annulation en supposant que le taux variable est le LIBOR et en capitalisant au LIBOR.
3. On définit l'écart entre les valeurs obtenues aux points (1) et (2) comme la « valeur des spreads » à la date d'annulation.
4. On considère l'option comme dans le cas précédent. Pour décider d'exercer ou non, on soustrait la valeur des spreads aux valeurs calculées pour la jambe fixe.

30.7 Quelques autres swaps

Dans ce chapitre, nous avons analysé quelques catégories importantes de swaps, mais la variété des contrats qu'il est possible de construire a pour seules limites l'imagination des professionnels de la finance et l'appétit des trésoriers pour les innovations financières et les outils sophistiqués de gestion du risque.

Un swap très populaire aux États-Unis dans les années 1990 était le swap à principal indexé (*index amortizing swap*), dans lequel le principal diminue dans le temps en fonction du niveau d'un taux d'intérêt. La diminution du principal est d'autant plus forte que la baisse du taux qui sert de base à l'indexation est importante. La jambe fixe de ce type de swap était destinée à dupliquer, au moins approximativement, la rentabilité obtenue par un investisseur sur un portefeuille de créances hypothécaires, après prise en compte des options de remboursement anticipé. Dans ce contrat, cette rentabilité était donc échangée contre un taux variable.

Les swaps sur marchandises ou matières premières (*commodity swaps*) sont de plus en plus prisés. Par exemple, une entreprise qui consomme 100 000 barils de pétrole par

4. Cette approche n'est pas parfaite car elle suppose que la décision d'exercice de l'option n'est pas influencée par le fait que les paiements futurs seront capitalises à un taux différent du LIBOR.

an pourrait échanger un paiement annuel de 6 millions de dollars contre un paiement de 100 000 $\times$ S, où S est le prix du baril aux différentes dates de paiement. Ce contrat permet d'assurer un prix du baril qui ne dépasse pas 60 $. Les dérivés d'énergie ont été examinés plus en détail au chapitre 23.

Une innovation plus récente est le swap de volatilité. Dans ce contrat, les paiements dépendent de la volatilité d'une action ou d'un indice. Notons L le principal ; à chaque date de paiement, une partie paie $L\sigma$, où σ est la volatilité historique calculée sur données journalières depuis la date de paiement précédente. L'autre partie paie $L\sigma_K$, où σ_K est un seuil de volatilité prédéfini. Les swaps de variance, de corrélation ou de covariance sont définis de la même façon. Un certain nombre d'autres swaps, liés au risque de crédit, ont été détaillés au cours de plusieurs autres chapitres. Par exemple, les swaps d'actif ont été discutés au chapitre 20 et certains swaps de crédit ont été traités au chapitre 21.

Un contrat étrange

Certains contrats supposent un calcul des flux relativement étrange. Un exemple célèbre est le swap 5/30 conclu par Bankers Trust (BT) et Procter & Gamble (P&G) en 1993[5] (voir encadré 30.4). Les détails de cette opération sont de notoriété publique car elle fut l'objet d'une affaire judiciaire.

Résumé

Les swaps constituent une classe d'instruments financiers d'une grande diversité. Nombre d'entre eux peuvent être évalués simplement, en considérant que les taux spot futurs sont égaux aux taux forward observés aujourd'hui. Les swaps vanille, la plupart des swaps sur devises, les swaps dont le principal évolue de manière déterministe, les swaps composés appartiennent à cette catégorie.

Certains swaps nécessitent un ajustement des taux forward pour pouvoir appliquer la méthode classique ; ces ajustements sont liés aux décalages temporels, à la convexité ou aux devises considérées. Les swaps à arrérages, les swaps différentiels ou les CMS nécessitent ce genre d'ajustement.

Les swaps sur actions ou indices font intervenir la rentabilité d'une action ou d'un indice qui sera échangée contre un taux d'intérêt fixe ou variable. Ils sont habituellement conçus de façon que leur valeur soit nulle immédiatement après chaque date de paiement. Une certaine prudence est cependant nécessaire pour les évaluer entre deux dates de paiements.

5. Voir D. J. Smith, « Agressive Corporate Finance : A Close Look at the Procter and Gamble-Bankers Trust Leveraged Swap », *Journal of Derivatives*, 4, n° 4 (été 1997), 67-79.

Encadré 30.4 L'étrange contrat de Procter & Gamble

Le swap 5/30 conclu par Bankers Trust (BT) et Procter & Gamble (P&G) le 2 novembre 1993 était un swap durant cinq ans avec des paiements semestriels sur un principal de 200 millions de dollars. BT payait 5,3 % par an et P&G payait le taux moyen des billets de trésorerie à 30 jours (*commercial paper*), moins 75 points de base plus un spread. La moyenne était calculée sur la période courant depuis la précédente date de paiement. Le spread était nul à la première date de paiement (le 2 mai 1994) ; par contre, les spreads suivants étaient calculés selon la formule suivante :

$$\max\left[0;\ \frac{98{,}5\left(\frac{R_5}{5{,}78\%}\right)-P_{30}}{100}\right]$$

où R_5 est le taux actuariel des obligations à 5 ans du Trésor (*5-year Treasury notes*) tel qu'il est transmis par la Federal Reserve, et P_{30} est le milieu de fourchette du prix, coupon couru, de l'obligation à 30 ans du Trésor, dont l'échéance est en août 2023, et qui paie 6,25 % de taux de coupon. Notez que le taux calculé est un taux décimal et non un taux mesuré en points de base. Si le calcul de cette formule donne un résultat égal à 0,1 et que le taux des billets de trésorerie soit de 6 %, le taux payé par Procter & Gamble est de 15,25 %. P&G espérait bien sûr que le spread reste nul, ce qui permettait à l'entreprise d'échanger un taux fixe de 5,30 % contre un taux variable inférieur de 75 points de base au taux des billets de trésorerie. En 1994, les taux augmentèrent fortement, ce qui fit chuter le prix des obligations. On voit dans la formule précédente l'effet d'un tel mouvement sur le spread : R_5 augmente et P_{30} diminue, ce qui, à l'époque, fit exploser le spread (voir problème 30.10).

Certains swaps contiennent des options. Les swaps à capitalisation conditionnelle s'interprètent comme un swap vanille auquel on a ajouté un large portefeuille d'options digitales (une option pour chaque jour de vie du swap). Enfin, un swap annulable peut être vu comme un swap vanille auquel on a ajouté une swaption bermudienne.

Références complémentaires

CHANCE D. et D. RICH, « The Pricing of Equity Swap and Swaptions », *Journal of Derivatives*, 5, n° 4 (été 1998), 19-31.

DEMETERLI K., E. DERMAN, M. KAMAL et J. ZOU, « A Guide to Volatility and Variance Swaps », *Journal of Derivatives*, 6, n° 4 (été 1999), 9-32.

SMITH D. J., « Agressive Corporate Finance : A Close Look at the Procter and Gamble-Bankers Trust Leveraged Swap », *Journal of Derivatives*, 4, n° 4 (été 1997), 67-79.



[redacted]